Klub 44

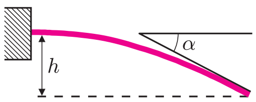
Rozwiązania zadań z numeru 4/2011

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

516. Sprężyście zginający się jednorodny pręt o długości l i masie m zamocowano jednym końcem poziomo, a drugi zwisa pod wpływem siły ciężkości (rys. 1). Miarą sztywności pręta jest dany parametr k, będący stosunkiem momentu siły zginającej M do kąta α między stycznymi do końców pręta, gdy M ma wzdłuż niego stałą wartość. Obliczyć numerycznie zwis pręta h oraz kąt opadania jego końca α, przy następujących danych: $l = 1$ m, $m = 1$ kg, $k = 1$ N $\cdot$ m/rad, przyspieszenie ziemskie $\mathrm{g} = 10$ m/s^2.

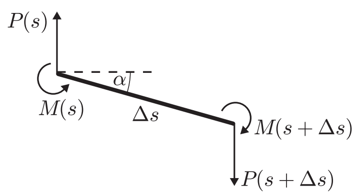
Wskazówka: Obliczenia mogą być oparte na przedstawieniu pręta jako zespołu dużej liczby n sztywnych prętów o masach $m_1 = m/n$ i długościach $l_1 = l/n$, połączonych przegubami opisanymi przez współczynnik $k_1 = k \cdot n$.



Rys. 1

517. Równoległa wiązka światła o natężeniu (tzn. mocy na jednostkę powierzchni prostopadłej) I_0 pada na kulkę o promieniu r ze szkła o współczynniku załamania n. W odległości $R \gg r$ od kulki znajduje się ekran prostopadły do wiązki padającej, ale oświetlony tylko przez światło przechodzące przez kulkę. Jeśli można pominąć efekty dyfrakcyjne i odbicie światła od szkła, to jakie jest natężenie światła padającego na środek ekranu?

516. Niech s będzie zmienną wzdłuż pręta, od $s = 0$ (koniec zamocowany) do $s = l$ (koniec zwisający). Funkcjami zmiennej s są: siła oddziaływania jednej części na drugą $P(s)$ (czyli ciężar prawej części pręta), moment zginający pręt $M(s)$ oraz kąt odchylenia stycznej od poziomu $\alpha(s)$. Oczywiste jest, że $P(s) = mg(l - s)/l$, natomiast rozważając mały odcinek pręta o długości $l_1 = \Delta s$, stwierdzamy, że warunek równowagi ze względu na obrót ma postać (zob. rys. 2)



Rys. 2

$$-\Delta M = M(s) - M(s + \Delta s) = P \Delta s \cos\alpha.$$

Pominęliśmy tu „wyrazy drugiego rzędu”, tzn. zaniedbaliśmy ciężar tego odcinka oraz różnicę między wartościami P na jego końcach. Dalej, różnica między kątami nachylenia sąsiednich odcinków zależy od M zgodnie ze wzorem

$$k_1 \Delta\alpha = M, \quad \text{czyli} \quad kl = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = M.$$

Zbierając zapisane równania, dochodzimy w granicy $\Delta s \to 0$ do równania różniczkowego

$$kl \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}s^2} = -mg\frac{l - s}{l}\cos\alpha,$$

które po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej $z = s/l$ przybiera postać

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{mgl}{k}(1 - z)\cos\alpha.$$

Równanie to trzeba scałkować od $z = 0$ (gdzie $\alpha = 0$) do $z = 1$ (gdzie $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} = 0$), przy czym stała $\frac{mgl}{k}$ ma wartość 10. Zgodnie z treścią zadania obliczyć należy $\alpha(1)$ oraz sumę przesunięć pionowych $\mathrm{d}h = \mathrm{d}z \cdot \sin\alpha$. Autor stosował procedurę numeryczną, zaczynając od $z = 0$ i wybierając dowolną początkową wartość $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}$, a następnie korygując ją tak, aby w punkcie $z = 1$ otrzymać $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} = 0$. Okazuje się, że właściwą początkową wartością $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}$ jest 3,74, końcowy kąt nachylenia jest równy $\alpha(1) = 1{,}054$ rad, a zwis $h = 0{,}701$ m.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 512 ($WT = 3{,}30$) i 513 ($WT = 3{,}15$) z numeru 2/2011

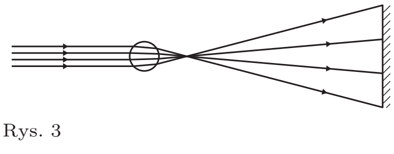
Jerzy Witkowski	Radlin	39,68
Andrzej Idzik	Bolesławiec	36,52
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,63
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	32,04
Michał Koźlik	Gliwice	20,94

Rozwiązanie zadania F 793.
Możemy założyć, że kropla rozpłynęła się symetrycznie i widziana z góry ma kształt koła o promieniu R. Powierzchnia tego koła wynosi $S = V/d = m/\rho d$. Siła przyciągania między płytkami równa jest $F = \Delta p/S$, gdzie $\Delta p = 2\sigma/d$ jest ciśnieniem wywieranym przez zakrzywioną powierzchnię cieczy. Ostatecznie

$$F = \frac{2\sigma m}{\rho d^2} = 0{,}72 \text{ N}.$$

517. Promień, którego przedłużenie jest odległe od środka kulki o h, pada na jej powierzchnię pod kątem $\alpha = \arcsin(h/r)$ i załamuje się pod kątem $\beta = \arcsin(h/rn)$. Ponieważ przy wyjściu z kulki kąty są te same, więc kąt odchylenia tego promienia od kierunku początkowego jest równy $\gamma = 2(\alpha - \beta)$. Rozpatrując promienie padające na ekran w pobliżu środka, należy przyjąć, że kąty są małe, tzn. $\gamma = 2\frac{h}{r}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Gdy spełniony jest warunek $R \gg r$, promienie odchylone o γ padają na ekran w odległości γR od środka. Widzimy, że wiązka o polu przekroju πh^2, której moc wynosi $\pi h^2 I_0$, oświetla na ekranie koło o polu $\pi(\gamma R)^2$. Szukane natężenie oświetlenia środka ekranu wynosi więc

$$\frac{\pi h^2 I_0}{\pi(\gamma R)^2} = I_0\left(\frac{r}{2R}\right)^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-2}.$$



Rys. 3