Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2011

Zadania z fizyki nr 510, 511

Redaguje Jerzy B. BROJAN

510. Masa wolframowego włókna żarówki wynosi $m = 0{,}02$ g, a ciepło właściwe wolframu $c = 160$ J/(kg · K). Gdy żarówka była zasilana stałym napięciem 230 V, jej opór wynosił 800 Ω, a temperatura włókna była równa 2500 K. Podłączono tę żarówkę do napięcia sinusoidalnie zmiennego o częstotliwości 50 Hz i wartości skutecznej 230 V. Obliczyć przybliżoną głębokość modulacji promieniowania żarówki, tzn. wielkość $(I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$, gdzie I – moc promieniowania. Założyć, że przepuszczalność szkła żarówki nie zależy od długości fali.

Można wykorzystać także następujące dane: gdy stałe napięcie zasilające zmieniano w niewielkim zakresie i powoli, na każdy 1 wolt jego przyrostu opór żarówki zwiększał się o 2,5 Ω, a temperatura włókna zwiększała się o 0,7 K.

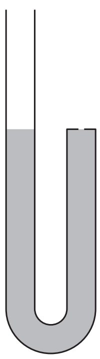
511. Pod wpływem różnicy ciśnień w rurce o stałym przekroju występuje stacjonarny (niezmienny w czasie) i laminarny (bezwirowy) przepływ cieczy. Jeśli dwukrotnie zwiększymy średnicę rurki, nie zmieniając jej długości, różnicy ciśnień i rodzaju cieczy, to ile razy wzrośnie ilość cieczy przepływającej w ciągu jednostki czasu? Uzasadnić odpowiedź.

Wskazówka: Opory ruchu cieczy charakteryzuje współczynnik lepkości η zdefiniowany wzorem $\frac{F}{S} = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$, gdzie F – siła działająca stycznie na powierzchnię cieczy S, wzdłuż której następuje poślizg warstw, $\mathrm{d}v$ – różnica prędkości warstw na odcinku $\mathrm{d}y$ prostopadłym do S.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2010

Przypominamy treść zadań:

502. Stożkowe naczynie ma niewielki otwór w wierzchołku stożka i taki sam otwór w jego podstawie. Jeśli po nalaniu do pełna wody czas opróżnienia naczynia w pozycji wierzchołkiem do dołu jest równy t_1, to ile wynosi t_2 – czas opróżnienia w pozycji wierzchołkiem do góry?



503. Rurka U-kształtna ma pole przekroju poprzecznego $S_1 = 5$ cm^2, a jedno z jej ramion (o wysokości $l = 20$ cm) jest zamknięte, z otworkiem o powierzchni $S_2 = 3$ mm^2. Rurkę napełniono wodą do poziomu zamknięcia (rys. 1), następnie wprowadzono przez otworek powietrze, tak że poziom w otwartym ramieniu podniósł się o $h = 5$ cm, po czym pozwolono wodzie opaść.

a) Na jaką wysokość H wytrysnęła woda przez otworek? Pominąć ściśliwość i lepkość wody, a także gęstość i lepkość powietrza.

b) Orientacyjnie oszacować wpływ czynników pominiętych w punkcie a) na wynik. Współczynnik ściśliwości wody jest równy $5 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1}, lepkość wody wynosi 0,001 kg/(m · s), lepkość powietrza – $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ kg/(m · s).

502. Ze względu na małą lepkość wody możemy pominąć straty energii, a w takim razie prędkość v wypływu przez otwór jest równa $\sqrt{2gh}$ (gdzie h – wysokość słupa wody). Objętość wody wypływającej w ciągu jednostki czasu jest opisana wzorem

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = Sv = S\sqrt{2gh},$$

gdzie S jest polem powierzchni otworu, z ewentualną korektą zależną od ostrości jego krawędzi (chodzi o efekt zwężania strumienia na zewnątrz). Podstawiamy tu $\mathrm{d}V = A\mathrm{d}h$, gdzie A jest polem powierzchni wody w naczyniu, równym $A = A_0(h/H)^2$ w przypadku ustawienia wierzchołkiem do dołu, a $A = A_0((H-h)/H)^2$ w przypadku ustawienia odwrotnego (A_0 oznacza pole podstawy stożka, a H – jego wysokość). Całkowanie po czasie daje wyniki

$$t_1 = \frac{2}{5}\frac{A_0}{S}\sqrt{\frac{H}{2g}}, \qquad t_2 = \frac{16}{15}\frac{A_0}{S}\sqrt{\frac{H}{2g}},$$

zatem $t_2 = \frac{8}{3}t_1$.

503. Podniesienie poziomu wody w jednym ramieniu o h połączone z obniżeniem o tyle samo poziomu w drugim ramieniu oznacza zwiększenie energii potencjalnej o $\varrho g S_1 h^2$ (ϱ – gęstość wody). Z przyrównania tego wyrażenia do $\frac{1}{2}mv_1^2$ (gdzie $m = 2\varrho S_1 l$ jest masą całej wody) wyznaczamy prędkość v_1 uderzenia o zamknięty koniec

$$v_1 = h\sqrt{g/l} = 0{,}35 \text{ m/s}.$$

Jeśli woda w szerokiej części rurki nie zwolni w wyniku uderzenia, a pominiemy ściśliwość, to w otworku musi poruszać się z prędkością $v_2 = v_1 S_1/S_2 = 58$ m/s, zatem wzniesie się na wysokość

$$H = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{h^2}{2l}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = 174 \text{ m}.$$

Tę zaskakująco wielką wartość spróbujemy urealnić, uwzględniając różne zjawiska pominięte wyżej. W każdym z poniższych punktów bierzemy pod uwagę tylko jeden efekt.

a) Nadanie wodzie w otworku tak dużej energii kinetycznej musi nastąpić kosztem zmniejszenia prędkości reszty wody. Przyjmijmy, że pierwsza wyrzucona porcja wody ma wszystkie trzy wymiary jednakowego rzędu, czyli objętość ΔV rzędu $S_2^{3/2}$. Z przyrównania początkowej energii potencjalnej do sumy energii kinetycznych $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m v_2^2$ znajdujemy skorygowane v_1 i v_2, a dalej

$$H = \frac{S_1 h^2}{2lS_2^2/S_1 + S_2^{3/2}} = 101 \text{ m}.$$

b) Ściśliwość wody oznacza, że nawet w przypadku otworka pomijalnie małego ciśnienie p w chwili zatrzymania słupa wody nie wzrośnie nieograniczenie, lecz tylko do wartości wynikającej z rozchodzenia się w niej fali dźwiękowej, tzn. z zatrzymywania i sprężania kolejnych warstw wody. W przedziale czasu Δt zatrzymaniu ulega odcinek Δh słupa wody, którego objętość jest równa $V = S_1\Delta h$, a zmiana tej objętości spowodowana wzrostem ciśnienia o p wynosi $\Delta V = \beta V_p = \beta p S_1 \Delta h$ (gdzie β – współczynnik ściśliwości); z drugiej strony przemieszczenie niesprężonego słupa wody wynosi $v_1\Delta t$, więc $\Delta V = v_1 S_1 \Delta t$. Gdy do II zasady dynamiki $F = \Delta p/\Delta t$ podstawimy $F = pS_1$, $\Delta p = v_1 \Delta m = v_1 \varrho V$, otrzymamy

$$p = v_1\sqrt{\varrho/\beta}.$$

(To rozumowanie jest zwykle wykorzystywane do wyprowadzenia wzoru na prędkość fali dźwiękowej.) Z równania Bernoulliego wynika prędkość wypływu wody

$$v_2 = \sqrt{\frac{2p}{\varrho}} = \frac{\sqrt{2v_1}}{\sqrt[4]{\varrho\beta}} = 31 \text{ m/s}.$$

Jest to nieprzekraczalna wartość prędkości wypływu przez najmniejszy nawet otworek. Odpowiednia wartość H wynosiłaby 50 m.

c) Lepkość wody oznacza wystąpienie siły oporu w czasie jej opadania. Podstawiamy orientacyjne dane: $S = 0{,}015$ m^2 (powierzchnia boczna walca o długości $2l$ i promieniu równym połowie promienia rurki), $\Delta z = 0{,}013$ m (promień rurki), $\Delta v = 0{,}25$ m/s (średnio) i otrzymujemy siłę oporu równą $3 \cdot 10^{-4}$ N. W porównaniu z początkową wartością siły wprawiającej wodę w ruch, równą ciężarowi 10-centymetrowego słupa wody (0,5 N), jest to mniej niż 1/1000, więc efekt można uznać za nieistotny.

d) Lepkość powietrza da o sobie znać w okolicy otworka. Zakładając prędkość równą 40 m/s i przybliżenia podobne do poprzednich, otrzymuje się opór rzędu 10^{-5} N, czyli jeszcze mniej niż w punkcie c).

e) Niezerowa gęstość powietrza oznacza, że do wypchnięcia go przez otworek potrzebna jest pewna nadwyżka ciśnienia, która hamuje podnoszenie się poziomu wody. Dla prędkości 40 m/s i gęstości 1,3 kg/m^3 to ciśnienie wynosiłoby 1000 Pa, czyli siła hamująca 0,5 N – tyle samo, ile maksymalna siła wprawiająca w ruch wodę. Jest to obok punktu b) najważniejszy efekt zmniejszający realną wartość H. Numeryczne całkowanie równania ruchu wody dało wynik $v_1 = 0{,}11$ m/s, stąd $v_2 = 18{,}3$ m/s i $H = 17$ m.

f) Z gęstością powietrza związana jest też siła oporu działająca na wystrzeloną porcję wody... ale na dalsze oszacowania nie ma już miejsca na tej stronie.