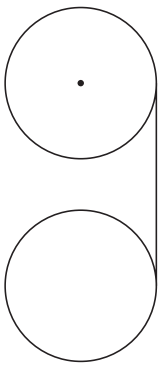
Klub 44

Rozwiązania zadań z numeru 3/2011

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

514. Jednorodny krążek (blok) może się obracać bez tarcia wokół poziomej osi, oznaczonej na rysunku kropką. Drugi taki sam krążek jest połączony z pierwszym nawiniętą na nie nitką. Z jakim przyspieszeniem spada dolny krążek?



515. Zbiornik zawierający $n = 100$ moli gazu doskonałego o temperaturze $T_1 = 400$ K i pod ciśnieniem $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa znajduje się w otoczeniu powietrza atmosferycznego o temperaturze $T_0 = 290$ K i pod ciśnieniem $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Pa. Obliczyć maksymalną pracę, którą może wykonać zespół gaz+otoczenie (zarówno bezpośrednio, jak za pośrednictwem maszyn cieplnych). Ciepło molowe gazu przy stałej objętości jest równe $C_V = \frac{5}{2}R$.

514. Oznaczmy siłę napięcia nici przez N, promień krążków przez r, a masę przez m. Równanie ruchu obrotowego ma dla każdego z krążków jednakową postać

$$Nr = I\varepsilon = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon,$$

gdzie I jest momentem bezwładności, a ε – przyspieszeniem kątowym, jednakowym – jak widać – dla obu krążków. Iloczyn $r\varepsilon$ jest przyspieszeniem pionowego odcinka nici, a także przyspieszeniem dolnego krążka względem tego odcinka. Zatem przyspieszenie a dolnego krążka względem układu nieruchomego jest równe

$$a = 2r\varepsilon.$$

Stąd $N = \frac{1}{2}mr\varepsilon = \frac{1}{4}ma$. Po podstawieniu tego wyrażenia do równania ruchu postępowego dolnego krążka

$$mg - N = ma$$

otrzymujemy rozwiązanie: $a = \frac{4}{5}$g.

515. Warunek maksymalnej pracy odpowiada doprowadzeniu gazu do temperatury T_0 i ciśnienia p_0 w procesie odwracalnym. Na przykład, można najpierw rozprężyć gaz adiabatycznie do temperatury T_0, a następnie dokonać sprężenia lub rozprężenia izotermicznego, aby osiągnąć ciśnienie p_0. Pomijając na razie pracę powietrza atmosferycznego, pracę przy rozprężeniu adiabatycznym W_{ad} znajdziemy jako różnicę początkowej i końcowej energii wewnętrznej:

$$W_{\mathrm{ad}} = nC_V(T_1 - T_0).$$

Praca przy rozprężeniu izotermicznym jest natomiast równa całce

$$\int p\,\mathrm{d}V = nRT_0 \int \mathrm{d}V/V = nRT_0 \ln(V_0/V'),$$

gdzie V' jest objętością gazu po rozprężeniu adiabatycznym, a V_0 – objętością końcową. Z równania przemiany adiabatycznej w zmiennych V-T

$$VT^{1/(\gamma-1)} = \mathrm{const} \qquad (\text{gdzie } \gamma = C_p/C_V,\ 1/(\gamma-1) = C_V/R)$$

znajdujemy

$$V' = V_1\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{C_V/R}.$$

Po podstawieniu $V_1 = nRT_1/p_1$, $V_0 = nRT_0/p_0$ dochodzimy do wzoru na pracę przy rozprężeniu izotermicznym

$$W_{\mathrm{izot}} = nRT_0\ln(V_0/V_1) - nC_VT_0\ln(T_1/T_0).$$

Dla przyjętych danych wielkość ta jest ujemna, bo $V' > V_0$ (mamy więc sprężenie izotermiczne, a nie rozprężenie). Od sumy $W_{\mathrm{ad}} + W_{\mathrm{izot}}$ należy jeszcze odjąć pracę powietrza atmosferycznego

$$W_{\mathrm{atm}} = p_0(V_0 - V_1).$$

Ostatecznie

$$W = W_{\mathrm{ad}} + W_{\mathrm{izot}} - W_{\mathrm{atm}} =$$
$$= nC_V\left(T_1 - T_0 - T_0\ln\frac{T_1}{T_0}\right) + nRT_0\ln\frac{p_1T_0}{p_0T_1} - nRT_0 + nR\frac{p_0}{p_1}T_1 = 49{,}5\ \mathrm{kJ}.$$

Ten sam wynik otrzymamy także w innych procesach odwracalnych prowadzących do wyrównania ciśnień i temperatur. Na przykład, można by najpierw w przemianie izochorycznej odwracalnie obniżyć temperaturę do T_0 (tzn. zastosować doskonały silnik cieplny korzystający z gazu w zbiorniku jako grzejnika, a z otoczenia jako chłodnicy), a następnie zastosować rozprężenie izotermiczne jak poprzednio.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 510 ($WT = 2{,}44$) i 511 ($WT = 1{,}60$) z numeru 1/2011

Jerzy Witkowski	Radlin	39,05
Tomasz Rudny	Poznań	35,20
Tomasz Wietecha	Tarnów	33,64
Andrzej Idzik	Bolesławiec	32,85
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,78
Michał Koźlik	Gliwice	19,00

Rozwiązanie zadania F 791.
Połączenia wg schematu pokazanego na rysunku poniżej pozwalają otrzymać każdą z trzech pożądanych mocy.