wyżej, jest ona spełniona dla parzystych $n \leqslant 12$ i wszystkich wykładników $0 < \alpha \leqslant 1$, gdyż dla parzystych n mamy $\frac{n}{2} = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Dla $n = 3$ oraz $0 < \alpha < \log_2 \frac{3}{2} \approx 0{,}58496$ i dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c prawdziwa jest nierówność $\left(\frac{a}{b+c}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c+a}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a+b}\right)^\alpha > 2$. Jest to udowodnione w [3]. Zatem $S(3, \alpha) = 2$ dla $0 < \alpha \leqslant \log_2 \frac{3}{2}$. Oczywiście dla $\alpha > \log_2 \frac{3}{2}$ jest $S(3, \alpha) < 2$, co widać na przykładzie liczb $a = b = c = 1$. Dla $n = 3$ oraz dla parzystych liczb $n \leqslant 12$ wszystko jest więc jasne.

Na podstawie udowodnionej wyżej nierówności $S(n, \alpha) \geqslant S(n, 1)$ dla $0 < \alpha < 1$ oraz tego, co wiadomo z rozwiązania problemu Shapiro, otrzymujemy, że $S(n, \alpha) \geqslant \frac{n}{2}$ dla liczb nieparzystych $n \leqslant 23$ oraz $S(n, \alpha) \geqslant Dn$ dla pozostałych wartości n.

Kierując się wyłącznie intuicją, postawiłem hipotezę, że $S(n, \alpha) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ dla wszystkich n oraz $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Nie potrafię tego dowieść dla żadnej liczby n poza wskazanymi powyżej (czyli dla $n = 3$ oraz parzystych $n \leqslant 12$). O sytuacji dla pozostałych wartości n mogę powiedzieć bardzo niewiele. Jedynie dla $n = 5$ (najmniejsza niezbadana wartość n) udało mi się pokazać, że $S(5, \alpha) = 3$ dla $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{5}$, co stanowi pełne rozwiązanie zadania 766. Dowód udostępniony jest na stronie *Delty*. Będę bardzo wdzięczny za wszelkie uwagi lub związane wyniki. Na przykład dowody nierówności postaci $S(n, \alpha) > M > \frac{n}{2}$ dla nieparzystych n i możliwie dużych α (najlepiej $\alpha > \frac{1}{2}$) lub ewentualne kontrprzykłady do uczynionych wyżej hipotez. Zapraszam do kontaktu poprzez zamieszczony na początku artykułu adres poczty elektronicznej, a także do dyskusji w komentarzach do tego artykułu na stronie *Delty*. Według mojej wiedzy w literaturze ani w sieci nie ma aktualnie żadnych innych tego rodzaju wyników. Uzyskanie takowych może więc być cenne, w szczególności dla osób zainteresowanych Konkursem Prac Uczniowskich z Matematyki im. Pawła Domańskiego.

Literatura:

[1] Kourliandtchik, L. (2002). *Słynne nierówności*, Wydawnictwo Aksjomat.

[2] „Shapiro inequality” Wikipedia, The Free Encyclopedia, dostęp 7 sierpnia 2019 r.

[3] Hung, P. K. (2008). *Secrets in Inequalities* vol. 2 – „Advanced Inequalities”, Gil Publishing House, darmowy rozdział dostępny na stronie wydawcy.

[4] Diananda, P. H. (1973). *Some cyclic and other inequalities. III*, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 73, part 1, 69–71.

[5] Diananda, P. H. (1974). *Some cyclic and other inequalities. IV*, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 76, part 1, 183–186.

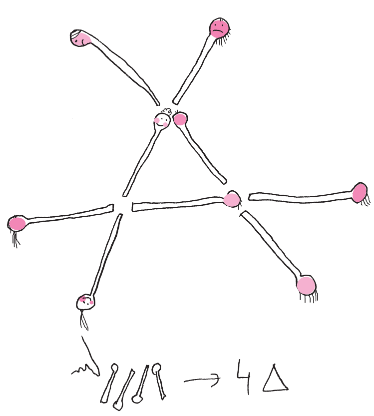
Spadek swobodny z księżycowej orbity

*Andrzej SOŁTAN**

* CAMK PAN, Przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Astronomicznej

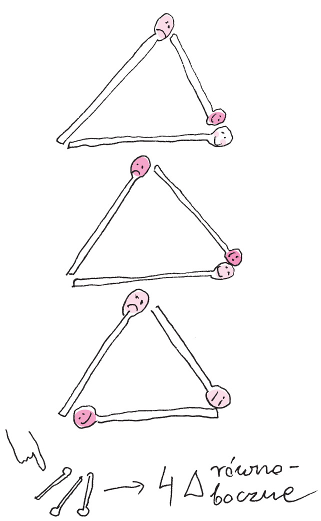
Siła grawitacji sprawia, że jakikolwiek upuszczony przedmiot spada ruchem jednostajnie przyspieszonym. Wartość przyspieszenia ziemskiego znamy na pamięć. Można więc obliczyć położenie ciała i jego prędkość w dowolnej chwili. Również czas spadania wyznaczymy natychmiast, jeżeli tylko znamy wysokość początkową. Trudno o mniej wymagające zadanie z dynamiki.

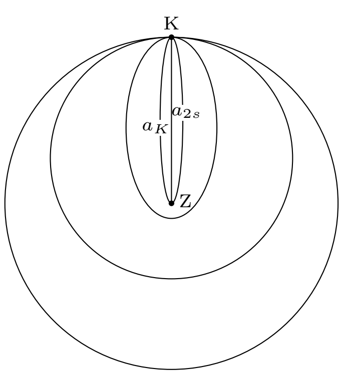
Rachunki się komplikują, gdy ciało spada z dużej wysokości. Tak dużej, że nie możemy już przyjąć, iż przyspieszenie ziemskie jest stałe. Na przykład z wysokości orbity Księżyca. Ponieważ przyspieszenie grawitacyjne maleje z kwadratem odległości, 384 750 km od Ziemi (średnia odległość Księżyca od środka Ziemi) natężenie pola grawitacyjnego Ziemi jest około 3600 razy słabsze niż w pobliżu jej powierzchni. Wiedział to już Izaak Newton, co znacząco pomogło mu sformułować prawo powszechnej grawitacji.



Jak długo zatem będzie trwał spadek swobodny w centralnym polu grawitacyjnym Ziemi z wysokości orbity Księżyca? Promień orbity Księżyca jest 60 razy większy od promienia Ziemi. Wobec takiej różnicy wielkości, dla uproszczenia, pomińmy w rachunkach rozmiar Ziemi. Dokładnie tak brzmiało

Rozwiązanie zadania M 1629.
Każde z $2(m+n)-4$ pól szachownicy przylegających do jej brzegu nazwijmy *brzegowym*. Zauważmy, że każda wieża, która sama nie znajduje się na polu brzegowym, atakuje dokładnie jedno *puste* (czyli niezajęte przez inną wieżę) pole brzegowe. Wobec tego łączna liczba wież jest nie większa od liczby pól brzegowych. Z drugiej strony, ustawiając wieże na wszystkich polach brzegowych, uzyskujemy konfigurację, która spełnia warunki zadania.





jedno z zadań LX Olimpiady Astronomicznej. W każdym punkcie pionowej trajektorii znamy przyspieszenie ruchu, które jest przecież drugą pochodną położenia. Wystarczy zatem dwa razy scałkować... Niestety, nie jest to dobry pomysł na szybkie rachunki. Skoro jednak problem trafił do szkolnej olimpiady, musi być lepszy sposób rozwiązania.

Dzięki Keplerowi zadanie jest niemal trywialne. Jego III prawo mówi bowiem, że stosunek sześcianu wielkiej półosi orbity a do kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca T jest jednakowy dla wszystkich planet: $a^3/T^2 = \text{const}$. Newton wykazał, że ta prosta reguła wynika z prawa powszechnego ciążenia i stosuje się do wszelkich orbit zamkniętych wokół ciała centralnego:
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2},$$
gdzie M i m to masy obiegających się ciał, a G jest stałą grawitacji. Dla orbity kołowej prawo to można łatwo wyprowadzić z zasad dynamiki Newtona i – oczywiście – prawa powszechnego ciążenia. Półoś a sprowadza się w tym przypadku do promienia wodzącego łączącego oba ciała. Wzór powyższy pozostaje słuszny również dla orbit eliptycznych, ale jego wyprowadzenie jest nieco bardziej skomplikowane.

Suma mas obu ciał, $M+m$, w liczniku po prawej stronie w przypadku Słońca i planety nie jest oczywiście stała, gdyż masy planet różnią się bardzo, ale wszystkie są znacznie mniejsze od masy Słońca i z dobrym przybliżeniem masę m planety można w powyższym wzorze pominąć. Jowisz jest wprawdzie 318 razy masywniejszy od Ziemi, a blisko 6000 razy od Merkurego, ale stanowi mniej niż jedną tysięczną masy Słońca. Tak więc III prawo jest spełnione dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym z dokładnością do jednego promila.

Zastosujemy teraz to prawo do układów „Ziemia–Księżyc" i „Ziemia–ciało próbne", ale zanim „upuścimy" ciało próbne na Ziemię z orbity Księżyca, umieścimy je najpierw dokładnie na kołowej (w przybliżeniu) księżycowej orbicie wokół Ziemi:
$$\frac{a_K^3}{T_K^2} = \frac{G(M_Z+m_K)}{4\pi^2}, \qquad \frac{a_K^3}{T_p^2} = \frac{GM_Z}{4\pi^2}.$$
Teraz a_K jest półosią wielką orbity Księżyca i ciała próbnego, M_Z i m_K – masami Ziemi i Księżyca i odpowiednio T_K i T_p okresami obiegu Księżyca i ciała próbnego. Nie pominęliśmy masy Księżyca, gdyż nie jest ona znikoma w porównaniu z masą Ziemi: $M_Z = 81{,}3\,M_K$. W efekcie ciało próbne będzie poruszać się nieco wolniej niż Księżyc i $T_p \approx 1{,}006T_K$. Jeżeli umieścimy ciało próbne w odległości Księżyca od Ziemi, ale nadamy mu prędkość orbitalną mniejszą niż niezbędna, by utrzymało się na orbicie kołowej, to będzie się ono poruszało po orbicie eliptycznej. Im mniejsza będzie ta prędkość, tym elipsa orbity będzie bardziej spłaszczona. Przy pewnej prędkości ciało próbne uderzy w Ziemię. W naszym zadaniu tak się jednak nie stanie, gdyż pomijamy rozmiar Ziemi, czyli przyjmujemy, że ma dowolnie mały promień. W miarę dalszego zmniejszania prędkości początkowej w apogeum, to jest w punkcie najbardziej oddalonym od Ziemi, orbita ciała próbnego staje się coraz bardziej „smukła" i zbliża się do odcinka o długości a_K. Półoś orbity a_s w tak „zdegenerowanym" przypadku jest wobec tego dwa razy mniejsza: $a_s = a_K/2$, a okres orbitalny T_p jest równy podwojonemu czasowi spadku T_s, którego szukamy: $T_p = 2T_s$:
$$\frac{(a_K/2)^3}{(2T_s)^2} = \frac{GM_Z}{4\pi^2}.$$
Porównując odpowiednie wzory, otrzymujemy $T_s = T_p/\sqrt{32} \approx 0{,}1778T_K$. W tablicach astronomicznych znajdujemy długość miesiąca syderycznego, czyli okres obiegu Księżyca wokół Ziemi $T_K = 27{,}322$ dni, i ostatecznie otrzymujemy $T_s = 4{,}858$ dni $= 116{,}6$ godzin. Jest to około 1,6 razy dłużej niż czas podróży powrotnej z Księżyca astronautów programu Apollo.

Czytelnikowi pozostawiam obliczenie, ile minut wcześniej ciało próbne zderzy się z Ziemią, gdy nie pominiemy jej rozmiarów.