

Zagłębiamy do środka gwiazdy

Alex SCHWARZENBERG-CZERNY*

* Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN

Znanym paradoksem jest, że o ile struktura Ziemi jest skomplikowana i do dziś słabo poznana, to wiemy, że gwiazdy są w pierwszym przybliżeniu „kulami gazowymi” – i tak właśnie zatytułował swoją książkę pierwszy badacz ich wnętrza, Robert Emden. Przyjął on, że zmiany ciśnienia P i gęstości ρ w funkcji odległości od środka r odbywają się przy zachowaniu relacji politropowej (politropowego równania stanu):

$$(1) \quad P(\rho) = K\rho^{(n+1)/n} \quad \text{czyli} \quad \rho(P) = \left(\frac{P}{K}\right)^{n/(n+1)},$$

gdzie K i n są stałymi, wynikającymi z własności materii danej gwiazdy; na przykład relatywistyczny gaz zdegenerowanych (ciasno upakowanych) elektronów jest dobrze opisany przez politropę z $n = 3$. Póki co pominiemy dokładność tego przybliżenia w ogólnym przypadku i skupimy się na pokazaniu, jak w oparciu o nie można samemu skonstruować model gwiazdy, używając krótkiego programu komputerowego. Zaczniemy od znalezienia stosownych równań opisujących gwiazdę. Jeśli przez m oznaczymy masę części gwiazdy zawartej w kuli o promieniu r , to powiększając ją o warstwę kulistą o grubości dr , otrzymamy przyrost masy równy $dm = 4\pi r^2 \rho dr$. Przyspieszenie grawitacyjne na takiej powierzchni to $g = Gm/r^2$, gdzie G to stała grawitacji, ponieważ wpływ mas zewnętrznych znika zgodnie z twierdzeniem Newtona. Zatem korzystając ze szkolnego wzoru $hg\rho$ na ciśnienie atmosfery o gęstości ρ i grubości h , dostajemy w warstwie dr spadek ciśnienia hydrostatycznego

$$(2) \quad dP = -\frac{Gm\rho}{r^2} dr \quad \text{oraz} \quad dm = 4\pi r^2 \rho dr.$$

Przed obliczeniami (patrz margines) pokażemy jeszcze, że wygodnie je wykonywać, wybierając pewne umowne jednostki oraz zmienne bezwymiarowe θ , μ i ξ :

$$(3) \quad \rho = \rho_c \theta, \quad P = K\rho_c^{(1+1/n)} \theta^{n+1}, \quad r = r_n \xi, \quad m = m_n \mu, \quad \text{skąd}$$

$$(4) \quad d\theta^{n+1} = -\frac{\rho_c G m_n}{(n+1)P_c r_n} \frac{(n+1)\mu\theta^n}{\xi^2} d\xi \quad \text{oraz} \quad d\mu = \frac{\rho_c 4\pi r_n^3}{m_n} \theta^n \xi^2 d\xi,$$

gdzie r_n i m_n możemy zdefiniować, wymagając, by wyróżnione fragmenty wynosiły 1, i otrzymując

$$(5) \quad m_n = \rho_c 4\pi r_n^3 \quad \text{oraz} \quad r_n^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{(1/n-1)}.$$

W nowych zmiennych warunki początkowe w centrum sprowadzają się do $\mu = 0$, $\theta = 1$ dla $\xi = 0$, a ich przybliżenia dla małych ξ wynoszą

$$(6) \quad \mu = \frac{1}{3}\xi^3, \quad \theta^{n+1} = 1 - \frac{n+1}{6}\xi^2.$$

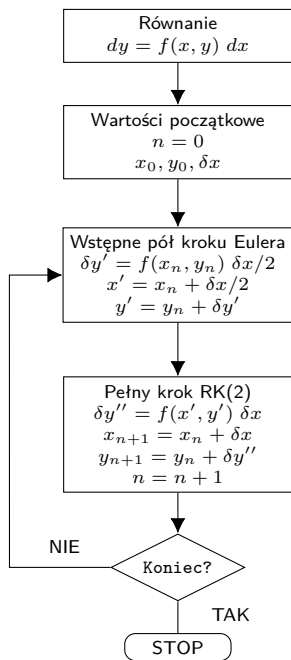
Stąd i z (4) wynika, że teraz rozwiązania na μ i θ zależą tylko od n . Rozwiązanie rozciąga się aż do powierzchni, gdzie dla $\xi = \xi_1$ mamy $\theta^{n+1} = 0$ oraz $\mu = \mu_1$.

Do wykonania obliczeń można się posłużyć krótkim programem napisanym w języku python do ściągnięcia ze stron autora. Obliczenia wykonujemy, korzystając z równań (4), startując z wartości otrzymanych z (6). Program rysuje wykresy przebiegu ciśnienia i gęstości w gwiazdzie, przykład wykresu na następnej stronie. Zestawienie dokładnych wyników na powierzchni dla różnych n mieści tabela pod wykresem.

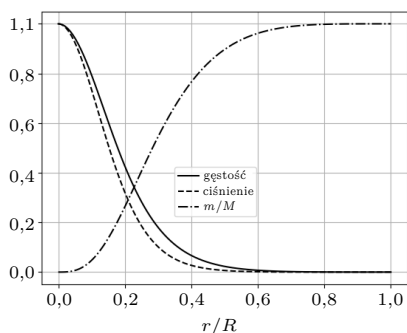
Dotąd nie korzystaliśmy z praw różniczkowania poza oczywistym $d(cx) = c dx$, z warunkiem $c = const$. Analityczne rozwiązania równań Emdena istnieją dla trzech wartości $n = 0, 1, 5$: $\theta^{(0)} = 1 - \xi^2/6$, $\theta^{(1)} = \sin \xi/\xi$ oraz $\theta^{(5)} = (1 + \xi^2/3)^{-1/2}$. To ostatnie rozwiązanie jest graniczne: $\xi_1 = \infty$. Dla $n > 5$ fizyczne rozwiązania nie istnieją, bo wykres θ nie przecina osi ξ . By sprawdzić te rozwiązania i wyrazić μ przez θ , trzeba jednak skorzystać z prawa różniczkowania $dx^a = ax^{a-1} dx$, wynikającego z dwumianu Newtona $(x + \delta x)^a - x^a \approx x^a + ax^{a-1}\delta x + \dots - x^a$. Użyjemy go tylko w tym akapicie i jego znajomość nie jest potrzebna w dalszej części. Wówczas lewa strona (4) przybiera postać $(n+1)\theta^n d\theta$, co po uproszczeniu

Ciśnienie i gęstość osiągają maksimum P_c , ρ_c w centrum gwiazdy i tam zmieniają się wolno, zatem kładąc $m \approx (4/3)\pi\rho_c r^3$ i $dP \approx (4/3)\pi G\rho_c^2 r dr$ dla małych r , unikamy dzielenia przez 0. Wybierając K , P_c i krok promienia δr , obliczenia można prowadzić tak: dla $r = 0$ kładziemy $m[0] = 0$, $P[0] = P_c$ i obliczamy ρ_c , δP i δm z (1) i (2), skąd $m[r + \delta r] = m[r] + \delta m$ oraz $P[r + \delta r] = P[r] + \delta P$ i tak dalej. W tej metodzie, zwanej metodą Eulera, zakładamy jednak, że zmiany parametrów w czasie kroku nie wpływają na δP i δm , co wymaga bardzo małego kroku. To jakby w ruchu jednostajnie przyspieszonym, gdzie $ds = (v_0 + gt)dt$ przyjmując jako średnią prędkość $v(t) = v_0$.

Ulepszeniem jest wersja metody Rungego-Kutty, w której oblicza się P i m w połowie kroku (jak u Eulera, tylko dla $r + \delta r/2$), a dopiero otrzymane wartości używa się do obliczenia δP i δm dla całego kroku δr . Czytelnik może się przekonać, że podobne postępowanie dla ruchu jednostajnie przyspieszonego daje poprawny wynik dla paraboli $s = v_0 t + gt^2/2$, stąd drugi rząd tej metody, RK(2). Z przybliżenia stałego ρ_c w pierwszym kroku otrzymujemy $\delta P \approx (4/3)\pi G\rho_c^2 (\delta r/2)\delta r$ i dalej: $m[\delta r] = (4/3)\pi\rho_c (\delta r)^3$ i $P[\delta r] = P_c - (2/3)\pi G\rho_c^2 (\delta r)^2$.



Schemat blokowy działania metody RK(2)



Wykres dla $n = 3$

Parametry gwiazd politropowych:

| n | ξ_1 | μ_1 | $\frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle}$ |
|-----|----------|---------|---------------------------------------|
| 0,0 | 2,44949 | 4,89898 | 1,00000 |
| 0,5 | 2,75270 | 3,78865 | 1,83514 |
| 1,0 | 3,14159 | 3,14159 | 3,28987 |
| 1,5 | 3,65375 | 2,71406 | 5,99070 |
| 2,0 | 4,35287 | 2,41105 | 11,40254 |
| 2,5 | 5,35528 | 2,18720 | 23,40646 |
| 3,0 | 6,89685 | 2,01824 | 54,18248 |
| 3,5 | 9,53581 | 1,89056 | 152,88366 |
| 4,0 | 14,97155 | 1,79723 | 622,40788 |
| 4,5 | 31,83646 | 1,73780 | 6189,47313 |
| 5,0 | ∞ | 1,73205 | ∞ |

Wynik dla $n = 5$ pochodzi z rozwiązania analitycznego.

po obu stronach daje rozwiązanie:

$$(7) \quad \mu = -\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}.$$

Mając z obliczeń ξ_1 i μ_1 na powierzchni, rzeczywisty promień R i masę gwiazdy M obliczamy z (3), otrzymując $R = r_n \xi_1 \sim \rho_c^{(1-n)/(2n)}$ i $M = m_n \mu_1 \sim \rho_c^{(1-n/3)}$.

Eliminując ρ_c , otrzymujemy:

$$(8) \quad M^{n-1} R^{3-n} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{K(n+1)}{G} \right]^n \mu_1^{n-1} \xi_1^{3-n} = const.$$

W podobny sposób średnia gęstość $\langle \rho \rangle$ to $M/(\frac{4}{3}\pi R^3) = 3\rho_c \mu_1 / \xi_1^3$, skąd przy pomocy (4)

$$(9) \quad \frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle} = \frac{\xi_1^3}{3\mu_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{Gm_n}{(n+1)r_n} = \frac{GM}{(n+1)R} \frac{\xi_1}{\mu_1}.$$

Zależność 8 jest bardzo ważna i może być weryfikowana w oparciu o obserwacje astronomiczne. Odwracając problem, dla znanych M i R oraz n można obliczyć ρ_c i K .

Z równania (8) wynika, że dla $n = 3$ gwiazda o danej masie zachowując równowagę mechaniczną (hydrostatyczną), może przyjmować różne promienie. Oznacza to, że jej równowaga jest obojętna. Można pokazać, że w równowadze trwałe są kule gazowe dla $n < 3$. Przykładem jest Ziemia o wnętrzu złożonym z ciekłych metali, gdzie gęstość praktycznie nie zmienia się z ciśnieniem, co oznacza $n = 0$ w równaniu (1). Natomiast dla $n > 3$ gwiazda nie jest trwała: ulega albo rozproszeniu, albo kurczy się do momentu, w którym zmiana własności sprasowanego gazu spowoduje $n < 3$.

Używając równania (9), można także obliczyć temperaturę w centrum gwiazdy. Skorzystamy z równania stanu gazu doskonałego, zapisanego jako $P = kT\rho/\mu_g$, gdzie μ_g to masa cząsteczki gazu, a k to stała Boltzmanna. Jeśli m i V to masa i objętość gazu, to gęstość jest m/V , a stała liczba Avogadro N jest ilością cząsteczek w molu, to $N\mu_g$ jest masą mola; zatem liczba moli to $q = m/(N\mu_g)$ i stała gazowa jest równa $\mathcal{R} = kN$, to podstawiając, otrzymujemy $PV = qRT$, czyli zwykłą postać równania gazu. Wstawiając do (9), dostajemy

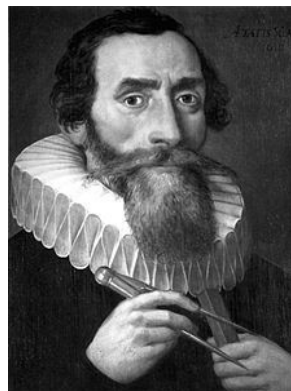
$$(10) \quad \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{kT_c}{\mu_g} = \frac{GM}{(n+1)R} \frac{\xi_1}{\mu_1}.$$

Dla Słońca w przybliżeniu można użyć $n = 3$, choć naprawdę n jest nieco mniejsze i zmienia się z promieniem. Wyjaśnienie, dlaczego tak się dzieje, to temat na inną opowieść: o porównaniu gwiazd zwykłych (takich jak Słońce) i „kwantowych”, czyli białych karłów.

Matematyka i jej historia. Nie tylko ciekawostki!

Drugie prawo Keplera i owale Newtona. Kontrowersje wokół Lematu XXVIII w *Principiach*

* Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Johannes Kepler (1571–1630)

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*, Mikołaj SIERŻĘGA*

Drugie prawo Keplera, mówiące o tym, że w równych odstępach czasu promień wodzący planety, poprowadzony od Słońca, zakreśla równe pola (patrz ilustracja na następnej stronie), było w dużym stopniu ignorowane w astronomii przednewtonowskiej. Na przykład w dziele *Astronomia Carolina*, z którego korzystał Newton, jest ono wyraźnie nieobecne. Wynikało to z jego niewielkiej przydatności do obliczeń położenia planet na ich orbitach. Załóżmy, że znamy okres T obiegu planety po orbicie eliptycznej. Promień wodzący planety zakreślił w tym czasie znane pole $S = \pi ab$, gdzie a i b są półosiąmi elipsy. Rozpoczynając wędrówkę po orbicie w danym punkcie Q , po czasie T jesteśmy znowu w Q . Położenie to jest funkcją czasu obiegu T , jak i pola S zakreślonego w tym czasie przez promień wodzący planety. Korzystając z drugiego prawa Keplera, możemy teraz znaleźć pole s sektora zakreślonego przez promień wodzący planety w dowolnym odcinku czasu o długości t . Wydawałoby się, że w tym ogólnym przypadku można także łatwo wyrazić i obliczyć położenie P planety na jej orbicie jako funkcję czasu t lub zakreślonego w czasie t pola s . Okazuje się, że tak nie jest.