

O Słońcu i gwiazdach „kwantowych”

Alex SCHWARZENBERG-CZERNY*

* Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN

W XIX wieku – gdy tylko do światła Słońca i gwiazd zastosowano analizę widma płomieni, stało się jasne, że stanowią one kule gorącego gazu. Spróbujmy zatem opisać ich wnętrza, zakładając, że ciśnienie zmienia się z gęstością, jak w przemianie politropowej (opisanej w Δ_{20}^{10}):

$$(1) \quad K \left(\frac{M}{R^3} \right)^{1+1/n} \sim K \rho^{1+\frac{1}{n}} \approx P = kT \frac{\rho}{\mu_g} \sim \frac{kT}{\mu_g} \frac{M}{R^3} \sim \frac{GM^2}{R^2} \frac{1}{R^2},$$

gdzie kolorem wyróżniono równanie stanu gazu doskonałego; K i n to stałe, a μ_g oznacza masę jednej cząsteczki. Jeśli więc gęstość to stosunek masy M i objętości $V \propto R^3$, $\rho = M/V$, to ρ/μ_g jest proporcjonalne do liczby moli na jednostkę objętości, jak w tradycyjnej postaci tego równania. Dla kulistej gwiazdy w grubym przybliżeniu $\rho \sim M/R^3$, pomijając przy tym czynniki rzędu kilka (π i inne). W tej samej konwencji pole przekroju kuli $\propto R^2$, a w równowadze siła parcia jest rzędu siły grawitacji gwiazdy, GM^2/R^2 , skąd wynika wzór na ciśnienie. Porównując skrajne wyrażenia, mamy

$$(2a) \quad \frac{M^{n-1}}{R^{n-3}} \sim \left(\frac{K}{G} \right)^n \sim \text{const} \quad \text{oraz} \quad (2b) \quad \frac{kT}{\mu_g} \sim \frac{GM}{R}.$$

Zależność (2a) jest użyteczna i, co ważniejsze, weryfikowana w oparciu o obserwacje. Wynika z niej, że dla $n = 3$ gwiazda o danej masie zachowując równowagę mechaniczną (hydrostatyczną), może przyjmować różne promienie. Oznacza to, że jej równowaga jest obojętna. Można także pokazać, że dla $n < 3$ obiekty są w równowadze trwałe. Przykładem nie-gwiazdowym jest Ziemia o wnętrzu z ciekłych metali, gdzie gęstość praktycznie nie zmienia się z ciśnieniem ($n = 0$ w równaniu 1). Dla $n > 3$ gwiazda nie jest stabilna i albo ulega rozproszeniu, albo kurczy się, aż zmiana własności sprasowanego gazu spowoduje, że $n < 3$.

W praktyce w grupach podobnych gwiazd możemy spotkać dwie sytuacje:

(a) dla każdej gwiazdy z osobna równanie politropy (1) jest dobrym przybliżeniem dla pewnego ustalonego n , ale z różnymi wartościami K ; oraz (b) dla całej grupy n i K są ustalone. Przypadek (a) dotyczy gwiazd zbudowanych ze zwykłego gazu, w których transport ciepła na zewnątrz odbywa się dzięki konwekcji. Dla nas jest istotne, że elementy konwektywne poruszają się w czasie $\tau \sim \tau_d/\sqrt{\epsilon} \sim (\tau_d^2 \tau_t)^{1/3}$ – gdzie τ_d oznacza czas dynamiczny, a τ_t czas termiczny (szczegóły na marginesie), który jest znacznie krótszy niż czas termiczny τ_t – wymieniając z otoczeniem znikomą część ϵ zapasu energii, czyli w dobrym przybliżeniu uczestniczą w przemianie adiabatycznej (mówimy zatem o konwekcji quasi-adiabatycznej).

Przy temperaturach panujących w gwiazdach atomy są w pełni zjonizowane, tak że energia cieplna gazu pochodzi praktycznie wyłącznie z ruchu kinetycznego elektronów i jąder, a wtedy wykładnik adiabaty wynosi $\gamma \equiv 1 + 1/n = 5/3$, czyli $n = 3/2$. Takie modele politropowe dobrze opisują wnętrza gwiazd chemicznie jednorodnych, należących do tzw. ciągu głównego, jak np. Słońce o typie widmowym $Sp = G4$, ale chłodniejszych niż $Sp = K0$, i o mniejszej masie, takich jak czerwone karły, w których konwekcja obejmuje praktycznie całą gwiazdę. Ponieważ dla chłodnych gwiazd obserwowana zależność masa–promień to $R \sim M^{0,85}$, zatem z (2b) $T_c \sim M^{0,15}$, czyli dla coraz mniejszych mas temperatura w centrum spada. Dla masy $M < 0,08M_\odot$ temperatura jest za niska do zapłonu reakcji jądrowych – takie gwiazdy to brązowe karły, świecące kosztem zmagazynowanej energii termicznej (ich τ_t jest znacznie większe niż dla Słońca, zatem stygną bardzo długo). Podobną do nich politropową budowę mają licznie teraz odkrywane planety o masach większych od Jowisza. Natomiast podobnie do czerwonych olbrzymów, oprócz rozdętej politropowej otoczki konwektywnej, w samym centrum niczym pestka tkwi małe, ale bardzo gęste jądro (składające się z metalicznego wodoru w przypadku Jowiszów i zdegenerowanego helu – o czym później – w przypadku czerwonych olbrzymów).

Czytelnik Oburzony, że to wszystko oszustwo szyte zbyt grubymi nićmi, brakujące czynniki znajdzie w poprzednim artykule tej serii w Δ_{20}^{10} .

By przенosić ciepło, element konwektywny musi mieć temperaturę różniącą się od otoczenia o δT , a względnie o $\epsilon = \delta T/T$. Zanedbując siłę wyporu, element pokonuje drogę R pod działaniem przyspieszenia GM/R^2 w czasie dynamicznym τ_d , gdzie $R = (GM/R^2)\tau_d^2$, czyli $\tau_d \sim \sqrt{R^3/GM}$ (w przypadku Słońca $\tau_d \approx 1$ h). W praktyce wskutek częściowego równoważenia grawitacji przez siłę wyporu na element konwektywny działa przyspieszenie równe $\epsilon GM/R^2$, zatem czas będzie rzędu $\tau \sim \tau_d/\sqrt{\epsilon}$. Zakładając, że konwekcja dotyczy całej gwiazdy, pojemność cieplna wszystkich elementów jest porównywalna z jej energią grawitacyjną GM^2/R . W rzeczywistości transportowane jest ciepło związane z nadwyżką temperatury $\epsilon GM^2/R$, gdzie $\epsilon \ll 1$. Jasność gwiazdy to $L \sim \epsilon GM^2/(R\tau) \sim \epsilon^{3/2} GM^2/(R\tau_d)$, czyli $\epsilon = (\tau_d/\tau)^{2/3}$, gdzie $\tau_t \sim GM/(r^2 L) \approx 10^7$ lat jest czasem termicznym, potrzebnym do wyświecenia przez gwiazdę zapasu energii cieplnej. Oczywiście gwiazdy odnawiają ten zapas dzięki reakcjom termojądrowym, co sprawia, że żyją znacznie dłużej.

W znacznej części wnętrza Słońca do transportu energii zamiast konwekcji wystarcza promieniowanie, zatem zależność $P(\rho)$ może być słabsza niż dla adiabaty, $n > 3/2$. Budowę wnętrza Słońca możemy przybliżyć, zakładając jak Arthur Eddington, że stosunek ciśnienia gazu i ciśnienia promieniowania jest stały: $P_r = \beta P_g$, czyli $P_r = 4\sigma T^4/3c = \beta P_g = \beta \rho/\mu_g kT$. Stąd mamy $T \sim \rho^{1/3}$, zatem całkowite ciśnienie to $P = (1 + \beta)P_g \sim \rho^{4/3}$, co odpowiada politropie $n = 3$. Przybliżenie jest niedoskonałe, bo wtedy Słońce byłoby niestabilne (w równowadze obojętnej, jak wynika z 2a). W rzeczywistości dzięki rosnącej ze spadkiem T roli ciśnienia gazu średnie n jest bliskie, ale mniejsze niż 3, więc na szczęście nasza najbliższa gwiazda prowadzi się dobrze.

Gdy w podobnej do Słońca lub nieco bardziej masywnej gwiazdzie wyczerpie się w jądrze paliwo jądrowe (wodór) i zostanie hel, niezdatny do dalszej produkcji energii z powodu za niskiej temperatury, to parametr n opisujący jądro takiej gwiazdy rośnie od pierwotnej wartości $3/2$ do nieskończoności, wyrównując temperaturę poprzez odprowadzenie energii na zewnątrz. Co oczywiste, już po zbliżeniu się do $n = 3$ staje się ono niestabilne i pod naciskiem otoczki kurczy się, aż osiągnie $\rho_c \sim 10^6 \text{ g/cm}^3$, kiedy istotne stają się efekty kwantowe, o czym poniżej.

Spektakularną ilustracją przypadku (b) są białe karły, dla których K i n są z grubsza stałe. Postaramy się je wyznaczyć. Jak wiadomo, Syriusz A to najjaśniejsza gwiazda naszego nieba. Z precyzyjnych obserwacji jego pozycji wiadomo było, że wraz z towarzyszem – Syriuszem B – o podobnej masie, obiegają po orbitach wspólny środek ciężkości układu. Wobec małej jasności składnik B długo krył się w blasku składnika A. Gdy dzięki postępowi techniki udało się go zaobserwować, okazał się gorętszy (bardziej błękitny) niż Syriusz A, a zatem jego nikły blask można wyjaśnić tylko bardzo małym promieniem (nieco większym od Ziemi), co oznacza gęstość materii przekraczającą tonę/cm³.

Siłę można zapisać jako zmianę pędu p_x w czasie, $F_x = \delta p_x/\delta t$. Zatem ciśnienie P jako parcie F gazu na jednostkę powierzchni można zapisać jako strumień padającego/odbitego pędu (czynnik 2 pomijamy). Musimy jednak wziąć pod uwagę dwie możliwe prędkości elektronu, klasyczną $v_x \ll c$ i relatywistyczną $v_x = c$:

$$P \sim \frac{\rho}{\mu_e} p_x v_x \sim \frac{\rho}{\mu_e} p_x \begin{cases} \frac{p_x}{m_e} & \text{klasycznie} \\ c & \text{relatywistycznie,} \end{cases}$$

gdzie ρ/μ_e to liczba cząstek w jednostce objętości, a v_x i p_x to ich prędkość i pęd, co daje strumień pędu na jednostkę powierzchni. Rozróżniamy tu masę gazu przypadającą na elektron – μ_e , rzędu masy 2 protonów – od masy samego elektronu m_e , prawie 2000 razy mniejszej. Wraz ze wzorami z marginesu otrzymujemy

$$(2) \quad P \sim \begin{cases} \left[\frac{3^{2/3}}{20\pi^{2/3}} \right] \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} & x \ll 1 \\ \left[\frac{3^{1/3}}{8\pi^{1/3}} \right] hc \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} & x \gg 1, \end{cases}$$

gdzie $x \equiv p_x/m_e c \sim (h/m_e c)(\rho/\mu_e)^{1/3} \sim \lambda_C/\Delta x$ i $\lambda_C = h/m_e c$ jest nazywana Comptonowską długością fali elektronu. Nawiasy kwadratowe zawierają czynniki pominięte w wyprowadzeniu, których dopisanie daje wynik ścisły. Dla krytycznej wartości $x = 1$ dostajemy gęstość, przy której można uznać, że elektrony są relatywistyczne:

$$(3) \quad \rho_{rel} = \mu_e \left(\frac{m_e c}{h} \right)^3 \sim 10^6 \text{ g/cm}^3.$$

Z powyższego wynika, że przy nierelatywistycznej degeneracji $n = 3/2$, a więc białe karły winny spełniać zależność $M^{1/2} R^{3/2} = \text{const}$. Masy wyznaczamy jak dla Syriusza B, z układów podwójnych. Natomiast promień białego karła można wyznaczyć z efektu poczerwienienia grawitacyjnego. W granicach błędów białe karły o masach $M < 1 M_\odot$ faktycznie spełniają powyższą zależność $M(R)$. Pospolite białe karły mają $M \sim 0,6 M_\odot$, ale takie o $M > 1,2 M_\odot$ są spotykane.

Fascynujący rezultat dostajemy także dla relatywistycznej degeneracji, czyli $n = 3$. Wówczas $K \sim hc/\mu_e^{4/3}$, więc wzór (2a) zamienia się wprost we wzór na masę

Warto dodać, że otoczka takiej gwiazdy rozdyma się, a gwiazda – nazywana wtedy czerwonym olbrzymem – przypomina brzoskwinie o twardej pestce w środku miękkiej, delikatnej otoczki.

W porównaniu do rozmiaru brzoskwinie pestka jest grubości włosa i, choć zawiera kilkadziesiąt procent masy gwiazdy, ma promień zaledwie trochę większy od Ziemi, a otoczka może mieć rozmiar orbity Merkurego lub nawet większy.

Jak zauważył Subrahmanyan Chandrasekhar, powyżej pewnej gęstości materia jest nie tylko całkowicie zjonizowana, ale także elektrony jako fermiony o spinie $1/2$ nie mogą zajmować tych samych stanów w przestrzeni położeń i pędów. Minimalna objętość takiego stanu wynika z zasady nieoznaczoności Heisenberga w trzech wymiarach:

$$\Delta x^3 \Delta p_x^3 \geq h^3,$$

gdzie h jest stałą Plancka. Średnia objętość wynosi $\Delta x^3 = \mu_e/\rho$, gdzie $\mu_e \sim 2m_H$ jest średnią masą gazu przypadającą na elektron, zwykle rzędu masy 2 nukleonów (protonu/neutronu). Zatem średnia wartość bezwzględna pędu w osi x to

$$p_x \sim \Delta p_x \sim h(\rho/\mu_e)^{1/3}.$$

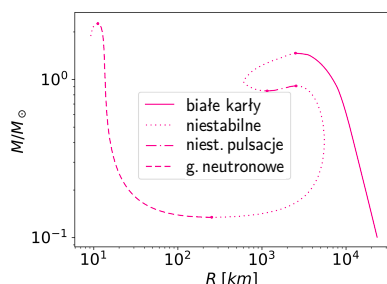
Przy gęstości białych karłów tak wielkiemu pędowi odpowiada tzw. energia Fermiego, łączna energia kinetyczna elektronu w 3 kierunkach $E_F(p)$, znacznie wyższa od energii termicznej kT cząstek w najgorętszych gwiazdach $E_F \gg kT$. Oznacza to, że prawie wszystkie stany energetyczne poniżej E_F są zajęte, bo liczne pustostany odpowiadałyby dostarczeniu gazowi dodatkowej energii, znacznie większej niż termiczna. O takim gazie mówimy, że jest zdegenerowany.

Jeśli z powierzchni gwiazdy emitowany jest foton w linii widmowej o częstotliwości ν_0 (energii $E = h\nu_0$), co na mocy relatywistycznego wzoru $E = mc^2$ odpowiada masie dynamicznej (w ruchu) $m = h\nu_0/c^2$, to ma on też energię potencjalną $-GMm/R$ i by osiągnąć $R = \infty$, musi wykonać pracę, tracąc energię $h\nu_0 - h\nu_\infty = GMh\nu_0/(Rc^2)$. Jeśli ν_0 znamy z laboratorium, a obserwujemy ν_∞ i znamy M , to możemy wyliczyć R .

białego karła, zwaną masą Chandrasekhara:

$$(4) \quad M_{Ch} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\left[\frac{3^{1/3}}{8\pi^{1/3}} \right] \frac{hc(n+1)}{\mu_e^{4/3} G} \right]^{n/2} \mu_1.$$

Na podstawie ścisłych wyprowadzeń w poprzednim artykule tej serii stałą proporcjonalności K/G uzupełniłem o różne pomijane do tej pory czynniki. Wstawiając $\mu_e = 2\mu_H$ odpowiadające masywnemu białemu karłowi o składzie zdominowanym przez tlen i węgiel, otrzymujemy $M_{Ch} = 1,44 M_{\odot}$. Masę całej gwiazdy można wyrazić przez stałe fizyczne, głównie atomowe! Nasz wynik oznacza, że biały karzeł nie może mieć masy większej niż M_{Ch} , bo osiągając relatywistyczną degenerację, staje się niestabilny mechanicznie. Szczególnie spektakularny jest rezultat dla białego karła w układzie podwójnym, w którym towarzysz „na siłę” dostarcza mu materii, aż ten pierwszy osiągnie M_{Ch} . Taki nieszczęśnik zapada się wtedy pod własnym ciężarem, a dzięki uwolnionej energii grawitacyjnej i reakcjom jądrowym spektakularnie wybuchu jako *supernowa typu Ia*: pod olbrzymim naciskiem jądra rozpadają się na nukleony, a pary proton-elektron łączą się w neutrony, które też są fermionami i podlegają zakazowi Pauliego.



Realistyczna zależność masa–promień $M(R)$ dla białych karłów i gwiazd neutronowych na podstawie rachunków warszawskiej grupy astrofizyki gwiazd neutronowych w CAMK (rysunek sporządzony przez Leszka Zdunika)

Gwiazdy dostatecznie gęste, by istotny stał się zakaz Pauliego w przypadku ciężkich fermionów, protonów i neutronów, to *gwiazdy neutronowe*. Są one kolejną, bardziej zwartą niż białe karły, rodziną gwiazd, co pokazuje rysunek na marginesie. Prosta zależność $M(R)$ dla białych karłów świadczy o dobrym przybliżeniu przez politropę $n = 1,5$. Jednak dla lekkich gwiazd neutronowych prawie płaski wykres świadczy o średnim n bliskim 3. W nich neutronizacja nie jest zupełna i wzrost gęstości prowadzi do zamiany dalszych atomów na neutrony, przy niewielkiej zmianie ciśnienia. Przypomina to kondensację pary w temperaturze 100°C , gdy ściskanie daje więcej cieczy, ale ciśnienie jest nadal ciśnieniem pary nasyconej. Z kolei dla mas ponad $0,5 M_{\odot}$ w centrum neutrony są tak ciasno upakowane, że zaczynają odpychać się siłami silnymi (jądrowymi), dominującymi nad ciśnieniem degeneracji, i n zbliża się do 1, a wykres staje się prawie pionowy. Maksymalna masa gwiazdy neutronowej wynosi, jak nam się obecnie wydaje, nieco powyżej $2 M_{\odot}$ i jest skutkiem efektów silnego pola grawitacyjnego, wynikających z relatywistycznych poprawek do teorii grawitacji. Przy tej masie w gwiazdzie neutronowej powoduje ono niezamierzalne zakrzywienie czasoprzestrzeni, zgodnie z ogólną teorią względności. To zakrzywienie jest tylko kilka razy mniejsze niż w przypadku czarnej dziury. Czy pomiędzy rodziną gwiazd neutronowych a czarnymi dziurami istnieje trzecia rodzina zwartych gwiazd? Poszukiwania tak egzotycznych obiektów trwają.

Kwantowy efekt Zenona od kuchni

Stanisław SOŁTAN*

*Doktorant, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Wyobraźmy sobie, że gotujemy wodę na gazie. Spieszy nam się, więc co chwila podnosimy przykrywkę garnka i sprawdzamy, czy woda się gotuje. Ale im częściej sprawdzamy, tym bardziej czas nam się dłuży. „A watched pot never boils” – pilnowany garnek nigdy nie wrze – mówią Anglicy. To jednak jest uczucie czysto subiektywne. Zjawiska fizyczne, jakie spotykamy na co dzień, podlegają identycznym procedurom niezależnie, czy je obserwujemy, czy nie. Teorie fizyczne, które stosujemy do opisu zjawisk, nie interesują się w ogóle takimi „formalnościami” jak pomiary i obserwacje.

Sprawy zmieniają się istotnie, gdy od zwykłych dla nas zjawisk makroświata przejdziemy do skali atomowej czy mniejszej. Teorią konieczną do opisu zjawisk w takiej skali jest mechanika kwantowa. Inaczej niż przywykliśmy, teoria ta obejmuje kwestie formalne, a opis pomiaru (w kategoriach bardzo ogólnych) jest jej istotną częścią. Zjawiska fizyczne przestają być obojętne na to, czy je