Wyznaczanie wysokości wzgórz na powierzchni Księżyca

Andrzej BRANICKI[*]

Cienie widoczne na tarczy Księżyca są cennym źródłem informacji o ukształtowaniu jego powierzchni. Widoczna z Ziemi długość cienia dowolnego wzniesienia zależy od fazy Księżyca. Największa jest wtedy, gdy w pobliżu nierówności, rzucającej cień, przebiega linia terminatora. Najbardziej „chropowaty” Księżyc zobaczymy wtedy, gdy jasna jest połowa tarczy, natomiast w czasie pełni jego powierzchnia wydaje się zupełnie płaska. Pomiar kątowej długości cienia umożliwia wyznaczanie wysokości wzniesienia względem powierzchni, na którą ów cień pada. Pomiarów możemy dokonywać na podstawie bezpośrednich obserwacji wizualnych oraz zdjęć Księżyca wykonanych samodzielnie lub dostępnych w Internecie.

Terminator to granica między oświetloną i nieoświetloną częścią Księżyca lub planety. Płaszczyzna terminatora jest prostopadła do kierunku Księżyc–Słońce.

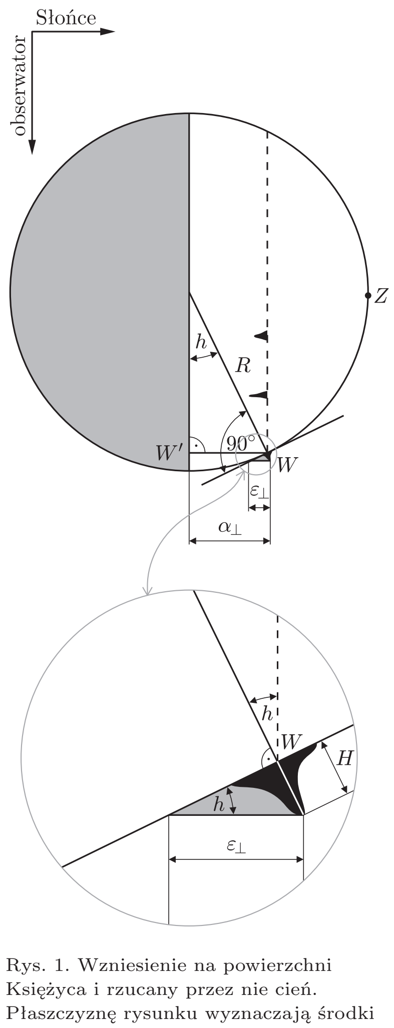
Zdjęcia Księżyca można znaleźć na przykład na stronie `http://legault.perso.sfr.fr/quarters.html` lub `http://www.astrosurf.com/cidadao/moon.htm`.

Zadanie postawione w tytule jest bardzo łatwe do rozwiązania w przypadku, gdy widzimy dokładnie połowę tarczy Księżyca (rys. 1). Załóżmy, że wzniesienie **W** leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez środki Słońca i Księżyca oraz położenie ziemskiego obserwatora. Z trójkąta, w którym jedną z przyprostokątnych jest wysokość wzgórza H (patrz: powiększony szczegół po prawej stronie rysunku 1), wynika, że

$$H = r\varepsilon_{\perp} \sin h, \tag{1}$$

gdzie r oznacza odległość Ziemia–Księżyc, $\varepsilon_{\perp}$ – obserwowaną kątową długość cienia wzniesienia, zaś h – kątową wysokość Słońca ponad horyzontem w miejscu, w którym położone jest wzniesienie. Symbole opatrzone „$\perp$” dotyczą chwili, gdy patrzymy na Księżyc prostopadle do kierunku Księżyc–Słońce (gdy Księżyc jest w pierwszej lub ostatniej kwadrze). Gdy r oznacza odległość Ziemia–Księżyc, R – promień Księżyca (w dalszych rozważaniach jego wartość przyjmiemy za daną) i δ – kątowy promień jego tarczy, mamy $r = R/\delta$. Wobec tego zależność (1) można zapisać w postaci:

$$H = R\frac{\varepsilon_{\perp}}{\delta}\sin h.$$



Rys. 1. Wzniesienie na powierzchni Księżyca i rzucany przez nie cień. Płaszczyznę rysunku wyznaczają środki Słońca i Księżyca oraz położenie ziemskiego obserwatora. Wszystkie wzniesienia **W**, leżące na okręgu, którego płaszczyzna jest równoległa do płaszczyzny terminatora (na rysunku jest to linia przerywana), są oświetlane przez Słońce pod tym samym kątem ($h = \text{const}$).

W omawianym przypadku wysokość Słońca ponad horyzontem h w miejscu, w którym znajduje się wzniesienie, jest łatwa do wyznaczenia. Jest ona równa kątowi między płaszczyzną terminatora a prostą łączącą środek Księżyca i wzniesienie. Skoro tak, to

$$\sin h = \frac{|WW'|}{R} = \frac{r\alpha_{\perp}}{R} = \frac{\alpha_{\perp}}{\delta},$$

gdzie $\alpha_{\perp}$ jest kątową odległością wzniesienia **W** od płaszczyzny terminatora, czyli

$$H = R\,\frac{\varepsilon_{\perp}}{\delta}\,\frac{\alpha_{\perp}}{\delta}. \tag{2}$$

W przedstawionej sytuacji wyznaczenie wysokości wzniesienia wymagało będzie zmierzenia kątowej średnicy tarczy Księżyca δ, kątowej długości cienia wzniesienia $\varepsilon_{\perp}$ oraz kątowej odległości tego wzniesienia od płaszczyzny terminatora $\alpha_{\perp}$.

Otrzymane rozwiązanie dotyczy bardzo szczególnej chwili, gdy oświetlona jest dokładnie połowa tarczy Księżyca, oraz szczególnej lokalizacji wzniesienia. Wystarczy jednak chwila zastanowienia, by usunąć drugie z wymienionych ograniczeń. Zauważmy bowiem, że płaszczyzna horyzontu jest w każdym miejscu styczna do globu, czyli jest prostopadła do kierunku ku centrum globu (patrz rys. 1). Skoro tak, to wysokość h Słońca ponad horyzontem w dowolnym miejscu globu jest równa kątowi między kierunkiem ku centrum globu i płaszczyzną terminatora. Oznacza to, że ma ona jednakową wartość we wszystkich miejscach globu, które są równoodległe od płaszczyzny terminatora. Punkty o jednakowej wartości h tworzą na powierzchni Księżyca okręgi równoległe do płaszczyzny terminatora, których środki są położone na prostej łączącej środki Księżyca i Słońca. Największym z tych okręgów jest terminator, dla którego $h = 0$. Kątowa wysokość Słońca wzrasta ze wzrostem odległości od terminatora. W punkcie Z Słońce jest w zenicie. Zależność (2) można zatem stosować do wyznaczania wysokości wzniesienia położonego w dowolnym miejscu tarczy, lecz tylko wtedy, gdy Księżyc jest bliski pierwszej lub ostatniej kwadry.

[*] Wydział Fizyki, Uniwersytet w Białymstoku

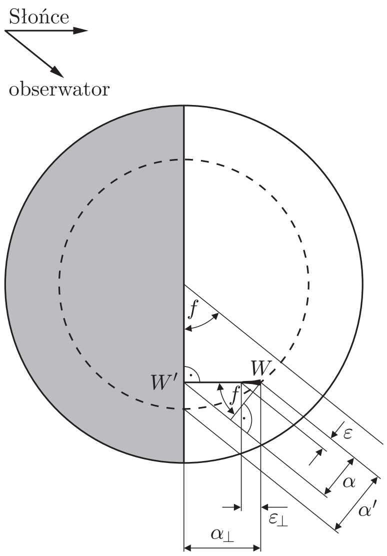
Rozwiązanie (2) pozostaje jednak mało użyteczne ze względu na pierwsze z wymienionych ograniczeń. Okresy, w których Księżyc położony jest blisko prostokątnego narożnika trójkąta, są krótkie i mogą pokrywać się z okresami niepogody. Nietrudno jest jednak otrzymać rozwiązanie ogólniejsze.

Jeśli licznik i mianownik zależności (2) pomnożymy przez r^2, dostaniemy

$$H = \frac{(r\varepsilon_\perp)(r\alpha_\perp)}{R}.$$

Iloczyny $r\varepsilon_\perp$, $r\alpha_\perp$ są odcinkami równoległymi do kierunku Księżyc–Słońce. Gdy widzimy połowę tarczy Księżyca, to na odcinki te patrzymy prostopadle. Przy innej fazie patrzymy na nie pod pewnym kątem f (wartości $f = 0$ odpowiada pierwsza kwadra, $f = 90°$ – pełnia, $f = 180°$ – ostatnia kwadra, $f = 270°$ – nów). Rysunek 2 przedstawia sytuację, gdy Księżyc jest w fazie między pierwszą kwadrą i pełnią. Wynika z niego następująca zależność między długością odcinków $r\varepsilon$ i $r\alpha$ oraz $r\varepsilon_\perp$ i $r\alpha_\perp$:

$$\frac{r\varepsilon}{r\varepsilon_\perp} = \cos f, \qquad \frac{r\alpha}{r\alpha_\perp} = \cos f.$$

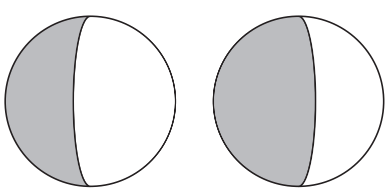


Rys. 2. Obserwowana kątowa długość odcinka $|WW'|$ (α) oraz długość cienia (ε) zależą od kąta f (czyli od fazy Księżyca). Okrąg narysowany linią przerywaną jest śladem przecięcia z globem Księżyca płaszczyzny równoległej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez wzniesienie. Ślad ten dla ziemskiego obserwatora będzie odcinkiem prostopadłym do prostej łączącej punkty kontaktu terminatora z brzegiem tarczy Księżyca.

Zależności te pozwalają uogólnić wzór (2) dla dowolnej fazy Księżyca:

$$H = R\,\frac{\varepsilon}{\delta}\,\frac{\alpha}{\delta}\,\frac{1}{\cos^2 f}. \qquad (3)$$

Widać, że zależność wysokości wzgórza H od kąta f jest słaba dla niewielkich jego wartości. Przyjmijmy np., że $|f| \approx 13°$, co odpowiada odstępowi około 1 doby od pierwszej lub ostatniej kwadry. Kształt jasnej części Księżyca, odpowiadający tym chwilom, jest pokazany na rysunku 3. Użycie zależności (2) zamiast (3) jest wtedy źródłem błędu względnego rzędu 5%. Tymczasem rozmycie granicy cienia i linii terminatora skutkuje dużymi błędami pomiaru kątów ε i α, czego finalnym skutkiem jest względny błąd wartości H nie mniejszy niż 10%. Wynika stąd, że do wyznaczania wysokości wzniesień w chwilach bliskich momentowi, gdy widoczna jest połowa tarczy Księżyca, można wykorzystywać zależność (2).



Rys. 3

Jeśli kształt jasnej części Księżyca będzie wyraźnie różnił się od połowy okręgu, to na podstawie rysunku 4 możemy sformułować zależność umożliwiającą wyznaczenie wartości kąta f i uwzględnienie jej w zależności (3)

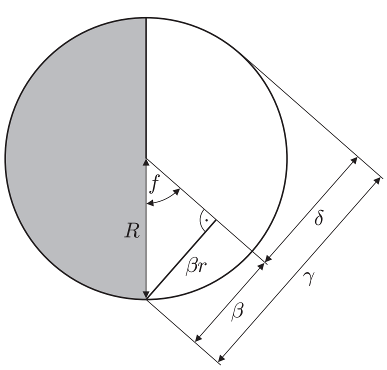
$$\sin f = \frac{r\beta}{R} = \frac{\beta}{\delta}.$$

Tak więc dla dowolnej fazy Księżyca (dowolnej wartości kąta f) zależność (3) wygląda następująco:

$$H = R\,\frac{\varepsilon}{\delta}\,\frac{\alpha}{\delta}\,\frac{1}{(1-(\beta/\delta)^2)},$$

Ponieważ w praktyce znacznie łatwiej można zmierzyć kąt γ niż β, zależność powyższą – pamiętając, że $\gamma = \delta + \beta$ – możemy zapisać jako funkcję kąta γ:

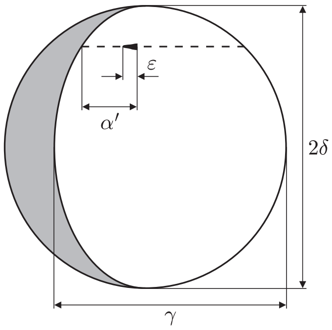
$$H = R\,\frac{\varepsilon}{\delta}\,\frac{\alpha}{\delta}\,\frac{1}{(\gamma/\delta)(2-\gamma/\delta)}. \qquad (4)$$



Rys. 4. Kąt f można wyznaczyć, mierząc kąty β i δ bądź γ i δ.

Krótkiego komentarza wymaga jeszcze problem pomiaru kąta α. Jak wynika z rysunku 2, jest to kąt, pod jakim widoczny jest odcinek WW', gdzie W' jest rzutem punktu W na płaszczyznę terminatora (punkt W' jest położony pod powierzchnią Księżyca). Dokładny pomiar tego kąta nie jest więc możliwy poza szczególnym przypadkiem, gdy widoczna jest dokładnie połowa tarczy Księżyca. Wtedy bowiem punkt W' będzie położony dokładnie na linii terminatora, tzn. $\alpha = \alpha'$. Jeżeli obserwacji dokonano w chwili bliskiej momentowi wystąpienia pierwszej lub ostatniej kwadry, to punkt W' będzie znajdował się bardzo blisko terminatora, w odległości niewiele większej niż nieostrość jego granicy. Możemy wtedy przyjąć, że $\alpha \cong \alpha'$. Zauważmy jednak, że również dla dowolnej fazy Księżyca problem określenia wartości α rozwiązuje się sam. Cienie wzgórz dostatecznie długie, by można było mierzyć je w miarę dokładnie, są widoczne tylko blisko terminatora, a wtedy punkt W' również będzie bardzo blisko linii terminatora. Skoro tak, to niezależnie od fazy Księżyca możemy przyjmować, że $\alpha \cong \alpha'$.

Przyglądając się zależności (4), będącej rozwiązaniem postawionego zadania, warto zauważyć, że wielkości kątowe występują w niej wyłącznie w postaci ilorazów.



Rys. 5. Kąty, które należy zmierzyć, aby wyznaczyć wysokość wzniesienia. Linia przerywana łączy punkty jednakowo odległe od płaszczyzny wyznaczonej przez położenie obserwatora, środka Księżyca i środka Słońca.

Dzięki temu do wyznaczenia wysokości wzniesienia nie jest potrzebna znajomość kątowej skali obrazu Księżyca obserwowanego w lunecie bądź kątowej skali fotografii Księżyca. Otrzymane zależności są, oczywiście, prawdziwe dla dowolnego kulistego obiektu oświetlonego odległym, niemal punktowym źródłem światła.

* * *

Jeśli R uznamy za wielkość znaną, to do wyznaczenia wysokości wzniesienia konieczne będzie zmierzenie czterech kątów: ε, α', γ, δ (rys. 5). Można je zmierzyć w trakcie bezpośredniej obserwacji wizualnej lub wykorzystując do pomiarów zdjęcie Księżyca.

Zrobienie zdjęcia Księżyca, umożliwiającego wykonanie niezbędnych pomiarów z rozsądną dokładnością, wymaga użycia obiektywu o ogniskowej zbliżonej do 1 m. Rolę takiego obiektywu spełnia zazwyczaj obiektyw lunety lub zwierciadło teleskopu. Decydujący wpływ na dokładność pomiaru ma wielkość i ostrość obrazu Księżyca. Ze względu na drgania układu fotografującego powodowane powiewami wiatru i turbulencją atmosferyczną czas naświetlania nie powinien przekraczać 1/30 sekundy. Ponieważ jedną z mierzonych wielkości jest promień tarczy Księżyca, a wielkość tę można wyznaczyć najdokładniej, mierząc średnicę tarczy, zdjęcie powinno obejmować całą oświetloną część tarczy.

Bezpośredni (wizualny) pomiar kątów ε, α', γ, δ będzie wymagał użycia lunety lub teleskopu umożliwiającego osiągnięcie ponad stokrotnego powiększenia. Typując wzniesienia przewidziane do pomiaru, należy wybierać takie, których otoczenie wydaje się w miarę płaskie i poziome. Jedyną wskazówką, umożliwiającą ocenę stopnia spełnienia tego warunku, jest światłocieniowy obraz otoczenia. Jeśli zależy nam na zmierzeniu wysokości konkretnego wzniesienia, należy poczekać na wieczór, w którym znajdzie się ono w pobliżu terminatora.

Rozwiązanie zadania M 1353.
Zauważmy, że
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)},$$
ale
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{l+1} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) = \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots + \frac{1}{l(l+1)},$$
zatem wystarczy przyjąć $k = n-1$, $l = n(n-1)-1$.

Test na liczbę pierwszą

*Wojciech CZERWIŃSKI**

8. Skoro prosta ma dzielić trójkąt na dwa trójkąty, musi przechodzić przez wierzchołek. A przez jeden wierzchołek przechodzi dokładnie jedna prosta spełniająca warunki zadania.

Chyba wszyscy lubimy liczby pierwsze. Szczególne wrażenie robią te naprawdę duże, wydają się skrywać w sobie jakąś nadzwyczajną tajemnicę: dlaczego akurat one stały się swego rodzaju wybrańcami spośród innych liczb i mają tak niezwykłe właściwości?

Matematycy od dawna zastanawiają się, jak sprawdzać, czy liczba jest pierwsza. Dawniej robili to tylko (a może aż) z ciekawości i poczucia doniosłości zadania. W dzisiejszych czasach mają także bardziej praktyczne motywacje. Przykładowo, na potrzeby algorytmu RSA chcielibyśmy umieć sprawdzać, czy liczba mająca około 500 cyfr jest pierwsza, czy też złożona.

Więcej szczegółów o algorytmie RSA i o teście Millera–Rabina można przeczytać m.in. w książkach *Wprowadzenie do algorytmów* T. Cormena, R. Leisersona, R. Rivesta i C. Steina oraz *Kryptografia. W teorii i w praktyce* D. Stinsona.

Powszechnie stosowany i w praktyce najszybszy jest test pierwszości Millera–Rabina (w skrócie test MR), wymyślony w 1980 roku. Wykorzystuje on losowość i opiera się na następującym pomyśle. Powiedzmy, że chcemy sprawdzić, czy liczba n jest pierwsza. Okazuje się, że jeżeli n jest złożona, to co najmniej połowa liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ jest *świadkami złożoności* tej liczby (to zresztą bardzo mało dokładne oszacowanie). Nazwa bierze się stąd, że jeżeli dla pewnej liczby n istnieje liczba $1 \leqslant a \leqslant n-1$ będąca jej świadkiem złożoności, to wiadomo, że n jest liczbą złożoną.

Stosunkowo łatwo jest sprawdzić, czy dana liczba a jest świadkiem złożoności dla n, ale nie będziemy teraz wchodzić w szczegóły, co to znaczy i jak się to robi. Co więcej, odpowiednie obliczenia można wykonać szybko – jeżeli liczba n ma k cyfr, to algorytm sprawdzający, czy a jest świadkiem złożoności dla n, wykonuje mniej więcej k^3 operacji. To znaczy, że dla n będącej liczbą pięćsetcyfrową wykona on mniej więcej 500^3, czyli 125 milionów operacji. Nasz domowy komputer potrzebuje na to mniej więcej jednej setnej sekundy – czyli nie jest źle.

*doktorant, Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski