O liczbie układów podwójnych czarnych dziur i gwiazd neutronowych

Michał BEJGER

Z obserwacji zespołów LIGO i Virgo, przez uchylone dopiero co okno „falowo-grawitacyjne” – w odróżnieniu od tradycyjnej astronomii korzystającej, z informacji pochodzących z okna elektromagnetycznego – wyłania się coraz wyraźniejszy obraz Wszechświata wypełnionego niewidzialnymi do tej pory układami podwójnymi czarnych dziur o różnych masach, układami podwójnymi gwiazd neutronowych, a także różnymi konfiguracjami układów mieszanych czarnej dziury i gwiazdy neutronowej.

Ponieważ nie możemy wpływać na zachowanie ciał niebieskich i obserwować tego, na co aktualnie mamy ochotę, astronomowie zadowalają się każdym, nawet niewielkim strzępkiem informacji. Astronomia jest więc sztuką rzetelnej i przede wszystkim cierpliwej obserwacji, która rozwija wyobraźnię podczas wyciągania statystycznie wiarygodnych wniosków na podstawie minimalnej informacji. Obserwator musi w szczególności mieć zaufanie do instrumentu, który ma do dyspozycji: znać jego czułość i słabe punkty. Na podstawie tego, co można zaobserwować, czasu i sposobu obserwacji oraz liczby zaobserwowanych zjawisk można wtedy wnioskować o cechach całej, nieobserwowalnej populacji zjawisk (oczywiście przy założeniu, że zaobserwowane zjawiska są próbkami z populacji, którą da się opisać funkcją rozkładu prawdopodobieństwa).

I tak, okazuje się, że detektory sieci LIGO–Virgo najczęściej „słyszą” drgania czasoprzestrzeni pochodzące z masywnych układów podwójnych czarnych dziur (już kilkadziesiąt takich przypadków), a tylko od czasu do czasu te wytwarzane przez układy podwójne gwiazd neutronowych (do tej pory opublikowano wyniki dotyczące dwóch takich przypadków, sygnałów GW170817 i GW190425). Stosunek liczby detekcji układów podwójnych czarnych dziur (CD) do układów gwiazd neutronowych (GN) to $\mathcal{D}_{\mathrm{CD}}/\mathcal{D}_{\mathrm{GN}} \simeq 10$.

Jednocześnie szacowana z teorii ewolucji gwiazd częstość występowania bardzo ciasnych układów czarnych dziur i gwiazd neutronowych prowadzących do emisji fal grawitacyjnych rejestrowanych przez LIGO i Virgo wynosi około 10–100 Gpc^{-3}/rok dla układów podwójnych czarnych dziur oraz $\simeq$1000 Gpc^{-3}/rok dla układów podwójnych gwiazd neutronowych. Jak to więc możliwe, że na jednostkę czasu rejestruje się więcej układów podwójnych czarnych dziur, ale częstość występowania ich zderzeń w standardowej objętości jest dużo mniejsza?

Załóżmy dla uproszczenia, że układy podwójne powstają podczas ewolucji zwykłych gwiazd (żargonowo „w polu gwiazdowym”); możliwe jest również dynamiczne tworzenie się układów podwójnych, gdy jeden obiekt znajdzie się tak blisko drugiego, że zostaną grawitacyjnie związane, jednak tego typu procesy są uważane za dużo mniej wydajne. Gwiazdy „pola” powstają w obszarach gwiazdotwórczych z pierwotnego gazu od razu w parach, po czym wspólnie ewoluują. Z obserwacji wynika, że większość gwiazd znajduje się w układach podwójnych lub wielokrotnych, a tempo ewolucji gwiazdy zależy od jej początkowej masy: im większa masa, tym szybsza ewolucja. Jednocześnie mało masywnych gwiazd jest dużo więcej niż bardzo masywnych. Liczba gwiazd o masie M w przedziale mas dM jest opisywana gęstością rozkładu prawdopodobieństwa. Dla kolejnego uproszczenia przyjmiemy pierwszą z brzegu (w istocie, historycznie pierwszą) *funkcję rozkładu mas początkowych* gwiazd $\xi(M)$, zaproponowaną w 1955 roku przez Edwina Salpetera:

Od czasu E. Salpetera badacze ewolucji gwiazd poczynili duże postępy w tej dziedzinie, i obecnie funkcja mas jest przedstawiana przez sumę funkcji potęgowych dla różnych przedziałów mas.

$$\xi(M)dM = \xi_0 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2{,}35} dM, \tag{1}$$

gdzie ξ_0 jest stałą związaną z lokalną gęstością gwiazd. Tempo powstawania gwiazd $\mathcal{N}(M)$ w danym przedziale mas w przeciętnej Galaktyce (na przykład takiej jak nasza) jest związane z funkcją rozkładu mas gwiazd,

$$\frac{d\mathcal{N}}{dM dt} = \xi(M)/\text{rok}, \quad \text{dla mas w przedziale} \quad 0{,}1M_\odot < M < 120M_\odot. \tag{2}$$

Gwiazdy na początku swej ewolucji na ciągu głównym (to znaczy wtedy, gdy „spalają” w jądrze wodór, produkując hel), których masa początkowa jest większa niż pewna krytyczna wartość (około $10M_\odot$), wybuchają w końcu jako supernowe, pozostawiając po sobie zwarte jądro: gwiazdę neutronową lub czarną dziurę. Na potrzeby dyskusji załóżmy, że gwiazdy o masach od 10 do $60M_\odot$ produkują gwiazdy neutronowe, a powyżej $60M_\odot$ wyłącznie czarne dziury. W rzeczywistości sytuacja jest bardziej skomplikowana, ponieważ tempo i efekty ewolucji zależą nie tylko od masy, ale również od początkowego

Rozwiązanie zadania M 1649.
Odpowiedź: Nie.

Z kolejnego zadania wynika, że karteczki można podzielić na dwa stosy o równych sumach zapisanych liczb. Wobec tego gdyby na karteczkach znajdowały się liczby od 1 do 10, to istniałby podział na stosy, każdy o sumie

$$\frac{1+2+\ldots+10}{2} = 27{,}5;$$

nie jest to możliwe, gdyż liczby na wszystkich karteczkach są całkowite.

składu gwiazdy (zawartości pierwiastków cięższych od helu, czyli żargonowo „metaliczności”), tempa rotacji gwiazdy, wpływu towarzysza w układzie podwójnym i innych czynników. Niemniej jednak, porównując liczbę gwiazd produkujących czarne dziury i gwiazdy neutronowe,

$$\text{(3)} \qquad \frac{\mathcal{N}(M > 60M_\odot)}{\mathcal{N}(M \in (10M_\odot, 60M_\odot))} \approx \frac{\mathcal{N}(M > 60M_\odot)}{\mathcal{N}(M > 10M_\odot)} = \left(\frac{60M_\odot}{10M_\odot}\right)^{-1{,}35} \approx 0{,}1,$$

dostajemy to, czego się spodziewaliśmy, to znaczy dużo mniejszą liczbę czarnych dziur w stosunku do liczby gwiazd neutronowych. Pomimo wielu różnic i złożoności procesu ewolucji stosunek częstości występowania układów podwójnych czarnych dziur $\mathcal{R}_{\mathrm{CD}}$ i układów podwójnych gwiazd neutronowych $\mathcal{R}_{\mathrm{GN}}$, które emitują fale grawitacyjne wykrywane przez LIGO i Virgo, w pierwszym przybliżeniu wynosi tyle samo, co stosunek liczb układów podwójnych czarnych dziur i gwiazd neutronowych:

$$\text{(4)} \qquad \frac{\mathcal{R}_{\mathrm{CD}}}{\mathcal{R}_{\mathrm{GN}}} = \left(\frac{60M_\odot}{10M_\odot}\right)^{-1{,}35} \approx 0{,}1.$$

Oczywiście szacowanie jest niedokładne, m.in. dlatego, że część układów może składać się z czarnej dziury i gwiazdy neutronowej, ale na nasze potrzeby „co do rzędu wielkości” jest wystarczające.

Do tej pory określaliśmy w przybliżeniu parametry całej populacji układów podwójnych, a teraz wykorzystamy je do porównania liczby rzeczywistych detekcji $\mathcal{D}_{\mathrm{CD}}$ i $\mathcal{D}_{\mathrm{GN}}$. Niezbędnym elementem układanki jest określenie, jakie czynniki wpływają na „głośność” sygnału fal grawitacyjnych, a więc możliwość detekcji.

Ciasne układy podwójne tuż przed połączeniem się składników opisywane są bardzo dobrze znanym z teorii wzorcem sygnału, tak zwanym „ćwierkiem” (zob. artykuł w Δ^3_{17}). Fala jest w danym momencie t rejestrowana przez detektor z amplitudą $h(t)$ i częstotliwością $f(t)$, $h(t) \propto \mathcal{M}^{5/3} f^{2/3}(t)/r$, gdzie $\mathcal{M} = (M_1M_2)^{3/5}/(M_1+M_2)^{1/5}$ oznacza *masę ćwierku* (*ćwierkową*).

Manipulując wzorami z Δ^3_{17}, można otrzymać zależność pomiędzy f i t:

$$\pi\mathcal{M}f(t) = \left(\frac{5\mathcal{M}}{256(t_*-t)}\right)^{3/8},$$

gdzie t_* jest momentem zderzenia się składników.

Amplituda fali $h(t)$ rejestrowana w momencie t w detektorze jest praktycznie zawsze mniejsza od amplitudy szumu danych (sygnały są „schowane” w szumie detektora), więc by dokonać detekcji, sygnał jest zbierany przez N cykli fali. W praktyce korzysta się z metody *filtru dopasowanego*, to znaczy koreluje się dane z bankiem filtrów (modeli) sygnału, po czym wybiera najlepiej dopasowany, to znaczy taki z najwyższym *stosunkiem sygnał–szum* ρ. Innymi słowy, detektor gromadzi w czasie N cykli moc sygnału ewoluującego w częstotliwości f, z odpowiednią fazą opisaną modelem sygnału. Liczba cykli $N \simeq f^2/(df/dt)$, czyli wymiarowo $N \simeq ft$. Na potrzeby naszego przybliżenia zdefiniujemy charakterystyczną amplitudę h_c proporcjonalną do stosunku sygnał–szum ρ: energia to kwadrat amplitudy, czyli $h_c^2 \sim Nh^2$, zatem $\rho \propto h_c \sim \sqrt{N}h$. Z zależności $h(t)$ i $f(t)$ (patrz margines) wynika, że $t \propto f^{-8/3}\mathcal{M}^{-5/3}$, co oznacza

$$\text{(5)} \qquad \rho \propto \sqrt{N}\cdot h \propto \sqrt{ft}\cdot h \propto \sqrt{f\cdot f^{-8/3}\mathcal{M}^{-5/3}}\cdot f^{2/3}\mathcal{M}^{5/3} \propto f^{-1/6}\mathcal{M}^{5/6},$$

z czego istotna jest dla nas zależność $\rho \propto \mathcal{M}^{5/6}$. Stosunek sygnał–szum jest, tak jak amplituda sygnału, odwrotnie proporcjonalny do odległości do źródła. Zakładając minimalny ρ, przy którym da się stwierdzić detekcję, definiujemy w ten sposób maksymalną odległość r, czyli maksymalną objętość r^3 (zaniedbując efekty kosmologiczne i zakładając, że w dobrym przybliżeniu źródła są rozłożone równomiernie w przestrzeni). Ostatecznie do porównania liczby detekcji wchodzi $\rho^3 \propto \mathcal{M}^{5/2}$. Stosunek liczby detekcji układów podwójnych czarnych dziur i układów gwiazd neutronowych – przyjmując, że przeciętna masa czarnej dziury to $10M_\odot$, a gwiazdy neutronowej to $1{,}5M_\odot$ – jest więc następujący:

Stosunek sygnał–szum jest proporcjonalny do amplitudy sygnału zgodnie z następującą definicją:

$$\rho^2 = \langle h, h\rangle \equiv 4\int_0^\infty \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)}\,df,$$

gdzie $\tilde{h}(f)$ oznacza transformatę Fouriera $h(t)$. Precyzyjniej, ρ reprezentuje zsumowaną moc sygnału ważoną widmową (spektralną) gęstością mocy danych $S_n(f)$.

$$\text{(6)} \qquad \frac{\mathcal{D}_{\mathrm{CD}}}{\mathcal{D}_{\mathrm{GN}}} = \frac{\mathcal{R}_{\mathrm{CD}}}{\mathcal{R}_{\mathrm{GN}}}\left(\frac{\mathcal{M}_{\mathrm{CD}}}{\mathcal{M}_{\mathrm{GN}}}\right)^{5/2} = \left(\frac{60M_\odot}{10M_\odot}\right)^{-1{,}35}\left(\frac{10M_\odot}{1{,}5M_\odot}\right)^{5/2} \simeq 11.$$

Mimo że układów podwójnych czarnych dziur jest we Wszechświecie mniej, sygnały przez nie emitowane są silniejsze niż układów podwójnych gwiazd neutronowych (z powodu dużo większej masy ćwierku $\mathcal{M}$), a zatem są „słyszalne” z dużo większej objętości i dlatego dominują w katalogach detekcji LIGO i Virgo.