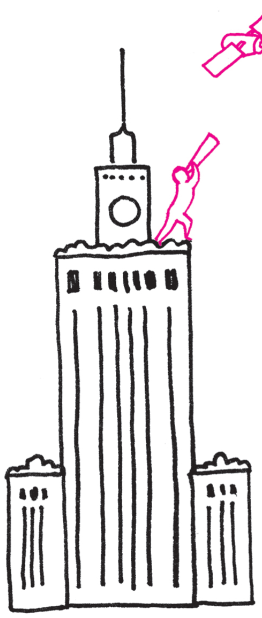
O obrotach... wektorów i satelitów

Aleksander SCHWARZENBERG-CZERNY[*]



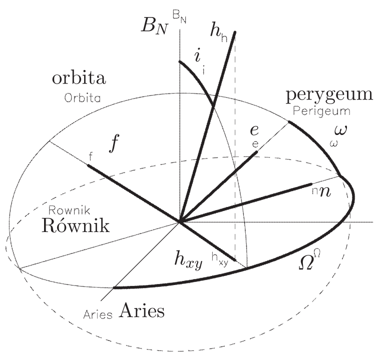
Czas i obroty układu współrzędnych. Pierwszy polski satelita naukowy BRITE-Lem wystartował 21 listopada 2013 roku o godzinie $t_{\mathrm{GI}} = 8^{\mathrm{h}}10^{\mathrm{m}}11^{\mathrm{s}}$ czasu polskiego (CSE = UTC + 1h) z bazy Jasny w Rosji a na orbicie znalazł się 956 s później, w chwili, którą oznaczymy t_0. Operator rakiety „Dniepr”, rosyjsko-ukraińsko-kazachska korporacja Kosmotras, podała przewidywane współrzędne satelity w chwili t_0, w *nierotującym* względem gwiazd układzie kartezjańskim ze środkiem w centrum Ziemi. Oś z tego układu współrzędnych jest skierowana ku biegunowi północnemu, natomiast osie x i y są skierowane w ten sposób, że w chwili startu (t_{GI}) Greenwich leżało w płaszczyźnie xz. W takim układzie współrzędnych pracują urządzenia nawigacyjne rakiety, włączane w chwili startu t_{GI}. Współrzędne satelity w chwili wejścia na orbitę t_0 w tym układzie to $\mathbf{r} = (4429984, 5371299, 460860)$ m i prędkość $\mathbf{v} = (1097{,}441, -295{,}718, -7556{,}327)$ m/s. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, czy i w jakim kierunku satelita mógł być widziany o godzinie $t_W = 9^{\mathrm{h}}50^{\mathrm{m}}$ CSE tego dnia ze zlokalizowanego w Warszawie punktu o współrzędnych kartezjańskich $\mathbf{r}_W = (3654522, 1407838, 5017412)$ w układzie *rotującym* z Ziemią, w którym Greenwich zawsze leży w płaszczyźnie xz.

Od razu zastrzegę, że by uprościć wywody, zaniedbamy wpływ spłaszczenia Ziemi i oporu resztek atmosfery na ruch satelity i skorzystamy z równań opisujących ruch satelity po elipsie keplerowskiej wokół obiektu o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy (który może być równoważnie zastąpiony masą punktową). Główna konsekwencja zaniedbanych efektów to powolna (około stopień na dzień) precesja orbity, o niewielkim wpływie na szukaną odpowiedź.

Z określenia układów wynika, że w momencie t_{GI} w układzie rakiety Warszawa miała położenie $\mathbf{r}_W$, ale potem w czasie $\Delta t = t_0 - t_{\mathrm{GI}}$ obróciła się wraz z Ziemią o kąt $\Delta\alpha = (366{,}2422/365{,}2422)(2\pi/24)\Delta t$. Licząc kąt obrotu, zamieniliśmy jednostki czasu na radiany i uwzględniliśmy, że dni liczymy względem obracającego się kierunku Ziemia-Słońce, czyli w ciągu roku Ziemia wykonuje o jeden obrót więcej niż liczba dni. Przy tym obrocie współrzędna z_W pozostaje bez zmiany, a współrzędne $x_W + iy_W$ przekształcają się w następujący sposób:

$$(x_W + iy_W)\big|_{t=t_{\mathrm{GI}}} = (x_W + iy_W)\big|_{t=t_0} \cdot \mathrm{e}^{i\Delta\alpha}.$$

Znaleźliśmy zatem przedstawienia wszystkich wektorów w nierotującym układzie GI. Astronomowie zwykle używają nierotującego układu, w którym punkt Barana Υ, czyli przecięcie ekliptyki z równikiem, wyznacza oś x, ale to temat na inną okazję.



Elementy keplerowskie orbity. W artykule o prawach Keplera (*Delta* 5/2011) pokazaliśmy, jak z nich wyprowadzić drugie prawo dynamiki Newtona. Przy okazji zdobyliśmy wiedzę, która pozwoli nam opisać orbitę satelity.

Choć na razie nie znamy położenia orbity, to zaczniemy przekształcenia w układzie ze środkiem w centrum Ziemi, w którym oś x wskazuje perygeum, a oś y też leży w płaszczyźnie orbity. Obliczymy analitycznie rozmaite iloczyny wektorów $\mathbf{r}, \mathbf{v}$, by na podstawie wyników zrozumieć ich związek z elementami orbity. Na końcu wrócimy do znanego nam układu GI i wykonamy te same obliczenia liczbowo, i korzystając z tego, że te iloczyny mają to samo znaczenie w każdym układzie, znajdziemy wartości elementów orbity. Jak to wyprowadziliśmy poprzednio, chwilowe położenie i prędkość na orbicie można wyrazić poprzez kąt zwany *anomalią mimośrodową* E:

(1) $$\mathbf{r} \equiv (x, y, 0) = a(\cos E - e, \sqrt{1-e^2}\sin E, 0) \quad \text{(I prawo Keplera)},$$

(2) $$\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} = (v_x, v_y, 0) = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\,\frac{1}{1 - e\cos E}(-\sin E, \sqrt{1-e^2}\cos E, 0).$$

Aktualną wartość E w chwili t znajdujemy jako rozwiązanie równania Keplera:

(3) $$N(t-\tau) \equiv M = E - e\sin E \quad \text{(II prawo Keplera)},$$

[*]Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika w Warszawie

Rozwiązanie zadania F 866.
Energia potencjalna kulki dla maksymalnego wychylenia w lewo wynosi $U_L = 2mgl\sin^2(\beta/2)$, a w prawo $U_P = 2mgl\sin^2(\alpha/2)$. Dla małych kątów α i β mamy: $U_L = mgl\beta^2/2$ i $U_P = mgl\alpha^2/2$. Po pierwszym uderzeniu w powierzchnię kulka będzie miała energię kinetyczną $U_1 = Kmgl(\beta^2 - \alpha^2)/2$ i wychyli się o kąt β_1, odpowiadający sumie tej energii kinetycznej i energii potencjalnej odpowiadającej wychyleniu o kąt α, czyli $\beta_1^2 = K\beta_0^2 + (1-K)\alpha^2$. Powtarzając to rozumowanie dla kolejnych uderzeń, dostajemy ogólne wyrażenie na wartość kąta po n-tym uderzeniu: $\beta_n = \sqrt{K^n\beta_0^2 + (1-K^n)\alpha^2}$. Zauważmy, że $\beta_n \to \alpha$ dla $n \to \infty$, chyba że $K = 1$ (zderzenie sprężyste), kiedy to $\beta_n = \beta_0$ dla dowolnego n.

gdzie τ jest *czasem przejścia przez perigeum*, a

$$N = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad \text{(III prawo Keplera)}$$

zwane *ruchem średnim* w istocie jest uśrednioną prędkością kątową satelity, natomiast a i e oznaczają odpowiednio *półoś wielką* orbity (połowę odległości między perigeum i apogeum) oraz *mimośród* (spłaszczenie) orbity. Dla skrócenia zapisu wprowadziliśmy $\mu = \mathrm{G}M_{♁} = 398600{,}4418 \cdot 10^9\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$ zamiast iloczynu stałej grawitacji i masy Ziemi.

Chociaż obliczenia prowadzimy w układzie płaszczyzny orbity, to będziemy korzystać wyłącznie z iloczynów wektorów, aby wynik przedstawić w postaci niezależnej od wyboru układu współrzędnych. Kwadraty długości wektorów mamy z twierdzenia Pitagorasa lub z iloczynu skalarnego wektora przez siebie, co na jedno wychodzi:

$$(4) \qquad r^2 \equiv |\mathbf{r}|^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = a^2(1-e\cos E)^2 \;\Rightarrow\; e\cos E = 1 - \frac{r}{a},$$

$$(5) \qquad v^2 \equiv |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{\mu}{a}\,\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E} = \frac{\mu}{r}\left(2 - \frac{r}{a}\right),$$

gdzie ostatnia równość wynika z podstawienia (4) do (5). Z ostatniego wzoru wynika, że energia całkowita $\mathcal{E} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$ jest stała, jak należało oczekiwać, oraz:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}.$$

Mając półoś a orbity, spłaszczenie orbity znajdziemy z pomocą iloczynu skalarnego (1) przez (2):

$$(6) \qquad d \equiv \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{\mu a}} = \frac{-(\cos E - e)\sin E + (1-e^2)\sin E\cos E}{1-e\cos E} = e\sin E.$$

Korzystając z (4) oraz (6), mamy

$$e^2 = \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 + d^2, \qquad \operatorname{tg} E = \frac{d}{1-\frac{r}{a}}.$$

Tak znalezione e i E po podstawieniu do (3) dają M oraz czas τ. Ćwiartkę, do której należy kąt E (i podobnie dla innych kątów), określamy na podstawie znaków funkcji sin i cos, natomiast wartość samego kąta wyznaczymy za pomocą funkcji arc tg.

Gdy a, e i τ są znane, to pozostaje wyznaczyć trzy elementy określające orientację orbity w przestrzeni. Dwa z nich to kąty i oraz Ω wskazujące kierunek wektora *momentu pędu* $\mathbf{h}$ w układzie współrzędnych, w którym oś z pokrywa się z osią obrotu Ziemi. Moment pędu jest proporcjonalny do iloczynu wektorowego $\mathbf{r}$ i $\mathbf{v}$, który w układzie współrzędnych o osiach x, y leżących w płaszczyźnie orbity ma postać:

$$(7) \qquad \mathbf{h} \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{v} = (0, 0, h_z), \qquad \text{gdzie}$$

$$h_z = \frac{\sqrt{a\mu(1-e^2)}}{1-e\cos E}\left[(\cos E - e)\cos E + \sin^2 E\right] = \sqrt{a\mu(1-e^2)}.$$

Zasada zachowania pędu zapewnia, że $\mathbf{h}$ w nieobracającym się układzie jest stałe. Znajdziemy teraz współrzędne wektora $\mathbf{h}$ w układzie współrzędnych, którego oś z pokrywa się z osią obrotu Ziemi. W tym układzie współrzędnych, składowa tego wektora w płaszczyźnie xy to $\mathbf{h}_{xy} = (h_x, h_y, 0)$. Nachylenie i wektora $\mathbf{h}$ do osi z oraz nachylenie $\Omega - \pi/2$ wektora $\mathbf{h}_{xy}$ do osi x wynikają ze stosunku ich składowych:

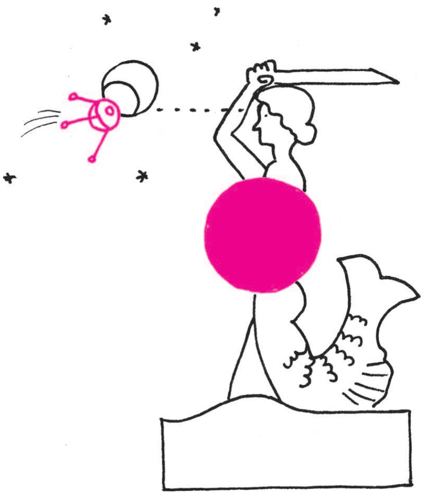
$$\operatorname{tg} i = \frac{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}{h_z},$$

$$\operatorname{tg}\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{h_y}{h_x} \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\Omega = \frac{+h_x}{-h_y}.$$

Sam kąt Ω to kąt w płaszczyźnie xy między osią x a prostopadłym do $\mathbf{h}_{xy}$ wektorem

$$\mathbf{n} = (0,0,1)\times\mathbf{h} = (-h_y, h_x, 0)$$

wskazującym *linię węzłów*, tj. linię przecięcia orbity z płaszczyzną xy.



Rozwiązanie zadania M 1437.
Odp. Nie!

Rozważmy macierz 5×9 zawierającą 44 jedynki i zero. Szukana podmacierz musiałaby zawierać 22 jedynki, a więc mieć 23 lub 22 wyrazy. W takim razie musiałaby mieć wymiary 1×23 lub 23×1, 1×22 lub 22×1, 2×11 lub 11×2, co nie jest możliwe.

Powróćmy do układu płaszczyzny orbity. Zanim wyznaczymy położenie perigeum, znajdźmy pomocniczy wektor, mnożąc wektorowo (2) oraz (7):

$$\mathbf{v}\times\mathbf{h} = \sqrt{\mu(1-e^2)}(1-e\cos E)^{-1}(\sqrt{1-e^2}\cos E, \sin E, 0).$$

Następnie odejmując (1) podzielone przez (4), otrzymujemy

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} = (e, 0, 0).$$

Tak zdefiniowany wektor *mimośrodowy* ma długość e i wskazuje kierunek perigeum. Wektory $\mathbf{h}$ i $\mathbf{e}$ całkowicie określają orientację orbity. Prostopadły do $\mathbf{e}$ wektor

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{h}\times\mathbf{e} = (0, h_z e, 0)$$

też leży w płaszczyźnie orbity. Zatem iloczyny skalarne $\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}$ i $\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}$ są proporcjonalne do sinusa i kosinusa kąta ω, jaki kierunek perihelium tworzy z linią węzłów, skąd:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}}\,\frac{e}{f}.$$

Kąty *nachylenie* i, *argument perigeum* ω i *długość linii węzłów* Ω w pełni określają położenie orbity. Ponieważ wszystkie elementy określiliśmy za pomocą iloczynów wektorów, to wzory pozostają słuszne po dowolnym obrocie orbity, zmienią się tylko składowe wektorów, ale nie ich długości i kąty między nimi. Zatem do powyższych iloczynów wektorowych można teraz podstawić znane wektory w układzie GI, by otrzymać elementy orbity i wektory pomocnicze w tym właśnie układzie.

Widoczność w Warszawie. Teraz możemy opisać sposób znalezienia odpowiedzi na pytanie postawione na samym początku. Dla nowego momentu czasu t_W należy obliczyć M, następnie rozwiązać (3) na E i znaleźć $\mathbf{r}$ w płaszczyźnie orbity z (1). Wtedy w układzie GI położenie będzie równe $\mathbf{r}_{\mathrm{GI}} = x\frac{\mathbf{e}}{e} + y\frac{\mathbf{f}}{f}$, gdzie wektory $\mathbf{e}$ i $\mathbf{f}$ określają kierunki dużej i małej osi orbity. Dalej, oznaczając położenie Warszawy przez $\mathbf{r}_W$, możemy wyrazić wektor wodzący z Warszawy do satelity jako $\mathbf{R} = \mathbf{r}_{\mathrm{GI}} - \mathbf{r}_W$, a kosinus kąta między zenitem a satelitą, pomijając spłaszczenie Ziemi, wynosi:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_W}{R\, r_W}.$$

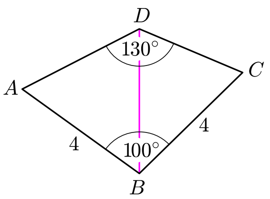
Dokończenie rachunków i znalezienie ostatecznej odpowiedzi na postawione na początku artykułu pytanie pozostawiamy Czytelnikowi.

Zainteresowani Czytelnicy mogą także wykonać obliczenia dla swojego położenia i w dowolnej chwili, korzystając z danych TLE BRITE-PL Lem publikowanych przez NORAD. Są one podane w nierotującym układzie względem punktu ♈ w płaszczyźnie xz (rektascencja i deklinacja). Pozycję ♈ określa się na podstawie zliczenia dni juliańskich (JD) dla danej daty i obrotu Ziemi względem ♈, tj. czasu gwiazdowego w Greenwich. Przy tym na podstawie czasu, jaki upłynął od epoki TLE, warto uwzględnić precesję Ω, biorąc pod uwagę jej szybkość podaną w TLE jako $\dot{\Omega}$.

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1435. $ABCD$ jest czworokątem wypukłym, w którym $AB = BC = 4$, $\sphericalangle ABC = 100°$, $\sphericalangle CDA = 130°$ (rys. 1). Znaleźć długość odcinka BD.
Rozwiązanie na str. 8



Rys. 1

M 1436. Niech liczby a, b, c z przedziału $[-1, 1]$ spełniają

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 1 + 2abc.$$

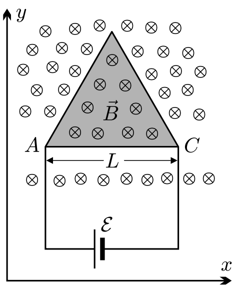
Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$,

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \leqslant 1 + 2(abc)^n.$$

Rozwiązanie na str. 16

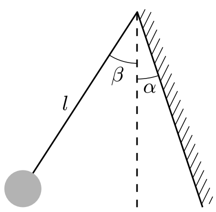
M 1437. Czy dla każdej macierzy $m \times n$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$ zawierającej parzystą liczbę jedynek istnieje podmacierz (otrzymana z wyjściowej macierzy przez wykreślenie pewnej liczby wierszy i pewnej liczby kolumn, niekoniecznie kolejnych), zawierająca dokładnie połowę wszystkich jedynek?
Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Michał NAWROCKI



Rys. 2

F 865. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B umieszczono cienką metalową płytkę, mającą kształt trójkąta równobocznego o boku L. Grubość płytki wynosi d, jej gęstość jest równa ρ, a jej powierzchnia jest prostopadła do kierunku pola magnetycznego. Do wierzchołków A i C trójkąta (rys. 2) dołączono źródło napięcia o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ i oporności wewnętrznej R_0. Znaleźć przyspieszenie płytki. Zaniedbać masę, oporność i sprężystość łączących przewodów oraz oporność płytki.
Rozwiązanie na str. 3



Rys. 3

F 866. Na powierzchni nachylonej do pionu pod małym kątem α zawieszono na nierozciągliwej, nieważkiej nici o długości l kulkę o masie m. Kulkę wychylono w lewo o mały kąt β_0 większy od α (rys. 3) i puszczono. Właściwości sprężyste kulki i powierzchni są takie, że stosunek energii kinetycznej kulki bezpośrednio po zderzeniu do jej energii kinetycznej bezpośrednio przed zderzeniem wynosi K $(0 < K < 1)$. Jaki będzie maksymalny kąt dla kolejnych wychyleń kulki w lewo?
Rozwiązanie na str. 19