O pewnym przekształceniu geometrycznym

Jakub Pawlak

1 Wstęp i oznaczenia

W niniejszej pracy badam właściwości przekształcenia T (Def. 1). Główne twierdzenie pracy (Tw. 1) mówi o zachowaniu wielokątów, na które wielokrotnie nakładamy to przekształcenie.
W rozdziale 2 definiuję przekształcenie T i funkcje reprezentujące (Def. 2), które posłużą mi do jego analizy. W tym paragrafie opisuję podstawowe właściwości funkcji reprezentujących. W szczególności pokazuję w jaki sposób ich użycie pozwala na sprowadzenie przekształcenia T do różniczkowania (Własność 3)
W rozdziale 3 wykorzystuję wspomniane funkcje i ich własności do udowodnienia centralnego twierdzenia pracy (Tw. 1).
W rozdziale 4 przedstawiam końcowe uwagi dotyczące pracy i samego przekształcenia T.

1.1 Oznaczenia

W tej pracy terminu wielokąt, będę używał na określenie skończonego ciągu liczb zespolonych reprezentujących kolejne wierzchołki w zespolonym układzie współrzędnych. Chciałbym podkreślić, że jest to definicja różna od standardowego pojmowania tego terminu. Przede wszystkim dopuszcza ona wierzchołki wielokrotne, przecinające się boki wielokąta, a także rozróżnia kolejność wierzchołków (W szczególności wyróżnia wierzchołek pierwszy i ostatni)
Jeżeli W jest α-kątem o wierzchołkach danych ciągiem
$V_n \in \mathbb{C}$ $n \in \{0, 1, ..., \alpha - 1\}$ to dla $a, b \in \mathbb{C}$ $aW + b$ definiuję jako wielokąt, którego kolejne wierzchołki wynoszą $aV_n + b$.
Dla danego $\alpha \in \mathbb{N}_+$ (Które zazwyczaj będzie można interpretować, jako

liczbę wierzchołków wielokąta) przez ζ będę oznaczał liczbę $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{\alpha}}$.
W poniższej pracy będę posługiwał się też następującym lematem opisującym ważną własność ζ:

1.2 Lemat 1

Dla danego $\alpha \in \mathbb{N}_+$ jeżeli $n \in \{1, 2, ..., \alpha - 1\}$ to zachodzi $\sum_{m=0}^{\alpha-1} \zeta^{nm} = 0$
Dowód:

$$\sum_{m=0}^{\alpha-1} \zeta^{nm} = \frac{1-\zeta^{n\alpha}}{1-\zeta} = \frac{1-1}{1-\zeta} = 0$$

Co należało udowodnić.
Uwaga, dla $n = 0$ powyższa suma jest w trywialny sposób równa α.

2 Podstawowe definicje i własności

W niniejszej pracy będę badał następujące przekształcenie geometryczne:

2.1 Definicja 1

Dla dowolnego wielokąta W, którego kolejne wierzchołki są dane przez ciąg $V_{1\,n} \in \mathbb{C},\ n \in \{0, 1, ..., \alpha - 1\}$ zdefiniujmy przekształcenie T, takie że wierzchołki wielokąta $T \circ W$ dane są przez ciąg
$V_{2\,n} = \begin{cases} V_{1\,n} + V_{1\,n+1},\ n \neq \alpha - 1 \\ V_{1\,\alpha-1} + V_{1\,0},\ n = \alpha - 1 \end{cases}$
Przekształcenie $\frac{T \circ W}{2}$ można zinterpretować czysto geometrycznie, jako wielokąt powstały poprzez połączenie środków kolejnych boków W. Taka interpretacja może być szczególnie przydatna przy rozważaniu trójkątów i czworokątów.

Ważnym narzędziem pomocnym przy analizie przekształcenia T jest zastąpienie wielokąta przez odpowiednio dobraną funkcję (Def. 2). Poniżej przedstawię podstawowe związki zachodzące między wielokątem, a reprezentującą go funkcją.

2.2 Definicja 2

Niech dana będzie liczba $\alpha \in \mathbb{N}_+$, oraz ciąg $\lambda_m \in \mathbb{C},\ m \in \{0, 1, ..., \alpha - 1\}$
Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ daną wzorem:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m e^{x(\zeta^m+1)}$$

Funkcji f przypiszemy wielokąt W o wierzchołkach $V_n, n \in \{0, 1, ..., \alpha - 1\}$
wyrażonych przez

$$V_n = \left(\frac{d^n}{dx^n}\frac{f(x)}{e^x}\right)\bigg|_{x=0} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{mn}$$

W dalszej części pracy funkcję opisaną powyżej będę nazywał funkcją reprezentującą W. Rozważenie funkcji reprezentującej wielokąt umożliwia sprowadzenie przekształcenia T do różniczkowania funkcji (Własność 3). Tym przede wszystkim umotywowana jest jej (Poniekąd nietypowa) definicja.
Zgodnie z powyższą definicją każda funkcja (Przyjmująca postać jak powyżej) reprezentuje dokładnie jeden wielokąt, a także każdy wielokąt posiada dokładnie jedną funkcję, która go reprezentuje (Wynika to bezpośrednio z faktu iż $V_n = \left(\frac{d^n}{dx^n}\frac{f(x)}{e^x}\right)|_{x=0}$). Ponadto własność 1 pokazuje ważny fakt, że dla każdej funkcji reprezentującej istnieje tylko jeden ciąg współczynników λ, który ją charakteryzuje. Co za tym idzie współczynniki λ i wierzchołki V_n w sposób jednoznaczny określają się wzajemnie. Ciąg λ można wyznaczyć, jako dyskretną transformatę Fouriera ciągu wierzchołków (Własność 6).

2.3 Własność 1

Jeżeli dla danego $\alpha \in \mathbb{N}_+$ i $\lambda_{1m} \in \mathbb{C},\ m \in \{0, 1, ..., \alpha - 1\}$
$\sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_{1m} e^{x(\zeta^m+1)} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_{2m} e^{x(\zeta^m+1)}$ to $\lambda_{1m} = \lambda_{2m}$
Dowód:
Z założenia mamy

$$\sum_{m=0}^{\alpha-1} (\lambda_{1m} - \lambda_{2m}) e^{x\zeta^m} = 0$$

Niech $a_m = \lambda_{1m} - \lambda_{2m}$ i $f(x) = \sum_{m=0}^{\alpha-1} a_m e^{x\zeta^m} = 0$ Teraz pozostaje udowodnić, że $a_m = 0$
Weźmy dowolne $k \in \{0, 1, ..., \alpha - 1\}$

$$0 = \zeta^{-nk} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) \bigg|_{x=0} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} a_m \zeta^{(m-k)n}$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\alpha-1} \sum_{m=0}^{\alpha-1} a_m \zeta^{(m-k)n} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} a_m \sum_{n=0}^{\alpha-1} \zeta^{(m-k)n}$$

Korzystając z lematu 1 otrzymujemy, że powyższa suma jest równa

$$a_k \alpha$$

Zatem $a_k = 0$ dla $k \in \{0, 1, ..., \alpha - 1\}$ co należało udowodnić.

2.4 Własność 2

Jeżeli funkcja $f(x) = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m e^{x(\zeta^m+1)}$ reprezentuje α-kąt W o kolejnych wierzchołkach danych ciągiem $V_n,\ n \in \{0, 1, ..., \alpha - 1\}$ to dla $a, b \in \mathbb{C}$ funkcja $af(x) + be^{2x} = (a\lambda_0 + b)e^{2x} + \sum_{m=1}^{\alpha-1} (a\lambda_m) e^{x(\zeta^m+1)}$ reprezentuje wielokąt $aW + b$
Dowód:
Z definicji

$$V_n = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{mn}$$

Ponadto funkcja $af(x) + be^{2x}$ reprezentuje wielokąt, którego kolejne wierzchołki są wyrażane przez:

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} \frac{af(x) + be^{2x}}{e^x} \right) \bigg|_{x=0} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} a\lambda_m \zeta^{mn} \ + \ b = aV_n + b$$

Co należało udowodnić.

2.5 Własność 3

Jeżeli funkcja $f(x) = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m e^{x(\zeta^m+1)}$ reprezentuje α-kąt W, a $f'(x)$ reprezentuje wielokąt W' (Gdzie $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$) to $T \circ W = W'$

Dowód:
Niech $V_n, \ n \in \{0, 1, ..., \alpha - 1\}$ będzie ciągiem kolejnych wierzchołków W.
Z definicji mamy:

$$V_n = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{mn}$$

Ponadto

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m (\zeta^m + 1) e^{x(\zeta^m+1)}$$

Kolejne wierzchołki W' oznaczę przez V'_n Z definicji spełnione jest:

$$V'_n = \left(\frac{d^n}{dx^n} \frac{f'(x)}{e^x} \right)\Bigg|_{x=0} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m (\zeta^m + 1) \zeta^{mn} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{m(n+1)} + \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{mn}$$

Teraz dla $n \neq \alpha - 1$ w oczywisty sposób zachodzi $V'_n = V_{n+1} + V_n$.
Korzystając z faktu, że $\zeta^\alpha = \zeta^0$ mamy również $V'_{\alpha-1} = V_0 + V_{\alpha-1}$ Co kończy dowód.

Funkcja reprezentująca odpowiada zawsze wielokątowi o określonej kolejności wierzchołków. Własność 4 opisuje związek między funkcją reprezentującą, a wielokątem o zmienionej kolejności numeracji wierzchołków.

2.6 Własność 4

Jeżeli $f_1(x) = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m e^{x(\zeta^m+1)}$ reprezentuje α-kąt W_1 o wierzchołkach danych ciągiem $V_{1n}, \ n \in \{0, 1, ..., \alpha - 1\}$, a
$f_2(x) = e^x \frac{d}{dx}(\frac{f_1(x)}{e^x}) = \sum_{m=0}^{\alpha-1} (\lambda_m \zeta^m) e^{x(\zeta^m+1)}$ reprezentuje wielokąt W_2 o wierzchołkach danych ciągiem V_{2n} to $V_{2n} = \begin{cases} V_{1\,n+1}, \ n \neq \alpha - 1 \\ V_{1\,0}, \ n = \alpha - 1 \end{cases}$

Dowód:

$$f_2(x) = \sum_{m=0}^{\alpha-1} (\lambda_m \zeta^m) e^{x(\zeta^m+1)}$$

Z definicji mamy:

$$V_{2n} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} (\lambda_m \zeta^m) \zeta^{mn} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{m(n+1)}$$

$$V_{1n} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{mn}$$

Dla $n \neq \alpha - 1$ w oczywisty sposób zachodzi $V_{2n} = V_{1n+1}$. Korzystając z faktu, że $\zeta^{\alpha} = \zeta^0$ mamy również $V_{2\alpha-1} = V_{1\,0}$ Co kończy dowód.

Własność 5 opisuje związek między funkcją reprezentującą, a wielokątem o wierzchołkach numerowanych w odwrotnej kolejności. Niestety prawdopodobnie ten związek nie daje się wyrazić w prosty sposób. Własność 5 uzależnia zmianę numeracji wierzchołków od zmiany współczynników λ.

2.7 Własność 5

Jeżeli funkcja $f_1(x) = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m e^{x(\zeta^m+1)}$ reprezentuje wielokąt W_1 o wierzchołkach danych przez ciąg V_{1n}, a funkcja
$f_2(x) = \lambda_0 e^{2x} + \sum_{m=1}^{\alpha-1} (\lambda_{\alpha-m}\zeta^m) e^{x(\zeta^m+1)}$ reprezentuje wielokąt W_2 o wierzchołki danych przez V_{2n} to $V_{2n} = V_{1\alpha-1-n}$
Dowód:
Z założenia mamy:

$$V_{2n} = \left(\frac{d^n}{dx^n} \frac{f_2(x)}{e^x} \right)\Bigg|_{x=0} = \lambda_0 + \sum_{m=1}^{\alpha-1} (\lambda_{\alpha-m}\zeta^m)\zeta^{mn} = \sum_{m=1}^{\alpha} \lambda_{\alpha-m}\zeta^{m(n+1)} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{(\alpha-m)(n+1)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{-m(n+1)} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{m(-n-1)} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{m(\alpha-n-1)} = V_{1\alpha-1-n}$$

Co kończy dowód.

Aby dla danego wielokąta obliczyć funkcję reprezentującą go możemy skorzystać z dyskretnej transformaty Fouriera do obliczenia współczynników λ. Ilustruje to następujące twierdzenie:

2.8 Własność 6

Jeżeli dla $V_0, ..., V_{\alpha-1} \in \mathbb{C}$ $\lambda_m = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} V_k \zeta^{-km}$ to $V_n = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{nm}$

Dowód:

$$\sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m \zeta^{nm} = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \zeta^{nm} \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} V_k \zeta^{-km} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} V_k \sum_{m=0}^{\alpha-1} \zeta^{(n-k)m}$$

Z lematu 1 suma ta jest równa:

$$\frac{1}{\alpha} \alpha V_n = V_n$$

Koniec dowodu.

3 Główne twierdzenie

Teraz przejdę do dowodu twierdzenia badającego zachowanie wielokątów, na które wielokrotnie nakładamy przekształcenie T. Zacznę od przedstawienia lematów potrzebnych dla tego dowodu.

3.1 Lemat 2

Dla danego $\alpha \in \mathbb{N}_+$ jeżeli $a, b \in [0, \alpha]$ to następujące nierówności są równoważne: $|\zeta^a + 1| > |\zeta^b + 1|$ i $|\frac{\alpha}{2} - a| > |\frac{\alpha}{2} - b|$
Dowód:
Cosinus jest malejący na przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ i spełnia
$|\cos(\frac{\pi}{2} - x)| = |\cos(\frac{\pi}{2} + x)|$ Mając $a, b \in [0, \alpha]$ nierówność

$$|\frac{\alpha}{2} - a| > |\frac{\alpha}{2} - b|$$

jest zatem równoważna z

$$|\cos(\frac{\pi a}{\alpha})| > |\cos(\frac{\pi b}{\alpha})|$$

Teraz dokonam przekształceń równoważnych na uzyskanej nierówności.

$$|\cos(\frac{\pi a}{\alpha})| > |\cos(\frac{\pi b}{\alpha})|$$

$$|e^{i\pi\frac{a}{\alpha}} + e^{-i\pi\frac{a}{\alpha}}| > |e^{i\pi\frac{b}{\alpha}} + e^{-i\pi\frac{b}{\alpha}}|$$

$$|\left(e^{i\pi\frac{a}{\alpha}} + e^{-i\pi\frac{a}{\alpha}}\right) e^{i\pi\frac{a}{\alpha}}| > |\left(e^{i\pi\frac{b}{\alpha}} + e^{-i\pi\frac{b}{\alpha}}\right) e^{i\pi\frac{b}{\alpha}}|$$

$$|e^{2i\pi\frac{a}{\alpha}}+1| > |e^{2i\pi\frac{b}{\alpha}}+1|$$

Co zaś jest równoważne z:

$$|\zeta^a+1| > |\zeta^b+1|$$

Koniec dowodu.

3.2 Lemat 3

Dla danego $\alpha > 2$ funkcje postaci $e^{x(\zeta^c+1)}$ $c \in \{1, \alpha-1\}$ reprezentują wielokąty foremne.
Dowód:
Kolejne wierzchołki wielokąta reprezentowanego przez $e^{x(\zeta^c+1)}$ wynoszą:

$$\left(\frac{d^n}{dx^n}e^{x\zeta^c}\right)\bigg|_{x=0} = \zeta^{cn} = \cos\left(\frac{2\pi c}{\alpha}n\right) + \sin\left(\frac{2\pi c}{\alpha}n\right)i$$

$c \in \{1, \alpha-1\}$ więc w trywialny sposób lemat jest spełniony.

3.3 Lemat 4

Jeżeli dla danego $\alpha \in \mathbb{N}_+$, $\lambda_{1m}(n)$ i $\lambda_{2m}(n)$ $n \in \mathbb{N}_+$ $m \in \{0,1,...,\alpha-1\}$ granica $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\alpha-1}\lambda_{1m}(n)e^{x(\zeta^m+1)}$ istnieje i zachodzi $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\alpha-1}\lambda_{1m}(n)e^{x(\zeta^m+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\alpha-1}\lambda_{2m}(n)e^{x(\zeta^m+1)}$ to $\lim_{n\to\infty}\lambda_{1m}(n)-\lambda_{2m}(n)=0$
Dowód:
Ustalmy $a_m(n) = \lambda_{1m}(n)-\lambda_{2m}(n)$, oraz $r_n \in \{0,1,...,\alpha-1\}$ tak aby $|a_m(n)| \le |a_{r_n}(n)|$ dla każdego $m \in \{0,1,...,\alpha-1\}$
Teraz wystarczy pokazać, że $\lim_{n\to\infty}a_m(n)=0$ Z założenia mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\alpha-1}(\lambda_{1m}(n)-\lambda_{2m}(n))e^{x(\zeta^m+1)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\alpha-1}a_m(n)e^{x\zeta^m} = 0$$

Jeżeli granica $\lim_{n\to\infty}a_m(n)$ istnieje dla każdego $m \in \{0,1,...,\alpha-1\}$ to zgodnie z własnością 1 musi ona być równa 0 dla każdego m i teza lematu jest spełniona. Przyjmując, że granica $\lim_{n\to\infty} a_m(n)$ nie istnieje dla pewnego m otrzymujemy sprzeczność mamy bowiem:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\alpha-1} a_m(n) e^{x\zeta^m} = \lim_{n\to\infty} a_{r_n}(n) \sum_{m=0}^{\alpha-1} \frac{a_m(n)}{a_{r_n(n)}} e^{x\zeta^m}$$

Zatem musi zachodzić $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\alpha-1} \frac{a_m(n)}{a_{r_n(n)}} e^{x\zeta^m} = 0$ Jest to jednak nie możliwe, gdyż $|\frac{a_m(n)}{a_{r_n(n)}}| \leq 1$ dla każdego $m \in \{0, 1, ..., \alpha - 1\}$ więc zgodnie z własnością 1 musi zachodzić $\lim_{n\to\infty} \frac{a_m(n)}{a_{r_n(n)}} = 0$ co nie jest spełnione dla $m = r_n$
Koniec dowodu.

3.4 Twierdzenie 1

Niech dana będzie funkcja $f(x) = \sum_{m=0}^{\alpha-1} \lambda_m e^{x(\zeta^m+1)}$ reprezentująca α-kąt W. Następujące warunki są równoważne:
(1) Istnieją ciągi $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ takie, że $\lim_{n\to\infty} a_n(T^n \circ W) + b_n$ jest foremny.
(2) Istnieje $c \in \{1, \alpha - 1\}$ takie, że $\lambda_c \neq 0$ i $\lambda_{\alpha-c} = 0$
Przez $\lim_{n\to\infty} a_n(T^n \circ W) + b_n$ rozumiem wielokąt reprezentowany przez granicę $\lim_{n\to\infty} a_n \frac{d^n}{dx^n} f(x) + b_n e^{2x}$ o ile tylko ona istnieje i jest postaci jak w def. 2
Dowód:
Załóżmy, że (2) jest spełnione. Weźmy $c \in \{1, \alpha - 1\}$, takie że $\lambda_c \neq 0$
Ustalmy $a_n = \frac{(\zeta^c+1)^{-n}}{\lambda_c}$, $b_n = -\frac{(\zeta^c+1)^{-n}}{\lambda_c}\lambda_0 2^n$ Wówczas

$$\frac{d^n}{dx^n}(a_n f(x) + b_n e^{2x}) = \sum_{m=0}^{\alpha-1} a_n \lambda_m (\zeta^m + 1)^n e^{x(\zeta^m+1)} + b_n e^{2x} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\alpha-1} \frac{(\zeta^c + 1)^{-n}}{\lambda_c} \lambda_m (\zeta^m + 1)^n e^{x(\zeta^m+1)} - \frac{(\zeta^c + 1)^{-n}}{\lambda_c} \lambda_0 2^n e^{2x} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\alpha-1} \frac{\lambda_m}{\lambda_c} \left(\frac{\zeta^m + 1}{\zeta^c + 1}\right)^n e^{x(\zeta^m+1)}$$

Z lematu 2 wynika, że $|\frac{\zeta^m+1}{\zeta^c+1}| \geq 1$, wtedy i tylko wtedy gdy $m \in \{0, c, \alpha - c\}$. Jednakże $\lambda_{\alpha-c} = 0$ zatem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \frac{d^n}{dx^n} f(x) + e^{2x} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\alpha-1} \frac{\lambda_m}{\lambda_c} \left(\frac{\zeta^m+1}{\zeta^c+1}\right)^n e^{x(\zeta^m+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_c}{\lambda_c} \left(\frac{\zeta^c+1}{\zeta^c+1}\right)^n e^{x(\zeta^c+1)} = e^{x(\zeta^c+1)}$$

Zgodnie z lematem 3 jest to zapis wielokąta foremnego i (1) jest spełnione.

Teraz załóżmy, że (1) jest spełnione. W przypadku wielokątów foremnych zmiana numeracji wierzchołków jest równoważna z ich obróceniem, więc zgodnie z własnością 1 i lematem 3 (1) sprowadza się do $\lim_{n\to\infty} a_n \frac{d^n}{dx^n} f(x) + b_n e^{2x} = e^{x(\zeta^c+1)}$, $c \in \{1, \alpha - 1\}$ Otrzymaliśmy:

$$e^{x(\zeta^c+1)} = \lim_{n\to\infty} a_n \frac{d^n}{dx^n} f(x) + b_n e^{2x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\alpha-1} a_n \lambda_m (\zeta^m+1)^n e^{x(\zeta^m+1)} + b_n e^{2x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (a_n \lambda_0 (\zeta^m + 1)^n + b_n) e^{2x} + \sum_{m=1}^{\alpha-1} a_n \lambda_m (\zeta^m + 1)^n e^{x(\zeta^m+1)}$$

Zgodnie z lematem 4 oznacza to, że:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \lambda_c (\zeta^c + 1)^n = 1$$

λ_c w oczywisty sposób jest więc różne od 0. Z lematu 4 mamy także

$$\lim_{n\to\infty} a_n \lambda_{\alpha-c} (\zeta^{\alpha-c} + 1)^n = 0$$

Stąd

$$0 = \lim_{n\to\infty} a_n \lambda_{\alpha-c} (\zeta^{\alpha-c} + 1)^n = \lim_{n\to\infty} a_n \lambda_{\alpha-c} (\zeta^{\alpha-c} + 1)^n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n \lambda_c (\zeta^c + 1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{\alpha-c}}{\lambda_c} (\frac{\zeta^{\alpha-c}+1}{\zeta^c+1})^n$$

Zgodnie z lematem 2 $|\frac{\zeta^{\alpha-c}+1}{\zeta^c+1}| = 1$ Stąd wynika, że aby powyższa granica była równa 0 $\lambda_{\alpha-c}$ musi być równe 0.
Koniec dowodu.

4 Uwagi końcowe

Rezultat powyższej pracy w pokazuje, że przekształcenie T może posiadać interesujące właściwości. Niewątpliwie można zadać o nie wiele pytań, które domagają się dokładniejszego zbadania. Jako przykład mogę wskazać pytanie o wielokąty, dla których W jest podobny do $T^k \circ W$. Okazuje się, że dla trójkątów i czworokątów jest to sytuacja powszechna. Mówiąc konkretniej, jeżeli W jest trójkątem (w klasycznym geometrycznym tego słowa znaczeniu) to $T \circ W$ jest zawsze podobny do W. Gdy W jest równoległobokiem to $T^2 \circ W$ jest podobny do W. Dla wielokątów o większej liczbie boków odpowiedź na to pytanie nie wydaje się być tak oczywista.

Zapewne metodę, której użyłem do udowodnienia Tw.1 można uprościć. Przede wszystkim pojęcie funkcji reprezentującej, można zastąpić pojęciem ciągu reprezentującego, który w sposób bezpośredni odpowiadałby współczynnikom λ. W tej pracy ze względu na ograniczenia czasowe, a także moim zdaniem nieco większą intuicyjność funkcji reprezentujących nad ciągami zdecydowałem się jednak na przeprowadzenie dowodu tą nieco bardziej skomplikowaną drogą.

Na koniec chciałbym szczególnie podziękować Panu Profesorowi Jackowi Gulgowskiemu, za dużą pomoc przy nadawaniu pracy odpowiedniego kształtu, a także mojej obecnej nauczycielce matematyki Pani Małgorzacie Ilewicz za ciągłe wspieranie moich matematycznych zainteresowań, oraz wszystkim innym osobom, które przyczyniły się do powstania tej pracy.

5 Bibliografia

- https://math.stackexchange.com/questions/4432324/is-there-general-formula-for-the-inverse-of-this-matrices
- https://www.youtube.com/watch?v=nl9TZanwbBk
- https://www.desmos.com/calculator/pihk7tyad9
- https://en.wikipedia.org/wiki/Root_of_unity