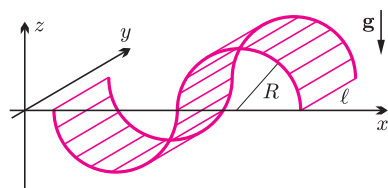
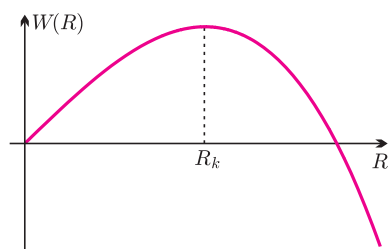


Jaka jest maksymalna wysokość szklanki, dla której efekt da się zaobserwować?



Rys. 1. Półwałcowe zaburzenie w uproszczonym modelu.

Położenie środka masy można uzyskać drogą bezpośredniego całkowania. Może Czytelnik znaleźć prostszy sposób wprowadzenia?



Rys. 2. Schematyczny wykres zależności energii zaburzenia od „długości” fali.

Gdybyśmy wzięli wiadro pełne wody i udało nam się obrócić je tak, by swobodna powierzchnia wody była dnem, woda niemal natychmiast wylałaby się. Powszechnie znane jest doświadczenie z kartką, którą nakrywamy powierzchnię szklanki wypełnionej wodą, a następnie odwracamy naczynie i obserwujemy, że woda nie wylewa się. Przyczyną jest obecność ciśnienia atmosferycznego, które jest większe niż ciśnienie hydrostatyczne tuż nad kartką. Siła parcia wynikająca z różnicy ciśnień jest skierowana ku górze i powstrzymuje ciecz przed wylaniem się. Jeśli jednak spróbujemy usunąć kartkę, natychmiast zmoczymy siebie i okolicę. Co dawała nam więc obecność kartki? W czym kartka lepsza jest niż powierzchnia cieczy? Z drugiej strony, jeśli weźmiemy wiadro w rozmiarze mini, np. flakonik po perfumach, i wypełnimy wodą, po obróceniu naczynia do góry dnem ciecz pozostanie w środku i nie wyleje się. Zatem rozmiar powierzchni ma tu znaczenie. Jaki tajemniczy mechanizm stoi za wylewaniem się wody z wiadra? Wydaje się, że jesteśmy tak przyzwyczajeni do tego zjawiska, że nie zadajemy sobie tego pytania, a tymczasem jest to bardzo ciekawe pole do popisu dla prostych modeli energetycznych.

Poniżej przedstawimy rozumowanie zaczerpnięte z rosyjskiej książki S.S. Chilkiewicza [1]. Jest to bardzo prosty model, który jednak pozwala uchwycić mechanizm fizyczny tego zjawiska i wyeksponować rolę sił napięcia powierzchniowego i grawitacji przy analizie niestabilności powierzchni.

Rozważamy zaburzenia powierzchni w formie fal o kształcie półwałców (rys. 1). Z powodu istnienia napięcia powierzchniowego σ praca związana ze zwiększeniem pola powierzchni rozdziału płynów wynosi $W_1 = \sigma \Delta S$. Wygięciu powierzchni towarzyszy również przemieszczenie pewnej masy wody, której energia potencjalna zmienia się. Jeśli rozważymy pewną masę wody o środku masy na wysokości h nad ziemią, jej energia potencjalna wyniesie $W_2 = mgh$. W przypadku pojedynczego „zafalowania”, polegającego na wygięciu prostokątnego fragmentu powierzchni o wymiarach $4R \times \ell$ w dwa półwałce, z których jeden jest wypełniony cieczą, zmiana pola powierzchni tego obszaru wyniesie

$$\Delta S = S_2 - S_1 = 2\pi R\ell - 4R\ell.$$

Wobec tego została wykonana praca

$$W_1 = 2\sigma(\pi - 2)R\ell.$$

Z drugiej strony, zmieniła się również energia potencjalna wody. Jeżeli środek masy porcji wody obniżył się o h , to zmiana jego energii potencjalnej wyniosła $W_2 = -mgh$. Łatwo znajdujemy wysokość środka masy układu, ponieważ nasze wybrzuszenia są półwałcami o promieniu R i długości ℓ . Jeśli początkowo środek masy wody, tworzącej półwałec, znajdował się na wysokości d nad poziomem powierzchni rozdziału faz, to teraz obniżył się o $h = 2d$ (po prostu „wykroiliśmy” półwałec wody znad powierzchni i „przykleiliśmy” go do dna). Dla takiego półwałca położenie środka masy można zapisać jako

$$d = \frac{4}{3\pi}R.$$

Całkowita zmiana energii przy tworzeniu się takiego zaburzenia wynosi więc

$$W = W_1 + W_2 = 2R\ell \left[(\pi - 2)\sigma - \frac{2}{3}\rho g R^2 \right] = W(R).$$

Otrzymaliśmy wyrażenie wielomianowe względem R . Zbadajmy je.

Zadanie, które stoi teraz przed nami, jest bardzo podobne do następującego zagadnienia: rozważmy ciało poruszające się na prostej, którego energia potencjalna zależy od położenia $E = E(x)$. Zmiana energii potencjalnej ciała jest równa pracy wykonanej nad ciałem, czyli pracy sił pola wziętej ze znakiem minus: $\Delta E_p = -W_{\text{pola}}$. Jeśli wybierzemy dostatecznie małą odległość Δx , to pracę sił pola możemy zapisać jako $F_x \Delta x$. Możemy zatem zapisać wyrażenie na lokalną wartość siły w zależności od położenia jako

$$F_x = - \frac{\Delta E_p}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} - \frac{dE_p}{dx}.$$

W przypadku, gdy przemieszczamy ciało ku „górze” energii potencjalnej, siła będzie skierowana przeciwnie do kierunku wzrostu energii potencjalnej (co jest intuicyjne). Położenie na szczycie będzie położeniem równowagi nietrwałej, bo na wychylone z niego ciało działać będzie siła, która zwiększy wychylenie – za chwilę wykorzystamy ten wniosek. Płynie stąd jeszcze jeden morał – położenie o minimalnej energii będzie położeniem równowagi trwałej.

Przedstawiony na rysunku 2 przebieg funkcji $W(R)$ wskazuje istnienie maksimum. Okazuje się więc, że istnieje krytyczna wartość promienia R_k , powyżej której amplituda fali będzie nieograniczenie wzrastać, bo dla $R > R_k$ zwiększenie amplitudy będzie prowadziło do zmniejszenia energii zaburzenia. Zysk energetyczny wynikający

*student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

z obniżenia położenia środka masy będzie większy aniżeli strata związana z powiększaniem pola powierzchni granicy faz. Dzieje się tak dlatego, że jesteśmy tu świadkami konkurencji sił powierzchniowych (rosnących z pewną charakterystyczną dla układu skalą długości L jak L^2) i sił objętościowych (rosnących jak L^3). Dla dostatecznie dużych długości wkład do całkowitej energii cieczy pochodzący od energii objętościowej (potencjalnej) przeważa. Można teraz znaleźć maksimum funkcji $W(R)$ i przekonać się, że interesująca nas wartość promienia to

$$R_k = \sqrt{\frac{\pi - 2}{2} \frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Dla $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ J/m}^2$ otrzymujemy krytyczny promień $R_k \approx 2 \text{ mm}$. Stąd długość fali

$$\lambda_k = 4R_k = 2\sqrt{2(\pi - 2) \frac{\sigma}{\rho g}}.$$

W przypadku fal „walcowych” znaleźliśmy zależność zmiany energii zaburzenia od promienia zaburzającej fali. Jasne jest teraz, że narastać będą takie zaburzenia, dla których R jest odpowiednio duże. Zaburzenia, których R znajdzie się na lewo od maksimum, będą miały tendencję do zanikania, natomiast te na prawo będą powodowały niestabilność powierzchni.

Bardzo podobne rozumowanie prowadzi się w klasycznej teorii przy analizie tworzenia się w układzie metastabilnym zarodków nowej fazy. Przypuśćmy mianowicie, że pojemnik z gazem ochłodzimy poniżej temperatury wrzenia. Mamy wówczas do czynienia właśnie ze stanem metastabilnym – z termodynamicznego punktu widzenia dla układu korzystniejsze jest przebywanie w stanie ciekłym, jednakże przejście fazowe wymaga powstania zaczątków fazy ciekłej, czyli małych kropelek. Utworzenie kropelki jest związane z pewnym kosztem energetycznym, który wynika z istnienia napięcia powierzchniowego. Mamy więc również do czynienia z gęstością energii powierzchniowej oraz gęstością energii objętościowej i konkurencją tych dwóch wkładów do całkowitej energii układu G . Prowadzi to do wniosku, że i w tym przypadku również istnieje bariera przy tworzeniu się jądra kondensacji, a zależność zmiany energii (ściślej mówiąc – energii swobodnej Gibbsa) od promienia kropli ma także charakter wielomianu trzeciego stopnia. W związku z tym powstające w układzie w sposób przypadkowy zarodki, jeśli są za małe, szybko znikają, parując ponownie, bo dla $R < R_k$ zmniejszenie promienia zmniejsza energię układu. Z kolei powstanie odpowiednio dużej kropli jest dalece mniej prawdopodobne. W praktyce okazuje się, że zarodek krytyczny zawiera około 200 atomów (cząsteczek) i ma rozmiary rzędu 6–10 Å.

Ale dla przypadku fal na odwróconej powierzchni to, oczywiście, zbyt prosty model. Przede wszystkim nie pozwala nam on rozróżnić dwóch bardzo ważnych parametrów – długości fali i amplitudy. W przypadku fal sinusoidalnych analiza jest o wiele bardziej skomplikowana. Zjawisko niestabilności powierzchni rozdzielającej dwa płyny w polu grawitacyjnym, gdy gęstość górnego płynu jest większa niż dolnego, nazywa się *niestabilnością Rayleigha–Taylor’a*. Czytelnika zainteresowanego dokładniejszą analizą niestabilności fal sinusoidalnych na powierzchni rozdziału płynów odsyłamy do podręczników mechaniki płynów (zwięzły opis można znaleźć np. w książce Fabera [2]). Przedstawione tam kryterium, otrzymane w bardziej wyrafinowany sposób, różni się od powyższego jedynie współczynnikiem liczbowym

$$\lambda'_k = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Jeśli porównamy to z długością fali wyliczoną w ramach przedstawionego powyżej modelu, okaże się, że wartości te różnią się dość znacznie

$$\frac{\lambda_k}{\lambda'_k} \approx 0,48,$$

jednak zaskakująco prosty model fal o przekroju półkolistym daje dobry rząd wielkości przewidywanej długości fali.

Tym samym rozwiązała się nasza zagadka – woda wylewa się z wiadra, bo jest ono duże. Średnica otworu jest na tyle duża, że na powierzchni cieczy mają szansę wytworzyć się dostatecznie długie, niestabilne fale. Oczywiście, kartka, którą przykryjemy powierzchnię, bardzo efektywnie tłumi takie zaburzenia. W przypadku flakonika perfum lub aromatu do ciasta średnica otworu jest na tyle mała (rzędu kilku milimetrów), że nie mogą tam powstać dłuższe fale, zaburzenia zaś o mniejszej długości fali są tłumione i nie prowadzą do niestabilności powierzchni, więc i bez kartki widzimy efekty działania ciśnienia atmosferycznego. Przekonać można się o tym w jeszcze jeden sposób – zamiast kartką, można nakryć szklaną płaskim sitkiem i kartką, odwrócić i delikatnie usunąć kartkę – woda utrzyma się, bo sitko wytłumia długie, „niebezpieczne” fale.



Wysokość bariery jest rzędu $\Delta G \approx 10 - 100k_B T$, więc prawdopodobieństwo pojawienia się takiego zarodka, które można oszacować jako $e^{-\Delta G/k_B T}$, jest maleńkie.

Niestabilność granicy płynów opisał po raz pierwszy John Strutt (lord Rayleigh) w 1883 r. i dopiero w latach 50. XX wieku zaczęto się nim interesować głębiej, za sprawą prac Geoffreya Taylor’a.

Literatura

- [1] S.S. Chilkiewicz, *Fizika wokруг nas*, nr 40 z serii „Biblioteka Kwant”, 1985. Książka jest dostępna w wersji elektronicznej na stronie http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/bib-kvant/kvant_40.htm
- [2] T.E. Faber, *Fluid dynamics for physicists*, Cambridge Univ. Press, 2001.