O PEWNYM KRYTERIUM ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW TRYGONOMETRYCZNYCH

BARTOSZ CHOMIŃSKI

Liceum Ogólnokształcące nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu, al. Brücknera 10, 51-410 Wrocław

OPIEKUN NAUKOWY: AGNIESZKA HEJNA

Instytut Matematyczny UWr, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

STRESZCZENIE. W pracy omówimy kryteria zbieżności szeregów: kryterium o szeregach naprzemiennych, Abela i Dirichleta. Następnie sformułujemy i udowodnimy kryterium zbieżności dla szeregów postaci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n^{\beta}\theta)$, gdzie $\beta, \theta > 0$, z założeniami na ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naśladującymi założenia kryteriów Abela i Dirichleta. Dowód prawdziwości kryterium będzie opierał się na metodzie wykorzystania całek do badania zbieżności szeregów oraz metodzie sumowania Abela. Pokażemy, że podane przez nas warunki na zbieżność szeregu postaci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n^{\beta}\theta)$ są konieczne. Podamy także elementarną metodę badania pewnych całek oscylujących opartą na ideach znanych z dowodów kryteriów o szeregach naprzemiennych, Abela i Dirichleta.

1. WSTĘP

W analizie matematycznej znanych jest wiele kryteriów zbieżności szeregów liczbowych (patrz podręczniki i skrypty, np. [4], [8] lub [9]), z czego większość z nich dotyczy szeregów o wyrazach dodatnich. Dlatego, jeśli interesuje nas zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n \in \mathbb{R}$, to w pierwszej kolejności powinniśmy sprawdzić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, który jest już szeregiem o wyrazach nieujemnych. Jeśli uda nam się udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to zbieżny będzie też szereg początkowy [4, XI.§3.377] [9, tw. 5.8]. Jeśli jednak okaże się, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, to nie mamy żadnej informacji na temat zbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ale dowiadujemy się, że żadne z kryteriów dotyczące zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych nie ma zastosowania do badania zbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Najbardziej znanym przykładem szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o własności, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ (takie szeregi nazywa się szeregami

E-mail addresses: chominskib@gmail.com, Agnieszka.Hejna@math.uni.wroc.pl.

zbieżnymi warunkowo) jest szereg anharmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}. \tag{1.1}$$

Aby udowodnić jego zbieżność, należy zauważyć pewne „kasowania" między jego wyrazami, mianowicie:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\dots \\ &=\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\dots \\ &=-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{5\cdot 6}-\dots. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Powyższe równości sprowadzają badanie zbieżności szeregu anharmonicznego do badania szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, który jest już szeregiem o wyrazach dodatnich, co pozwala nam na zbadanie jego zbieżności przy pomocy kryteriów zbieżności szeregów dodatnich (np. połączenie kryterium porównawczego i całkowego). Uogólnieniem powyższego przykładu jest tzw. kryterium o szeregach naprzemiennych, zwane też kryterium Leibniza.

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenie Leibniza, patrz np. [4, XI.§3.381], [8, tw. 2.5] lub [9, tw. 5.25])**.** *Załóżmy, że ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunki:*

(A) dla każdego $n\in\mathbb{N}$ mamy $a_{n+1}\leqslant a_n$,
(B) dla każdego $n\in\mathbb{N}$ mamy $a_n\geqslant 0$,
(C) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Wtedy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Dowód powyższego twierdzenia opiera się wykorzystaniu „skracań" między co drugim wyrazem jak w (1.2) oraz bardzo istotnego warunku (C). Oczywiście, powyższe twierdzenie można uogólnić na kasowania między np. trzema lub większą liczbą kolejnych wyrazów. Ogólnie, jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, a $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ rozbieżny, to wiemy, że do zbieżności nie wystarczy sama „małość" jego wyrazów, ale muszą pojawić się pewne „skracania". Kryterium 1.1 pozwala na poradzenie sobie w sytuacji, gdy wspomniane „kasowania" występują między kolejnymi wyrazami. Znacznie trudniejsza i ciekawsza wydaje się sytuacja, gdy „kasowania" gdzieś występują, ale nie jesteśmy w stanie wprost zidentyfikować gdzie. Próbą opisania takiej sytuacji są kryteria Abela i Dirichleta. Historycznie, metoda użyta w dowodzie poniższych kryteriów pierwszy raz została użyta w pracy [1], później w pracy [2], gdzie kryteria te zostały sformułowane w brzmieniu podobnym do współczesnego. W tym miejscu odsyłamy do pracy [11] po więcej uwag o charakterze historycznym.

Twierdzenie 1.2 (Kryterium Abela, patrz [4, XI.§3.384] lub [9, tw. 5.33])**.** *Załóżmy, że ciągi liczb rzeczywistych* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *spełniają warunki:*

(A) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny,*
(B) ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest monotoniczny i ograniczony.*

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny.*

Twierdzenie 1.3 (Kryterium Dirichleta, patrz [4, XI.§3.384] lub [8, tw. 2.7])**.** *Załóżmy, że ciągi liczb rzeczywistych* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *spełniają warunki:*

(A) istnieje $M > 0$ *takie, że dla dowolnego* $N \in \mathbb{N}$ *mamy* $\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| \leqslant M$*,*
(B) ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest monotoniczny i zbieżny do zera.*

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny.*

Okazuje się, że kryterium Dirichleta jest bardziej ogólne niż twierdzenie 1.1 – biorąc $b_n = (-1)^n$ w kryterium Dirichleta dostajemy twierdzenie Leibniza. Istotnie, dla N nieparzystego mamy

$$
\begin{aligned}
&|\underbrace{-1+1-1+1-1+1-\ldots-1+1}_{N \text{ jedynek}}| \\
&= |\underbrace{(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)-\ldots+(-1+1)-1}_{N \text{ jedynek}}| \leqslant 1.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Dla N parzystego postępujemy podobnie, ostatecznie otrzymujemy $M = 1$ w warunku (A) z kryterium 1.3. Ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest w twierdzeniach 1.2 i 1.3 pełni rolę „ciągu znaków". Warunek monotoniczności (B) na pierwszy rzut oka może wydawać się nienaturalny, ale analizując dowody obu twierdzeń nie tak trudno dojść do wniosku, że ten warunek zasadniczo gwarantuje, że da się napisać „skracania" podobne do tych w (1.2) i żaden z kolejnych wyrazów nie będzie „za duży", aby do tych „kasowań" nie dopuścić. Jest to też warunek na pewien sposób konieczny - można łatwo wskazać przykład „ciągu znaków" $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, który jest nieujemny i zbieżny do zera takich, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest rozbieżny. Przykład ten to

$$
\begin{cases} b_n = (-1)^n, \\ a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n}. \end{cases}
\tag{1.4}
$$

Zweryfikowanie rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ pozostawiamy Czytelnikowi.

Bardzo typowym zastosowaniem kryterium Dirichleta jest badanie zbieżności szeregów, w których występują funkcje trygonometryczne, np. szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} \tag{1.5}$$

(przykład ten można znaleźć np. w [4, XI.§3.385.2] lub [8, str. 17]; dodatkowo, dla lepszego zrozumienia, prezentujemy dowód zbieżności powyższego szeregu w dodatku 7 metodami tej pracy). Heurystycznie można to uzasadnić tym, że funkcje trygonometryczne oscylują, a oscylacje te powodują skracania. Można powiedzieć, że przeciwne znaki pojawiają się „w miarę regularnie” tak jak np. w (1.3). Precyzyjniej – okazuje się, że dla funkcji trygonometrycznych prawdziwy jest poniższy lemat, który powyższą heurystykę formalizuje.

Lemat 1.4. *Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Ciąg $(\sin(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek (A) z twierdzenia 1.3.*

Dowód. Niech $z_n = e^{\alpha n i} = \cos(\alpha n) + i\sin(\alpha n)$. Wówczas możemy udowodnić, że ciąg $a_N := \left|\sum_{n=0}^{N} z_n\right|$ jest ograniczony od góry przez wyrażenie zależne tylko od α. Mamy

$$a_N = \left|\sum_{n=0}^{N} z_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \left(e^{\alpha i}\right)^n\right|$$

Ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego mamy dalej

$$a_N = \left|\sum_{n=0}^{N} \left(e^{\alpha i}\right)^n\right| = \left|\frac{1-e^{\alpha N i}}{1-e^{\alpha i}}\right| = \frac{\left|1-e^{\alpha N i}\right|}{\left|1-e^{\alpha i}\right|} \leqslant \frac{|2+i|}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|} \leqslant \frac{3}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}. \tag{1.6}$$

Zdefiniujmy ciąg $b_N := \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} z_n\right)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} \sin(\alpha n)\right|$.

Możemy ograniczyć ciąg b_N od góry przez ciąg a_N, ponieważ skoro dla $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość $|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$, to $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$. Łącząc ten fakt z nierównością (1.6) otrzymujemy nierówność

$$b_N = \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} z_n\right)\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} z_n\right| = a_N \leqslant \frac{3}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}. \tag{1.7}$$

□

Heurystyka „regularnych skracań” oraz lemat 1.4 motywują nas do postawienia hipotezy, że szeregi, w których występują funkcje trygonometryczne dosyć często mogą być zbieżne nawet wtedy, gdy nie są zbieżne bezwzględnie.

Warto zaznaczyć, że szeregi trygonometryczne nie występują w matematyce tylko jako przykłady szeregów, dla których badanie zbieżności wymaga używania głębszych metod niż dla szeregów o wyrazach nieujemnych. Szeregi trygonometryczne bardzo często okazują się tzw. szeregami Fouriera różnych funkcji, a dziedzina matematyki badająca szeregi Fouriera funkcji nazywa się analizą fourierowską. Szeregi Fouriera, poza tym, że są interesujące matematycznie, mają one wielkie znaczenie między innymi w fizyce, teorii drgań oraz przetwarzaniu sygnałów obrazu (kompresja jpeg) i dźwięku (kompresja mp3). Czytelnika zainteresowanego tematem odsyłamy do klasycznego podręcznika [16] lub np. do nowocześniejszego podręcznika [12]. Odsyłamy też do popularnonaukowego opracowania [13].

2. Wyniki pracy

2.1. **Motywacja.** Motywacją do powstania tej pracy było jedno z zadań z egzaminu wstępnego na Studia Doktoranckie Matematyki na Uniwersytecie Wrocławskim [14].

Zadanie 2.1. *Zbadaj zbieżność szeregu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}. \tag{2.1}$$

Pierwszą próbą rozwiązania tego zadania byłoby zbadanie zbieżności bezwzględnej, jednak najbardziej naturalne szacowanie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(\sqrt{n})}{n} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

prowadzi do szeregu rozbieżnego. Jest to zatem przykład szeregu opisanego we wstępie, więc naturalna byłaby próba zastosowania któregoś z opisanych tam twierdzeń. Jednak próbując sprawdzić warunek (A) z kryterium Dirichleta otrzymujemy sumę

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(\sqrt{n}), \tag{2.3}$$

którą nie wiadomo jak przedstawić w bardziej przystępnej formie lub oszacować (jest bardzo prawdopodobnym, że wyliczenie sumy tego typu jest zadaniem o wiele trudniejszym niż nasze zadanie z szeregiem – sumy tego typu pojawiają się w teorii liczb i wymagają zastosowania zaawansowanych metod, patrz np. [10], [15]). Dlatego kryterium Dirichleta nie ma tu zastosowania. Literatura nie podaje kryterium pozwalającego na badanie szeregów zawierających wyrażenia typu „$\sin(n^\alpha)$”. Co prawda, istnieją prace, których autorzy uogólniają kryteria Abela i Dirichleta np. na szeregi podwójne (np. [7]), na grupy inne niż $\mathbb{R}^N$ (np. [5]) czy algebry Banacha (np. [6]), ale one także nie są pomocne w tym przypadku. Dlatego bardzo naturalna wydaje się być próba usystematyzowania wiedzy i napisania kryteriów zbieżności w duchu Abela i Dirichleta dla szeregów powyższego typu.

2.2. **Cele pracy.** Cele pracy są następujące:

(1) rozwiązanie zadania 2.1;
(2) udowodnienie kryterium w duchu kryteriów Abela i Dirichleta dla szeregów postaci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n^\beta \theta)$ dla pewnych $\beta, \theta \in \mathbb{R}$ dla ciągu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotonicznego i spełniającego odpowiedni warunek wzrostu;
(3) zbadanie, dla których $\beta, \theta \in \mathbb{R}$ da się udowodnić twierdzenie z powyższego podpunktu przy sensownych założeniach na ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a dla których da się znaleźć kontrprzykłady;
(4) próba bezpośredniego zaobserwowania „skracań” odpowiedzialnych za zbieżność szeregów tego typu.

Komentarza wymaga podpunkt (3). Oczywiście, kryterium Dirichleta traktuje przypadek $\beta = 1$. Zgodnie ze wcześniej opisaną heurystyką, oscylacje powinny powodować „skracania”, więc oczekiwalibyśmy prawdziwości twierdzeń typu kryterium Dirichleta dla każdego $\beta > 0$. Okazuje się, że nasza heurystyka jest nie do końca prawdziwa, ponieważ dla np. $\beta = 2$ można znaleźć sensowny kontrprzykład do twierdzenia typu Dirichleta (patrz Twierdzenia 2.5 i 2.6). Zatem okazuje się, że dla zbieżności szeregu ma znaczenie nie tylko fakt występowania w nim oscylacji, ale także ich rodzaj. Prowadzi to do pewnego sensownego warunku na α, β wiążącego „rodzaj oscylacji ciągu znaków” z „tempem malenia” wyrazów szeregu. Dokładniej będzie to omówione w dalszej części pracy.

2.3. **Główne wyniki pracy.** Poniższe twierdzenie stanowi główny wynik pracy.

Twierdzenie 2.2. *Załóżmy, że $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Niech $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie monotonicznie malejącym ciągiem nieujemnym zbieżnym do zera spełniającym warunek $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha b_n < \infty$. Wówczas dla $\alpha > \beta$ i $\alpha + \beta > 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie*

$$a_n = b_n \sin(n^\beta \theta) \tag{2.4}$$

jest zbieżny.

Uwaga 2.3. Analizując dowód powyższego twierdzenia dla $\theta = 1$ widzimy, że w naturalny sposób uogólnia się dla innych $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Różnica polega na tym, że w pewnym momencie dowodu zamiast całki postaci

$$\int_a^b \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x \tag{2.5}$$

mamy całkę postaci

$$\int_a^b \frac{\sin((\theta x)^\beta)}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x,$$

którą całkowaniem przez podstawienie możemy sprowadzić do całki (2.5), więc dowód będzie różnił się tylko o stałe nieistotne z punktu widzenia dowodu zbieżności. Dlatego powyższe twierdzenie udowodnimy tylko w przypadku $\theta = 1$.

Warunek monotoniczności ciągu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w twierdzeniu 2.2 jest inspirowany kryteriami Abela i Dirichleta, a w dowodzie twierdzenia 2.2 jest używany w naturalny sposób. Okazuje się, że można pokazać, że warunek ten jest także w pewien sposób konieczny. To jest nasze kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 2.4. *Niech $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$. Istnieje ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb nieujemnych spełniający $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n n^\alpha < \infty$ taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}$, gdzie a_n są zdefiniowane wzorem (2.4), jest rozbieżny.*

Ciekawe wydają się warunki $\alpha + \beta > 1$ i $\alpha > \beta$, ponieważ to one decydują o „rodzaju oscylacji". Naturalnym jest pytanie, czy są one w powyższym twierdzeniu konieczne. Okazuje się, że tak jest. Możemy wskazać odpowiednie przykłady α, β i ciągów $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takich, że szereg (2.4) jest rozbieżny o ile nie jest spełniony jeden z wymaganych warunków. Poniższe naturalne przykłady rozbieżnych szeregów są naszymi kolejnymi głównymi wynikami.

Twierdzenie 2.5. *Załóżmy, że $\alpha > \beta$, $\alpha > 0$ i $\alpha + \beta < 1$. Wtedy szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^\beta)}{n^\alpha}$$

jest rozbieżny.

Zauważmy, że w powyższym twierdzeniu ciąg $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ jest monotoniczny malejący do zera i spełnia $\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n n^\alpha < \infty$, więc spełnione są wszystkie założenia twierdzenia 2.2 oprócz $\alpha+\beta > 1$. Poniższe twierdzenie (do pewnego stopnia) uzasadnia konieczność warunku $\alpha > \beta$.

Twierdzenie 2.6. *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} n^2)}{n^{1/2}}$$

jest rozbieżny.

W powyższym mamy $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$, więc $\alpha + \beta > 1$, ponadto ciąg $b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$ jest monotonicznie malejący do zera. Nie jest spełniony jedynie warunek $\alpha > \beta$.

3. Idea dowodu

W tym rozdziale omówimy idee dowodu głównych twierdzeń na przykładzie zadania 2.1 pomijając techniczne szczegóły. Ponadto, przytoczymy znane fakty z analizy matematycznej, które będą wielokrotnie wykorzystywane w dowodach. Dowody głównych twierdzeń pracy składają się z dwóch kroków: porównania z odpowiednią całką oraz zastosowania metody sum Abela.

3.1. **„Całkowa" wersja zadania.** Rozważmy „całkowy" odpowiednik sumy częściowej szeregu (2.1):

$$\int_1^N \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

Wykonując zamianę zmiennych $t = \sqrt{x}$ otrzymujemy, że powyższa całka jest równa

$$2\int_1^{\sqrt{N}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Następnie całkując przez części dostajemy

$$\left|\int_1^{\sqrt{N}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\left[-\frac{\cos(t)}{t} - \int \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right]_1^{\sqrt{N}}\right| = \left|-\frac{\cos(\sqrt{N})}{\sqrt{N}} + \cos(1) - \int_1^{\sqrt{N}} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right|,$$

co prowadzi do następującego ograniczenia:

$$\begin{aligned}
&\left|-\frac{\cos(\sqrt{N})}{\sqrt{N}} + \cos(1) - \int_1^{\sqrt{N}} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|-\frac{\cos(\sqrt{N})}{\sqrt{N}}\right| + |\cos(1)| + \left|-\int_1^{\sqrt{N}} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| = \\
&= \left|\frac{\cos(\sqrt{N})}{\sqrt{N}}\right| + |\cos(1)| + \left|\int_1^{\sqrt{N}} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{N}}\right| + 1 + \int_1^{\sqrt{N}} \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x \leqslant 2 + \int_1^{\sqrt{N}} \left|\frac{1}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x = \\
&= 2 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{N}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{N}} + 1 = 3 - \frac{1}{\sqrt{N}} \leqslant 2.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Otrzymaliśmy zatem, że dla wszystkich $N \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left|\int_1^N \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 4, \tag{3.4}$$

co rozwiązuje pewną „całkową" wersję zadania 2.1[1]. Powtarzając powyższe argumenty możemy otrzymać następujący analogon naszego problemu w większej ogólności. Będzie on kluczowy w dalszym rozumowaniu, aczkolwiek Czytelnik chcący zrozumieć idee może pominąć poniższy (techniczny) dowód przy pierwszym czytaniu.

Stwierdzenie 3.1. *Dla wszystkich α i β spełniających nierówności $\alpha > 0$ i $\alpha + \beta \geqslant 1$ mamy*

$$\sup_{a,b\geqslant 1} \left|\int_a^b \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x\right| < \infty.$$

[1]Dla Uważnego Czytelnika: powyższy dowód nie dotyczy zbieżności całki, ale jedynie ograniczoności pewnych częściowych całek. Zabieg ten jest celowy (aczkolwiek argument dla zbieżności całki wymaga jedynie drobnej modyfikacji).

Dowód. Wykonajmy całkowanie przez podstawienie $t := x^\alpha$. Wówczas $\mathrm{d}t = \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$ i mamy

$$\int_a^b \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x = \int_{a^\alpha}^{b^\alpha} \frac{\sin(t)}{\alpha x^{\beta+\alpha-1}}\,\mathrm{d}t = \int_{a^\alpha}^{b^\alpha} \frac{\sin(t)}{\alpha t^{\frac{\beta+\alpha-1}{\alpha}}}\,\mathrm{d}t.$$

Skoro $\alpha > 0$ i $a, b \geqslant 1$, to również $a^\alpha, b^\alpha \geqslant 1$. Ponadto, skoro $\alpha + \beta \geqslant 1$, to $\frac{\beta+\alpha-1}{\alpha} \geqslant 0$. Oznaczmy

$$\gamma := \frac{\beta+\alpha-1}{\alpha}.$$

W przypadku, gdy $\gamma > 1$ mamy

$$\left|\int_{a^\alpha}^{b^\alpha} \frac{\sin(t)}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{a^\alpha}^{b^\alpha} \frac{1}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\gamma-1}\left|\frac{1}{b^{\alpha(\gamma-1)}} - \frac{1}{a^{\alpha(\gamma-1)}}\right| \leqslant \frac{2}{\gamma-1}, \tag{3.5}$$

co implikuje tezę. W przypadku $\gamma = 0$ mamy

$$\left|\int_{a^\alpha}^{b^\alpha} \sin(t)\,\mathrm{d}t\right| = |\cos(a^\alpha) - \cos(b^\alpha)| \leqslant 2.$$

W przypadku $0 < \gamma < 1$ całkując przez części otrzymujemy

$$\left|\int_{a^\alpha}^{b^\alpha} \frac{\sin(t)}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\frac{\cos(a^\alpha)}{a^\gamma} - \frac{\cos(b^\alpha)}{b^\gamma}\right| + \gamma\left|\int_{a^\alpha}^{b^\alpha} \frac{\cos(t)}{t^{\gamma+1}}\,\mathrm{d}t\right|.$$

Ponieważ $\gamma > 0$, to mamy

$$\left|\frac{\cos(a^\alpha)}{a^\gamma} - \frac{\cos(b^\alpha)}{b^\gamma}\right| \leqslant 2,$$

ponadto, argumentując podobnie jak w (3.5) mamy

$$\left|\int_{a^\alpha}^{b^\alpha} \frac{\cos(t)}{t^{\gamma+1}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{a^\alpha}^{b^\alpha} \frac{1}{t^{\gamma+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{a^\alpha} - \frac{1}{b^\alpha}\right) \leqslant \frac{2}{\gamma},$$

co implikuje

$$\left|\int_{a^\alpha}^{b^\alpha} \frac{\sin(t)}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2 + \frac{2}{\gamma},$$

czyli tezę stwierdzenia. □

Co prawda, dowód przez całkowanie przez części i przez całkowanie przez podstawienie jest krótki i elegancki, jednak ma pewną wadę istotną z elementarnego punktu widzenia – mianowicie, nie widać w nim „skracań”, których istnienie postulowaliśmy we wstępie. Dlatego w rozdziale 6 przedstawimy alternatywny dowód stwierdzenia 3.1, w którym zaobserwujemy owe „kasowania”.

Widzimy zatem, że „wersje całkowe” naszych problemów były stosunkowo łatwe do rozwiązania. Dlatego sensowne jest pytanie, co o tym zadecydowało. W zaproponowanym rozwiązaniu użyjemy dwóch kluczowych narzędzi:

(1) całkowania przez podstawienie,

(2) całkowania przez części.

Niestety, te metody nie mają swoich oczywistych odpowiedników w teorii szeregów, dlatego kluczowym zadaniem będzie znalezienie takich wariantów tych dwóch narzędzi, które będą miały zastosowanie w naszym problemie. Całkowanie przez części zastąpimy porównaniem z całką, a całkowanie przez podstawienie zastąpimy metodą sum Abela.

3.2. **Porównanie z całką.** Zauważmy, że całkowanie przez części (patrz (3.1) i (3.2)) pozwoliło nam nam sprowadzić całkę zawierającą „$\sin(\sqrt{x})$" do całki zawierającej „$\sin(x)$". Gdybyśmy umieli w pewien sposób przejść z szeregu zawierającego „$\sin(\sqrt{n})$" do szeregu „$\sin(n)$", to nasz problem w pewnym stopniu byłby sprowadzony do zastosowania kryteriów Abela i Dirichleta (patrz lemat 1.4). Niestety, w szeregach nie umiemy całkować przez podstawienie. Dlatego zamiast całkować przez podstawienie w szeregu najpierw zastąpimy szereg przez całkę, później mając całkę wykonamy w niej podstawienie, które „$\sin(\sqrt{n})$" zamieni na „$\sin(n)$" a później „wrócimy" do szeregu. Należy tylko sformalizować co to znaczy, że „szereg zastąpimy całką". Aby zapisać tę ideę, piszemy

$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n}\right| \leqslant \left|\sum_{n=M}^{N}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n} - \int_M^N \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_M^N \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x\right|. \tag{3.6}$$

Następnie wprowadzamy standardowy formalizm analizy matematycznej. Ustalmy dowolny mały $\varepsilon > 0$. Jeśli uda nam się pokazać, że istnieje takie $N_1 > 0$, że dla $N, M > N_1$ mamy

$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n} - \int_M^N \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.7}$$

oraz

$$\left|\int_M^N \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.8}$$

to (3.6) implikuje

$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n}\right| < \varepsilon,$$

co z definicji oznacza zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$, którą mamy udowodnić. Zatem nasz problem sprowadziliśmy do pokazania (3.7) oraz (3.8). Własność (3.8) z definicji oznacza zbieżność całki (czyli przeszliśmy z szeregu do całki!). Z całką już umiemy sobie poradzić, czyli aby rozwiązać nasze zadanie, musimy udowodnić jedynie (3.7). Aby to zrobić, piszemy:

(3.9)
$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n} - \sum_{n=M}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\sin(\sqrt{N})}{N} + \sum_{n=M}^{N-1}\left|\frac{\sin(\sqrt{n})}{n} - \int_n^{n+1}\frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x\right|.$$

Składnik $\frac{\sin(\sqrt{N})}{N}$ jest mały dla dużych wartości N, więc pozostało odpowiednie oszacowanie każdego ze składników sumy. Widzimy, że funkcja $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}$ na przedziale $[n, n+1]$ (zauważmy, że jest on długości 1) przyjmuje wartości zbliżone do $f(n)$, czyli różnica

$$\left|\frac{\sin(\sqrt{n})}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x\right|$$

powinna być mała. Kolejny raz przechodząc do formalizmów – da się pokazać, że istnieje stała $C > 0$, taka, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left|\frac{\sin(\sqrt{n})}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant C\frac{1}{n^{3/2}}, \tag{3.10}$$

czyli mamy

$$\left|\sum_{n=M}^{N} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n} - \sum_{n=M}^{N-1}\int_n^{n+1} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\sin(\sqrt{N})}{N} + C\sum_{n=M}^{N-1}\frac{1}{n^{3/2}},$$

co dzięki zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ implikuje (3.7). Pokazanie (3.10) jest techniczne i wymaga użycia dobrze znanego z analizy matematycznej twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

Twierdzenie 3.2 (Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, patrz [8, tw. 5.13] lub [9, tw. 7.19])**.** *Załóżmy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna na przedziale (a, b). Wtedy istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że*

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c).$$

Formalny dowód (3.10) w tym miejscu pomijamy, ponieważ później będzie przedstawiony w większej ogólności (patrz stwierdzenie 4.1). Ponadto, w dowodzie korzysta się następującego dobrze znanego faktu.

Lemat 3.3. *Szereg* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ *jest zbieżny, gdy $\alpha > 1$, a rozbieżny, gdy $\alpha \leqslant 1$.*

Dowód. Dowód wynika z [9, tw. 5.19]. □

3.3. **Metoda sum Abela.** Zauważmy, że w dwóch poprzednich podrozdziałach przedstawiliśmy (z dokładnością do technicznych szczegółów) rozwiązanie zadania (2.1). Zatem utrudnijmy sobie nasz problem zastępując w naszym szeregu ciąg $\frac{1}{n}$ ciągiem „większym", dla ustalenia uwagi niech to będzie $\frac{1}{n^{3/4}}$. Rozważmy zatem poniższe zadanie.

Zadanie 3.4. *Zbadaj zbieżność szeregu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{3/4}}.$$

Zauważmy, że mimo to, że szereg jest „większy”, to niewiele się różni od wyjściowego, bo możemy napisać

$$\frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{3/4}} = \frac{1}{n^{1/4}}\frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}},$$

więc motywowani poprzednim przykładem mamy

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{n^{1/4}}\frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right| \leqslant{}& \left|\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{n^{1/4}}\frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} - \sum_{n=M}^{N-1}\frac{1}{n^{1/4}}\int_n^{n+1}\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right|\\ &+\left|\sum_{n=M}^{N-1}\frac{1}{n^{1/4}}\int_n^{n+1}\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Z pierwszym składnikiem („różnica sumy i całki”) możemy sobie poradzić tak jak poprzednio, za to problem występuje w drugim składniku. Za pierwszym razem zamiast drugiego składnika dostaliśmy po prostu całkę $\int_M^{N-1}\frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x$ a tutaj mamy szereg którego wyrazami są całki ze współczynnikami! Wygląda to skomplikowanie, ale jeśli się temu przyjrzeć, to nie jest tak źle, ponieważ jest to forma pośrednia między szeregiem a całką i okazuje się, że składnik ten można nieformalnie traktować jak „całkę, która wymaga całkowania przez części”. Aczkolwiek bardziej formalnie należałoby powiedzieć: szereg, który wymaga sumowania przez części. Dlatego w tym miejscu przytoczymy twierdzenie, które jest nazywane metodą sum Abela. Metoda ta po raz pierwszy została wykorzystana przez Abela w kontekście szeregów potęgowych (patrz [1]).

Twierdzenie 3.5 (Metoda sum Abela, patrz [4, XI.§3.383] lub [9, tw. 5.28])**.** *Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Oznaczmy $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Mamy*

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)B_n.$$

Dowód. Dowód polega na sprytnym przestawieniu składników w sumie. Piszemy:

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} a_n(B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=M}^{N} a_n B_n - \sum_{n=M}^{N} a_n B_{n-1}\\ &= a_N B_N + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M-1}^{N-1} a_{n+1}B_n\\ &= a_N B_N + \sum_{n=M}^{N-1} a_n B_n - \sum_{n=M}^{N-1} a_{n+1}B_n - a_M B_{M-1}\\ &= a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)B_n.\end{aligned}$$

□

Warto w tym miejscu zauważyć, dlaczego ta metoda jest nazywana także „sumowaniem przez części”. Z definicji pochodnej funkcji f w punkcie x_0 mamy

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

czyli patrzymy, jak zachowuje się różnica wartości funkcji w dwóch bliskich punktach podzielona przez odległość dwóch punktów. W kontekście ciągów i szeregów nie możemy brać dwóch „wartości ciągu” dowolnie blisko, a „najbliżej od siebie” są wyrazy o indeksach różniących się o jeden. Dlatego, heurystycznie, najmniejsze „h” jakie możemy rozważać wynosi 1. Czyli dobrym odpowiednikiem pochodnej dla ciągów byłoby „podstawienie” $h = 1$ w definicji dla funkcji. To prowadzi do dobrze znanej w matematyce definicji operatora różnicowego dla ciągów, który jest odpowiednikiem pochodnej:

$$Da_n = a_{n+1} - a_n.$$

Jeśli przyjrzymy się wzorowi z metody sumacyjnej Abela to można go zapisać w postaci

$$\sum_{n=M}^{N} a_n D(B_{n-1}) = \text{wyrazy brzegowe } + \sum_{n=M}^{N-1} D(a_n) B_n,$$

w czym zauważamy odpowiednik całkowania przez części znany z teorii całek.

Wróćmy teraz do naszego zadania. Stosujemy metodę sum Abela do drugiego składnika w (3.11) i ciągów

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n^{1/4}}, \\ b_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \end{cases}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^{1/4}} \int_n^{n+1} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{N^{1/4}} \int_1^{N} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{M^{1/4}} \int_1^{M} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \sum_{n=M}^{N-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{1/4}} - \frac{1}{n^{1/4}} \right) \int_1^{n} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Rozważmy jedną z całek typu $\int_1^n \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Dokonując w niej podstawienia $t = \sqrt{x}$ dostajemy

$$\left| \int_1^{n} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \right| = 2 \left| \int_1^{\sqrt{n}} \sin(t)\,\mathrm{d}t \right| = 2 \left| -\cos(\sqrt{n}) + \cos(1) \right| \leqslant 4.$$

Wstawiając powyższe oszacowanie do (3.12) dostajemy

$$\left| \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^{1/4}} \int_n^{n+1} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{4}{N^{1/4}} + \frac{4}{M^{1/4}} + 4 \sum_{n=M}^{N-1} \left| \frac{1}{(n+1)^{1/4}} - \frac{1}{n^{1/4}} \right|.$$

Oczywiście, dwa pierwsze składniki są małe gdy N, M są duże. Ponadto, korzystając np. z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej 3.2 dostajemy, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left| \frac{1}{(n+1)^{1/4}} - \frac{1}{n^{1/4}} \right| \leqslant C \frac{1}{n^{5/4}}, \tag{3.13}$$

czyli

$$\left| \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^{1/4}} \int_n^{n+1} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{4}{N^{1/4}} + \frac{4}{M^{1/4}} + 4C \sum_{n=M}^{N-1} \frac{1}{n^{5/4}},$$

co, dzięki temu, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$, prowadzi nas do odpowiedniego oszacowania drugiego składnika w (3.11) (innymi słowy do oszacowania analogicznego do (3.8)). To (z dokładnością do technicznych szczegółów, które będą omówione później) stanowi rozwiązanie zadania 3.4.

Oczywiście, w ogólniejszej sytuacji większość oszacowań jest bardziej skomplikowana technicznie oraz wymaga kilku pomysłów i sprytnych rachunków; tutaj przedstawiliśmy jedynie pomysł na rozwiązanie. W szczególności, chcielibyśmy zwrócić uwagę na oszacowanie (3.13), które w powyższym przykładzie zostało wykonane dla konkretnego ciągu $\frac{1}{n^{1/4}}$, jednakże w ogólnej sytuacji wymaga kilku sprytnych przekształceń i jest to ten element dowodu, w którym wykorzystuje się monotoniczność ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (patrz założenie (B) z kryterium 1.3 i analogiczne założenie w 1.2).

Naturalnym pytaniem, jakie można zadać na tym etapie, to dlaczego wybraliśmy akurat szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{3/4}}$, a przede wszystkim to, dlaczego za drugim razem wybraliśmy akurat „3/4" w mianowniku. Odpowiedź na to pytanie można uzyskać wykonując szczegółowe obliczenia, które prowadzą do konkluzji, że tak naprawdę w tym przypadku w mianowniku mogliśmy „wstawić" coś większego niż 1/2. I nie gorzej! Okazuje się, szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

jest szeregiem rozbieżnym. Dowód tego faktu zostawiamy Czytelnikowi (jako wskazówkę podamy, że należy zastosować metodę z dowodu twierdzenia 2.4). Odpowiedź na pytanie o to, jak rodzaj oscylacji jest powiązany z (monotocznicznym) maleniem wyrazów szeregów Czytelnik znajdzie w precyzyjnych rachunkach z dalszej części.

4. Twierdzenia pomocnicze

W tym rozdziale udowodnimy twierdzenia pomocnicze, które formalizują i uogólniają przedstawione w poprzednim rozdziale idee.

4.1. **Porównanie szeregu z całką.** W tym rozdziale sformalizujemy i uogólnimy idee z podrozdziału 3.2.

Stwierdzenie 4.1. *Niech* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie monotonicznie malejącym ciągiem nieujemnym zbieżnym do zera spełniającym warunek* $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha b_n < \infty$. *Wówczas dla* $\alpha > \beta$ *szereg* $\sum_{n=1}^\infty a_n$, *gdzie*

$$a_n = b_n \sin(n^\beta) - b_n n^\gamma \int_n^{n+1} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x$$

jest bezwzględnie zbieżny.

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych stałych a, b, c spełniających $a < b$ mamy $\int_a^b c\,\mathrm{d}t = c(b-a)$. Wobec tego możemy zapisać a_n w postaci całki:

(4.1)

$$\begin{aligned} a_n = b_n \sin(n^\beta) - b_n n^\gamma \int_n^{n+1} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x &= \int_n^{n+1} b_n \sin(n^\beta)\,\mathrm{d}x - b_n n^\gamma \int_n^{n+1} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x = \\ = \int_n^{n+1} b_n \sin(n^\beta) - b_n n^\gamma \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x &= b_n n^\gamma \int_n^{n+1} \frac{\sin(n^\beta)}{n^\gamma} - \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ograniczymy różnicę $\left|\frac{\sin(n^\beta)}{n^\gamma} - \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\right|$ korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej 3.2. Niech $f(x) = \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}$. Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) = \left[\frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\right]' = \sin(x^\beta)\cdot\left[\frac{1}{x^\gamma}\right]' + \left[\sin(x^\beta)\right]'\cdot\frac{1}{x^\gamma} = -\frac{\gamma\sin(x^\beta)}{x^{\gamma+1}} + \frac{\cos(x^\beta)\cdot\beta\cdot x^{\beta-1}}{x^\gamma} &= \\ = \frac{-\gamma\sin(x^\beta) + \beta\cdot x^\beta\cdot\cos(x^\beta)}{x^{\gamma+1}}&. \end{aligned}$$

Ograniczmy $|f'(x)|$. Niech $C = \gamma + \beta$, mamy

$$\begin{aligned} |f'(x)| = \left|\frac{-\gamma\sin(x^\beta) + \beta\cdot x^\beta\cdot\cos(x^\beta)}{x^{\gamma+1}}\right| &\leqslant \left|\frac{-\gamma\sin(x^\beta)}{x^{\gamma+1}}\right| + \left|\frac{\beta\cdot x^\beta\cdot\cos(x^\beta)}{x^{\gamma+1}}\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\frac{\gamma}{x^{\gamma+1}}\right| + \left|\frac{\beta\cdot 1}{x^{\gamma+1-\beta}}\right| = \frac{\frac{\gamma}{x^\beta}+\beta}{x^{\gamma+1-\beta}} \leqslant C\cdot\frac{1}{x^{\gamma+1-\beta}}. \end{aligned}$$

Wobec tego, wiedząc, że $x \in [n, n+1]$, z twierdzenia Lagrange'a 3.2 mamy

$$\left|\frac{\sin(n^\beta)}{n^\gamma} - \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\right| = |f(n) - f(x)| \leqslant \sup_{t\in[n,n+1]} |f'(t)|\cdot|x-n| \leqslant C\cdot \sup_{t\in[n,n+1]} \frac{1}{t^{\gamma+1-\beta}}\cdot 1 = \frac{C}{n^{\gamma+1-\beta}}.$$

Możemy powyższe ograniczenie wykorzystać przy szacowaniu całki z równania (4.1). Mamy

$$\begin{aligned} |a_n| = b_n n^\gamma \left|\int_n^{n+1} \frac{\sin(n^\beta)}{n^\gamma} - \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant b_n n^\gamma \sup_{x\in[n,n+1]} \left|\frac{\sin(n^\beta)}{n^\gamma} - \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\right|\cdot|(n+1)-n| &\leqslant \\ \leqslant b_n\cdot\frac{C}{n^{1-\beta}}&. \end{aligned}$$

Z założenia $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha b_n < \infty$ wynika, że istnieje taka stała D, że dla wszystkich n zachodzi nierówność $b_n \leqslant \frac{D}{n^\alpha}$, więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{C}{n^{1-\beta}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} D \cdot \frac{C}{n^{1-\beta+\alpha}}. \tag{4.2}$$

Skoro $\alpha > \beta$, to $1-\beta+\alpha > 1$ i z lematu 3.3 wynika teza. □

4.2. **Metoda sum Abela.** W tym rozdziale uogólnimy idee z podrozdziału 3.3. Zaczniemy od lematu, którego dowód po raz kolejny jest oparty na twierdzeniu Lagrange'a o wartości średniej.

Lemat 4.2. *Dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}_+$ i $\alpha \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność*

$$|(x+y)^\alpha - x^\alpha| \leqslant \begin{cases} \alpha y x^{\alpha-1}, & 0 < \alpha < 1, \\ \alpha y (x+y)^{\alpha-1}, & \alpha \geqslant 1. \end{cases}$$

Dowód. Skorzystamy z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej 3.2. Niech $f(t) = t^\alpha$. Wówczas $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ i mamy

$$|(x+y)^\alpha - x^\alpha| = |f(x+y) - f(x)| \leqslant \sup_{t\in[x,x+y]} |f'(t)| \cdot |x+y-x| = \sup_{t\in[x,x+y]} |\alpha t^{\alpha-1}| \cdot y.$$

Rozważmy oddzielnie przypadki $0 < \alpha < 1$ i $\alpha \geqslant 1$.

(1) $0 < \alpha < 1$
Wówczas funkcja $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ jest malejąca, więc supremum na przedziale $[x, x+y]$ będzie przyjęte w jego lewym końcu i mamy

$$|(x+y)^\alpha - x^\alpha| \leqslant \sup_{t\in[x,x+y]} |\alpha t^{\alpha-1}| \cdot y = \alpha x^{\alpha-1} \cdot y.$$

(2) $\alpha \geqslant 1$
Wówczas funkcja $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ jest rosnąca, więc supremum na przedziale $[x, x+y]$ będzie przyjęte w jego prawym końcu i mamy

$$|(x+y)^\alpha - x^\alpha| \leqslant \sup_{t\in[x,x+y]} |\alpha t^{\alpha-1}| \cdot y = \alpha(x+y)^{\alpha-1} \cdot y.$$

□

Stwierdzenie 4.3. *Niech $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie monotonicznie malejącym ciągiem nieujemnym zbieżnym do zera spełniającym warunek $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha b_n < \infty$. Wówczas dla $\beta+\gamma \geqslant 1$ i $\alpha > \gamma$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie*

$$a_n = b_n n^\gamma \int_n^{n+1} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\, \mathrm{d}x$$

jest zbieżny.

Dowód. Niech $S_n = \int_1^n \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x$. Wówczas zachodzą następujące równości (patrz wzór sumacyjny Abela 3.5):

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} b_n n^\gamma \int_n^{n+1} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} b_n n^\gamma \left(S_{n+1} - S_n\right) =$$
$$= b_N N^\gamma S_{N+1} + \sum_{n=2}^{N} S_n \left(b_{n-1}(n-1)^\gamma - b_n n^\gamma\right).$$

Z twierdzenia 3.1 wynika, że istnieje taka stała C, że dla wszystkich n zachodzi $|S_n| \leqslant C$. Mamy dalej

(4.3)
$$b_N N^\gamma S_{N+1} + \sum_{n=2}^{N} S_n \left(b_{n-1}(n-1)^\gamma - b_n n^\gamma\right) \leqslant b_N N^\gamma S_{N+1} + C\sum_{n=2}^{N} \left|b_{n-1}(n-1)^\gamma - b_n n^\gamma\right| =$$
$$= b_N N^\gamma S_{N+1} + C\sum_{n=1}^{N} \left|b_n n^\gamma - b_{n+1}(n+1)^\gamma\right|.$$

Z nierówności trójkąta mamy

$$\left|b_n n^\gamma - b_{n+1}(n+1)^\gamma\right| \leqslant \left|b_n n^\gamma - b_n(n+1)^\gamma\right| + \left|b_n(n+1)^\gamma - b_{n+1}(n+1)^\gamma\right|.$$

Wstawmy tę nierówność do powyższego wyrażenia.

$$b_N N^\gamma S_{N+1} + C\sum_{n=1}^{N} \left|b_n n^\gamma - b_{n+1}(n+1)^\gamma\right| \leqslant$$
$$\leqslant b_N N^\gamma S_{N+1} + C\sum_{n=1}^{N} \left|b_n n^\gamma - b_n(n+1)^\gamma\right| + \left|b_n(n+1)^\gamma - b_{n+1}(n+1)^\gamma\right| =$$
$$= b_N N^\gamma S_{N+1} + C\sum_{n=1}^{N} b_n \left|n^\gamma - (n+1)^\gamma\right| + C\sum_{n=1}^{N} (n+1)^\gamma \left|b_n - b_{n+1}\right| =$$
$$= b_N N^\gamma S_{N+1} + C\sum_{n=1}^{N} b_n \left|n^\gamma - (n+1)^\gamma\right| + C\sum_{n=1}^{N} (n+1)^\gamma \left(b_n - b_{n+1}\right) =$$
$$= b_N N^\gamma S_{N+1} + C\sum_{n=1}^{N} b_n \left|n^\gamma - (n+1)^\gamma\right| + C\sum_{n=1}^{N} b_n((n+1)^\gamma - n^\gamma) =$$
$$= b_N N^\gamma S_{N+1} + 2C\sum_{n=1}^{N} b_n((n+1)^\gamma - n^\gamma).$$

Zwróćmy uwagę, że w powyższych rachunkach użyliśmy założenia monotoniczności ciągu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aby napisać $|b_n - b_{n+1}| = b_n - b_{n+1}$.

Rozważmy dwa przypadki:

- $\gamma \geqslant 1$
  Skorzystajmy z lematu 4.2, mamy nierówność $(n+1)^\gamma - n^\gamma \leqslant \gamma n^{\gamma-1}$ i dalej

$$b_N N^\gamma S_{N+1} + 2C \sum_{n=1}^{N} b_n((n+1)^\gamma - n^\gamma) \leqslant b_N N^\gamma S_{N+1} + 2C \sum_{n=1}^{N} b_n \gamma n^{\gamma-1}.$$

  Z warunku $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha b_n < \infty$ wynika, że istnieje taka stała D, że dla wszystkich n zachodzi nierówność $b_n \leqslant \frac{D}{n^\alpha}$. Mamy więc dalej

$$b_N N^\gamma S_{N+1} + 2C \sum_{n=1}^{N} b_n \gamma n^{\gamma-1} \leqslant b_N N^\gamma S_{N+1} + 2C \sum_{n=1}^{N} \frac{D}{n^\alpha} \gamma n^{\gamma-1} =$$
$$= b_N N^\gamma S_{N+1} + 2CD\gamma \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1-\gamma+\alpha}}.$$

- $\gamma \in (0,1)$
  Skorzystajmy z lematu 4.2, mamy nierówność $(n+1)^\gamma - n^\gamma \leqslant \gamma(n+1)^{\gamma-1}$ i dalej

$$b_N N^\gamma S_{N+1} + 2C \sum_{n=1}^{N} b_n((n+1)^\gamma - n^\gamma) \leqslant b_N N^\gamma S_{N+1} + 2C \sum_{n=1}^{N} b_n \gamma (n+1)^{\gamma-1}.$$

  Z warunku $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha b_n < \infty$ wynika, że istnieje taka stała D, że dla wszystkich n zachodzi nierówność $b_n \leqslant \frac{D}{n^\alpha}$. Mamy więc dalej

$$b_N N^\gamma S_{N+1} + 2C \sum_{n=1}^{N} b_n \gamma (n+1)^{\gamma-1} \leqslant b_N N^\gamma S_{N+1} + 2C \sum_{n=1}^{N} \frac{D}{n^\alpha} \gamma (n+1)^{\gamma-1}$$
$$= b_N N^\gamma S_{N+1} + 2C \sum_{n=2}^{N+1} \frac{D}{n^\alpha} \gamma n^{\gamma-1} \leqslant b_N N^\gamma S_{N+1} + 2CD\gamma \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^{1-\gamma+\alpha}}.$$

Z lematu 3.3 wynika, że każda z dwóch uzyskanych sum jest zbieżna. □

Uwaga 4.4. W powyższym stwierdzeniu możemy nieznacznie osłabić założenie $\alpha > \gamma$ zamiast tego zakładając $\alpha \geqslant \gamma$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n n^\gamma - b_{n+1}(n+1)^\gamma| < \infty$$

(patrz równanie 4.3). Dostaniemy wtedy warunek podobny do tego podanego w pierwszym rozdziale [16]. Zauważmy, że w szczególności warunek ten jest oczywisty dla $b_b = n^{-\gamma}$. Jednak w tym miejscu nie będziemy się tym zajmować, bo w naszym kontekście uwaga ta nie wpływa na osłabienie założeń głównego twierdzenia.

5. Dowody głównych twierdzeń

Dowód twierdzenia 2.2. Niech $\gamma = \alpha - \varepsilon$, gdzie ε jest dowolną liczbą (w domyśle małą) należącą do przedziału $(0, \min(\alpha+\beta-1, \alpha-\beta))$. Wówczas $\alpha > \gamma$, $\alpha > \beta$ i $\gamma \geqslant 1-\beta$, zatem ze stwierdzenia 4.3 ciąg sum częściowych $s_n = \sum_{i=1}^{n} b_n n^\gamma \int_n^{n+1} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x$ jest zbieżny.

Ze stwierdzenia 4.1 wynika, że ciąg $(s_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, zatem skoro ciąg sum częściowych s_n jest zbieżny, to a_n też. To z definicji oznacza zbieżność szeregu z tezy. □

Dowód twierdzenia 2.4. Weźmy następujący ciąg b_n:

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{gdy } \lfloor\sqrt{n}\rfloor \text{ parzysta,} \\ 0, & \text{gdy } \lfloor\sqrt{n}\rfloor \text{ nieparzysta.} \end{cases}$$

Przekształćmy (N^2-1)-tą sumę częściową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi\sqrt{n})$

$$\sum_{n=1}^{N^2-1} b_n \sin(\pi\sqrt{n}) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} b_n \sin(\pi\sqrt{n}) =$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ parzyste}}}^{N-1} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} b_n \sin(\pi\sqrt{n}) + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ nieparzyste}}}^{N-1} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} b_n \sin(\pi\sqrt{n}).$$

Wprost z definicji wynika, że jeżeli k jest parzyste, to b_n dla n z zakresu $[k^2, (k+1)^2-1]$ będzie równe $\frac{1}{n}$. Analogicznie, jeżeli k jest nieparzyste, to b_n dla n z zakresu $[k^2, (k+1)^2-1]$ będzie równe 0. Uprośćmy więc rozpatrywane wyrażenie.

$$\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ parzyste}}}^{N-1} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} b_n \sin(\pi\sqrt{n}) + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ nieparzyste}}}^{N-1} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} b_n \sin(\pi\sqrt{n}) = \tag{5.1}$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ parzyste}}}^{N-1} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n} + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ nieparzyste}}}^{N-1} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} 0 \cdot \sin(\pi\sqrt{n}) = \tag{5.2}$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ parzyste}}}^{N-1} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n} \tag{5.3}$$

Ograniczmy od dołu pojedyncze wyrażenie typu $\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n}$ dla k parzystego. Z własności sinusa mamy, że dla n z przedziału $[k^2, (k+1)^2-1]$ zachodzi nierówność $\sin(\pi\sqrt{n}) \geqslant 0$, zatem możemy ograniczać powyższe sumy od dołu zerując pewne ich składniki. Mamy więc

$$\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n} \geqslant \sum_{n=\left\lfloor\left(k+\frac{1}{4}\right)^2\right\rfloor}^{\left\lfloor\left(k+1-\frac{1}{4}\right)^2\right\rfloor-1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n}.$$

Przy tak dobranych granicach sumowania zajdzie nierówność $\sin(\pi\sqrt{n}) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, zatem dalej zajdzie nierówność

$$\begin{aligned}
\sum_{n=\left\lfloor\left(k+\frac{1}{4}\right)^2\right\rfloor}^{\left\lfloor\left(k+\frac{3}{4}\right)^2\right\rfloor-1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n} &\geqslant \sum_{n=\left\lfloor\left(k+\frac{1}{4}\right)^2\right\rfloor}^{\left\lfloor\left(k+\frac{3}{4}\right)^2\right\rfloor-1} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(k+1)^2} = \\
&= \left(\left\lfloor\left(k+\frac{3}{4}\right)^2\right\rfloor - \left\lfloor\left(k+\frac{1}{4}\right)^2\right\rfloor\right) \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(k+1)^2} = \\
= \left(\left\lfloor k^2+\frac{3}{2}k+\frac{9}{16}\right\rfloor - \left\lfloor k^2+\frac{1}{2}k+\frac{1}{16}\right\rfloor\right) &\cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(k+1)^2} = \\
&= k \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(k+1)^2} \geqslant \frac{k+1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(k+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{k+1}.
\end{aligned}$$

Stosując powyższe rozumowanie do wszystkich składników sumy z równości (5.3) otrzymamy nierówność

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ parzyste}}}^{N-1} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n} \geqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ parzyste}}}^{2N-1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{k+1} \geqslant \sum_{m=1}^{\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{2m} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor} \frac{1}{m}.$$

Z lematu 3.3 wynika, że powyższa suma może być dowolnie duża. □

Dowód twierdzenia 2.5. Weźmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^\beta)}{n^\alpha}$ dla takich wartości α i β, że $\alpha > \beta$, $\alpha > 0$ i warunek $\alpha + \beta > 1$ nie jest spełniony.

Ze stwierdzenia 4.1 mamy, że rozbieżność tego szeregu wynika z rozbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Aby udowodnić rozbieżność szeregu wystarczy zatem pokazać, że sumy częściowe szeregu

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_1^{N} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right|$$

są nieograniczone.

Dowodząc rozbieżności tej całki, nieznacznie zmienimy granice całkowania – udowodnimy „rozbieżność całki" w wygodnych dla nas granicach, a potem udowodnimy, że różni się ona nieznacznie od całki $\int_1^N \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ dla pewnego N, wobec tego z rozbieżności całki w zmienionych granicach wyniknie

$$\limsup_{N\to\infty}\left|\int_1^N \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| = \infty.$$

Niech $\gamma = \frac{1-\alpha-\beta}{\beta}$. Pierwszą część dowodu przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na γ. Całkując przez podstawienie mamy $t = x^\beta$ i $\int_1^{(2M\pi)^{1/\beta}} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_1^{2M\pi} t^\gamma \sin(t)\,\mathrm{d}t$.

1° Dla $\gamma \in (0,1]$ po całkowaniu przez części mamy

$$\int_1^{2M\pi} t^\gamma \sin(t)\,\mathrm{d}t = [t^\gamma \cos(t)]_1^{2M\pi} - \int_1^{2M\pi} \gamma t^{\gamma-1}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Z odpowiedniej modyfikacji stwierdzenia 6.2 wynika, że całka $\int_1^{2M\pi} \gamma t^{\gamma-1}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ jest ograniczona przez wyrażenie zależne tylko od γ.

Wyrażenie $[t^\gamma \cos(t)]_1^{2M\pi}$ jest równe

$$(2M\pi)^\gamma - \cos 1,$$

zatem może być dowolnie duże, ale dla ustalonego M będzie mniejsze niż $(2M\pi)^\gamma$.

Wobec tego całka $\int_1^{2M\pi} t^\gamma \sin(t)\,\mathrm{d}t$ może przyjmować dowolnie duże wartości, ale dla ustalonego M mniejsze niż $(2M\pi)^\gamma$.

2° Niech $\gamma \in (n, n+1]$. Całkując przez części otrzymamy

$$\int_1^{2M\pi} t^\gamma \sin(t)\,\mathrm{d}t = [t^\gamma \cos(t)]_1^{2M\pi} - \int_1^{2M\pi} \gamma t^{\gamma-1}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Analogicznie jak w pierwszym kroku można pokazać, że $[t^\gamma \cos(t)]_1^{2M\pi}$ jest równe $(2M\pi)^\gamma - \cos 1$, ale $\left|\int_1^{2M\pi} \gamma t^{\gamma-1}\cos(t)\,\mathrm{d}t\right|$ mniejsze niż $\gamma(2M\pi)^{\gamma-1}$, zatem zachodzą nierówności

$$\int_1^{2M\pi} t^\gamma \sin(t)\,\mathrm{d}t = [t^\gamma \cos(t)]_1^{2M\pi} - \int_1^{2M\pi} \gamma t^{\gamma-1}\cos(t)\,\mathrm{d}t \geqslant (2M\pi)^\gamma - \cos 1 - \left|\int_1^{2M\pi} \gamma t^{\gamma-1}\cos(t)\,\mathrm{d}t\right| \geqslant$$
$$\geqslant (2M\pi)^\gamma - \cos 1 - \gamma(2M\pi)^{\gamma-1} = (2M\pi)^{\gamma-1}(2M\pi - \gamma) - \cos 1$$

Powyższe wyrażenie może być dowolnie duże, ponieważ dla odpowiednio dużych M będzie zachodzić nierówność $2M\pi > \gamma$.

Wykazaliśmy więc, że całka $\int_1^{(2M\pi)^{1/beta}} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ może być dowolnie duża.

Teraz udowodnimy, że jeżeli $N = \left\lfloor (2M\pi)^{1/\beta} \right\rfloor$, to różnica między całką $\int_1^{(2M\pi)^{1/\beta}} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ a $\int_1^N \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ będzie ograniczona. Mamy

$$\left| \int_1^{(2M\pi)^{1/\beta}} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x - \int_1^N \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_N^{(2M\pi)^{1/\beta}} \frac{\sin(x^\beta)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \right|.$$

Wartości funkcji podcałkowej są co do modułu mniejsze niż $\frac{1}{x^\alpha}$, a długość przedziału $\left[N, (2M\pi)^{1\beta}\right]$ jest mniejsza niż 1, zatem rozpatrywana różnica jest mniejsza niż $\frac{1}{N^\alpha}$, a skoro $\alpha > 0$, to $\frac{1}{N^\alpha} \leqslant 1$, więc ograniczyliśmy z góry tę różnicę przez 1. $\square$

Dowód twierdzenia 2.6. Weźmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n^2)}{n^{1/2}}$. Wtedy $\alpha = \frac{1}{2}$ i $\beta = 2$, zatem warunek $\alpha > \beta$ nie jest spełniony.

Rozbijmy sumę częściową tego szeregu na cztery sumy częściowe. Mamy

$$\sum_{n=1}^{4N+3} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n^2)}{n^{1/2}} =$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(4n)^2)}{(4n)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(4n+1)^2)}{(4n+1)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(4n+2)^2)}{(4n+2)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(4n+3)^2)}{(4n+3)^{1/2}}.$$

Możemy uprościć argumenty w sinusach. Mamy bowiem

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2}(4n)^2\right) &= \sin\left(2\pi \cdot 4n^2\right) = 0,\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)^2\right) &= \sin\left(2\pi \cdot 4n^2 + 2\pi \cdot 2n + \frac{\pi}{2}\right) = 1,\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+2)^2\right) &= \sin\left(2\pi \cdot 4n^2 + 2\pi \cdot 4n + 2\pi\right) = 0,\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+3)^2\right) &= \sin\left(2\pi \cdot 4n^2 + 2\pi \cdot 6n + \frac{9\pi}{2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Zatem powyższa suma sum częściowych jest równa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(4n)^2)}{(4n)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(4n+1)^2)}{(4n+1)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(4n+2)^2)}{(4n+2)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(4n+3)^2)}{(4n+3)^{1/2}} =\\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{0}{(4n)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+1)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{0}{(4n+2)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+3)^{1/2}} =\\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+1)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+3)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Zastosujmy pewne nierówności. Mamy

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+1)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+3)^{1/2}} \geqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+4)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+4)^{1/2}} = \\ = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{(4n)^{1/2}} + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{(4n)^{1/2}} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Z lematu 3.3 wynika, że powyższe sumy częściowe są nieograniczone, zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n^2)}{n^{1/2}}$ jest rozbieżny. $\square$

6. Jak zobaczyć zbieżność całki „przez skracania”?

W tym rozdziale zaprezentujemy alternatywny dowód stwierdzenia 3.1 dla $\alpha = 1$ i $\beta > 0$. Naszą motywacją do przeprowadzenia tego typu dowodu jest bezpośrednie zauważenie „skracań” (takich jak np. w (1.2)), które stoją za zbieżnością całki. Zaczniemy od następującego lematu.

Lemat 6.1. *Niech $\alpha > 0$, wówczas dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}_+$ mamy*

$$\left| \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{\alpha\pi}{(k\pi)^{\alpha+1}}.$$

Dowód lematu. Zauważmy, że dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}_+$ mamy $\displaystyle\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \geqslant 0$, więc

$$\left| \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \right| = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x.$$

Wykorzystajmy definicję całki Riemanna jako granicy sum całkowych o maksymalnej średnicy podziału dążącej do zera. W tym przypadku będziemy rozpatrywać podziały na równe części. Mamy

$$\left| \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \right| = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{\sin(2k\pi + 2\pi \cdot \frac{n}{N})}{\left(2k\pi + 2\pi \cdot \frac{n}{N}\right)^\alpha} = \\ = \lim_{N\to\infty} \frac{2\pi}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin(2\pi \cdot \frac{n}{N})}{\left(2k\pi + 2\pi \cdot \frac{n}{N}\right)^\alpha}.$$

Możemy sumę pod granicą rozbić na dwie sumy, by „prawie skasować” n-ty i $\left(n + \frac{N}{2}\right)$-ty wyraz ze sobą, wszak argumenty w sinusach w n-tym i $\left(n + \frac{N}{2}\right)$-tym wyrazie różnią się o π, zatem sinusy te są przeciwne. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\frac{2\pi}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\sin(2\pi\cdot\frac{n}{N})}{\left(2k\pi+2\pi\cdot\frac{n}{N}\right)^{\alpha}}=\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{2\pi}{N}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\frac{\sin(2\pi\cdot\frac{n}{N})}{\left(2k\pi+2\pi\cdot\frac{n}{N}\right)^{\alpha}}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1}\frac{\sin(2\pi\cdot\frac{n}{N})}{\left(2k\pi+2\pi\cdot\frac{n}{N}\right)^{\alpha}}\right)=\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{2\pi}{N}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\frac{\sin(2\pi\cdot\frac{n}{N})}{\left(2k\pi+2\pi\cdot\frac{n}{N}\right)^{\alpha}}+\frac{\sin(2\pi\cdot\frac{n+\frac{N}{2}}{N})}{\left(2k\pi+2\pi\cdot\frac{n+\frac{N}{2}}{N}\right)^{\alpha}}\right)=\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{\pi}{\frac{N}{2}}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\frac{\sin(\pi\cdot\frac{n}{\frac{N}{2}})}{\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{\frac{N}{2}}\right)^{\alpha}}+\frac{\sin(\pi+\pi\cdot\frac{n}{\frac{N}{2}})}{\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{\frac{N}{2}}\right)^{\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

Podstawmy $M:=\frac{N}{2}$. Mamy dalej

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\frac{\sin(\pi\cdot\frac{n}{M})}{\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}}+\frac{\sin(\pi+\pi\cdot\frac{n}{M})}{\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}}\right)=\\
&=\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\frac{\sin(\pi\cdot\frac{n}{M})}{\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}}-\frac{\sin(\pi\cdot\frac{n}{M})}{\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}}\right)=\\
&=\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\left(\frac{1}{\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}}-\frac{1}{\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}}\right)\right)=\\
&=\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}-\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}}{\left(\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\right)^{\alpha}}\right).
\end{aligned}\tag{6.1}$$

Dla ustalonego n niech $u:=2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}$.
Z lematu 4.2 mamy nierówność

$$|(t+\pi)^{\alpha}-t^{\alpha}|\leqslant\begin{cases}\alpha\pi t^{\alpha-1}, & 0<\alpha<1\\ \alpha\pi(t+\pi)^{\alpha-1}, & \alpha\geqslant 1.\end{cases}$$

Wobec tego, dla $0 < \alpha < 1$ mamy nierówność

$$\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}-\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}}{\left(\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\right)^{\alpha}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\alpha\pi\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha-1}}{\left(\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\right)^{\alpha}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\alpha\pi\left(2k\pi\right)^{\alpha-1}}{\left(\left(2k\pi\right)\left(2k\pi+\pi\right)\right)^{\alpha}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\alpha\pi}{\left(2k\pi\right)\left(2k\pi+\pi\right)^{\alpha}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\alpha\pi}{\left(2k\pi\right)^{\alpha+1}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\alpha\pi}{2\left(k\pi\right)^{\alpha+1}}\right).$$

Dla $\alpha \geqslant 1$ mamy nierówność

$$\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}-\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha}}{\left(\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\right)^{\alpha}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\alpha\pi\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)^{\alpha-1}}{\left(\left(2k\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\left(2k\pi+\pi+\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\right)^{\alpha}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\alpha\pi\left(2k\pi+2\pi\right)^{\alpha-1}}{\left(\left(2k\pi\right)\left(k\pi+\pi\right)\right)^{\alpha}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\alpha\pi\cdot 2^{\alpha-1}}{\left(2k\pi\right)^{\alpha}\left(k\pi+\pi\right)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{M\to\infty}\frac{\pi}{M}\cdot\left(\sum_{n=0}^{M-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{n}{M}\right)\cdot\frac{\alpha\pi}{2\left(k\pi\right)^{\alpha+1}}\right).$$

Dalej, już dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}_+$ otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty} \frac{\pi}{M} \cdot \left(\sum_{n=0}^{M-1} \sin\left(\pi \cdot \frac{n}{M}\right) \cdot \frac{\left(2k\pi + \pi + \pi \cdot \frac{n}{M}\right)^{\alpha} - \left(2k\pi + \pi \cdot \frac{n}{M}\right)^{\alpha}}{\left(\left(2k\pi + \pi \cdot \frac{n}{M}\right)\left(2k\pi + \pi + \pi \cdot \frac{n}{M}\right)\right)^{\alpha}} \right) \leqslant \\
&\leqslant \lim_{M\to\infty} \frac{\pi}{M} \cdot \left(\sum_{n=0}^{M-1} \sin\left(\pi \cdot \frac{n}{M}\right) \cdot \frac{\alpha\pi}{2\left(k\pi\right)^{\alpha+1}} \right) = \\
&= \frac{\alpha\pi}{2\left(k\pi\right)^{\alpha+1}} \cdot \lim_{M\to\infty} \frac{\pi}{M} \cdot \sum_{n=0}^{M-1} \sin\left(\pi \cdot \frac{n}{M}\right) = \\
&= \frac{\alpha\pi}{2\left(k\pi\right)^{\alpha+1}} \cdot \int_0^{\pi} \sin(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\alpha\pi}{\left(k\pi\right)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 6.2. *Dla wszystkich $\alpha \geqslant 0$ mamy*

$$\sup_{a,b\geqslant 1} \left| \int_a^b \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}\, \mathrm{d}x \right| < \infty.$$

Dowód. Rozbijemy dowód na dwa przypadki w zależności od α.

(1) $\alpha = 0$
Wówczas $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x^0}\, \mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \sin x\, \mathrm{d}x\right| = |-\cos b + \cos a| \leqslant 2.$

(2) $\alpha > 0$
Niech $k = \left\lceil \frac{a}{2\pi} \right\rceil$, $l = \left\lfloor \frac{b}{2\pi} \right\rfloor$ i $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}$. Wówczas wielokrotnie rozbijając przedziały całkowania uzyskamy poniższe nierówności.

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| &= \left| \int_a^{2k\pi} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{2k\pi}^{2l\pi} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{2l\pi}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x \right| = \\
&= \left| \int_a^{2k\pi} f(x)\, \mathrm{d}x + \sum_{n=k}^{l-1} \left(\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x) \mathrm{d}x \right) + \int_{2l\pi}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \\
&\leqslant \left| \int_a^{2k\pi} f(x)\, \mathrm{d}x \right| + \sum_{n=k}^{l-1} \left| \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{2l\pi}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \\
&\leqslant \left| \int_a^{2k\pi} f(x)\, \mathrm{d}x \right| + \sum_{n=1}^{l-1} \left| \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x)\, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{2l\pi}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x \right|.
\end{aligned}$$

Wykorzystując lemat 6.1 do składników powyższych sum postaci $\left|\int_{2n\pi}^{2\pi(n+1)} f(x)\mathrm{d}x\right|$ otrzymamy nierówność

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_a^{2k\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \sum_{n=1}^{l-1}\left|\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{2l\pi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\int_a^{2k\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \sum_{n=1}^{l-1}\left|\frac{\alpha\pi}{(k\pi)^{\alpha+1}}\right| + \left|\int_{2l\pi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Liczby $\left|\int_a^{2k\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$ i $\left|\int_{2l\pi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$ są mniejsze niż 2π, bo dla $x \geqslant 1$ mamy $|f(x)| \leqslant 1$ i przedziały całkowania są nie dłuższe niż 2π.

Liczba $\sum_{n=1}^{l-1}\left|\frac{\alpha\pi}{(k\pi)^{\alpha+1}}\right|$ jest mniejsza niż pewne wyrażenie zależne tylko od α, ponieważ

$$\sum_{n=1}^{l-1}\frac{\alpha\pi}{(k\pi)^{\alpha+1}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\pi}{(k\pi)^{\alpha+1}} \leqslant \frac{\alpha\pi}{\pi^{\alpha+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

Skoro $\alpha > 0$, to $\alpha + 1 > 1$ i z lematu 3.3 szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha+1}}$ jest zbieżny. Wobec tego dla dowolnego wyboru liczb a i b w nierówności (6.2) i ograniczeń podanych na pozostałe składniki mamy

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\int_a^{2k\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \sum_{n=1}^{l-1}\left|\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{2l\pi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|,\end{aligned}$$

a wykazaliśmy, że wszystkie te składniki są mniejsze niż pewne wyrażenia zależne tylko od α, zatem sama całka również jest ograniczona z góry.

□

Można się zastanawiać, dlaczego w stwierdzeniu 6.2 zakładamy, że supremum jest wzięte po $a, b \geqslant 1$. Z punktu widzenia porównywania szeregu z całką nie jest istotne, czy rozważamy $a, b \geqslant 0$, czy $a, b \geqslant 1$, bo jeden wyraz nie wpływa na zbieżność szeregu (patrz rozdział 3.2 i równość (3.9)). Jednak w ogólnym przypadku okazuje się, że ten „jeden wyraz” (formalniej należałoby powiedzieć: zachowanie się funkcji w zerze) jest kluczowe. Dowodzą tego stwierdzenia 6.6 i 6.7. Zaczniemy jednak od kilku lematów.

Lemat 6.3. *Dla dowolnej liczby* $x \in [0, 1]$ *zachodzą nierówności*

$$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x.$$

Dowód. Dowód wynika z [8, str. 28] □

Lemat 6.4. *Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi nierówność*

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leqslant 1$$

Dowód. Funkcja $f(x) = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$ jest funkcją parzystą, więc bez straty ogólności załóżmy, że $x > 0$. Jeżeli $x \geqslant 1$, to

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = \frac{|\sin(x)|}{|x|} \leqslant \frac{|\sin(x)|}{1} \leqslant \frac{1}{1} = 1.$$

Jeśli $0 < x < 1$, to teza wynika z pierwszej nierówności lematu 6.3. □

Lemat 6.5. *Dla dowolnej liczby $x \in (0, 1]$ zachodzi nierówność*

$$\frac{\sin(x)}{x} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dowód. Wyznaczmy pochodną funkcji $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ w przedziale $(0, 1]$. Mamy

$$f'(x) = \left[\frac{\sin(x)}{x}\right]' = \frac{[\sin(x)]' \cdot x - \sin(x) \cdot [x]'}{x^2} = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}.$$

Z lematu 6.3 wynikają kolejno nierówności:

$$x \leqslant \operatorname{tg} x \iff x \leqslant \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \iff x\cos(x) \leqslant \sin(x) \iff x\cos(x) - \sin(x) \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} = f'(x) \leqslant 0,$$

co oznacza, że funkcja f jest malejąca na przedziale $(0, 1]$.

Wobec tego najmniejsza wartość f na $(0, 1]$ wynosi $f(1) = \sin 1$, a ponadto zachodzi nierówność $\sin 1 > \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. □

Stwierdzenie 6.6. *Dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R} \setminus [0, 2)$ mamy*

$$\sup_{a,b \in \mathbb{R}_+} \left|\int_a^b \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| = \infty.$$

Dowód. Rozbijemy dowód na dwa przypadki w zależności od α.

(1) $\alpha < 0$

Udowodnimy, że ciąg $c_n = \left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right|$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Zauważmy, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $x \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$ i $\alpha < 0$ zachodzi nierówność $\frac{\sin(x)}{x^\alpha} \geqslant \frac{\sin(x)}{((2n+1)\pi)^\alpha}$, zatem zachodzi nierówność

$$c_n = \left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{((2n+1)\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{((2n+1)\pi)^\alpha} \cdot \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{((2n+1)\pi)^\alpha}.$$

Ciąg $d_n = \frac{2}{((2n+1)\pi)^\alpha}$ jest rozbieżny do $+\infty$ dla $\alpha < 0$, zatem ciąg c_n, którego każdy wyraz jest większy lub równy odpowiadającemu wyrazowi d_n też.

(2) $\alpha \geqslant 2$

Udowodnimy, że ciąg $c_n = \left|\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right|$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Zauważmy, że na mocy lematu 6.5 zachodzi nierówność

$$\frac{\sin(x)}{x^\alpha} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

Ponadto z założenia $\alpha \geqslant 2$ i $x \in (0,1]$ wynika, że

$$\frac{\sin(x)}{x^\alpha} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x} \geqslant 0.$$

Wobec tego zachodzi nierówność

$$c_n = \left|\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [\ln x]_{\frac{1}{n}}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\ln\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln n.$$

Ciąg $d_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln n$ jest rozbieżny do $+\infty$, zatem ciąg c_n, którego każdy wyraz jest większy lub równy odpowiadającemu wyrazowi d_n też.

□

Stwierdzenie 6.7. *Dla wszystkich $\alpha \in [0,2)$ mamy*

$$\sup_{a,b\in\mathbb{R}_+} \left|\int_a^b \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| < \infty.$$

Dowód. Jeżeli $\alpha = 0$, to

$$\sup_{a,b\in\mathbb{R}_+} \left|\int_a^b \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| = \sup_{a,b\in\mathbb{R}_+} \left|\int_a^b \sin(x)\,\mathrm{d}x\right| = \sup_{a,b\in\mathbb{R}_+} |-\cos b + \cos a| \leqslant 2.$$

W dalszej części dowodu będziemy zakładać, że $\alpha \in (0,2)$.

Jeżeli $a, b \geqslant 1$, to teza jest równoważna stwierdzeniu 6.2. W dalszej części dowodu będziemy zakładać, że $a \in (0,1)$.

Udowodnimy, że $\sup_{a\in(0,1)} \left|\int_a^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| < \infty$. Z lematu 6.4 mamy nierówność

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| = \frac{1}{x^{\alpha-1}}\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^{\alpha-1}},$$

zatem zachodzą także nierówności

$$\left|\int_a^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^1 \left|\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2-\alpha}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-2}}\right]_a^1 = \frac{1}{2-\alpha}\left(1-a^{2-\alpha}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2-\alpha}.$$

Rozbijmy całkę z treści stwierdzenia na dwie całki. Mamy

$$\left|\int_a^b \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x + \int_1^b \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^b \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right|.$$

Jeżeli $b \geqslant 1$, to całka $\left|\int_1^b \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right|$ jest ograniczona ze stwierdzenia 6.2. Jeżeli $b \leqslant 1$, to

$$\left|\int_1^b \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_b^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right|,$$

a powyższa całka jest ograniczona przez $\frac{1}{2-\alpha}$, co udowodniliśmy powyżej.

Całka $\left|\int_a^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right|$ również została ograniczona przez $\frac{1}{2-\alpha}$, co udowodniliśmy wyżej, zatem cała suma

$$\left|\int_a^b \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^b \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right|$$

jest ograniczona. □

7. Uzupełnienia

Zadanie 7.1. *Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha n)}{n}$$

jest zbieżny.

Dowód. Ustalmy liczbę naturalną N. Wówczas zajdą nierówności

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(\alpha n)}{n}\right| &= \left|\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(\alpha n)}{n}\right) - \int_1^{N+1}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{N+1}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\sin(\alpha n)}{n}\right) - \int_1^{N+1}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^{N+1}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \\ &= \left|\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\sin(\alpha n)}{n} - \int_n^{n+1}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)\right| + \left|\int_1^{N+1}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

Pierwszy moduł jest ograniczony ze stwierdzenia 4.1, a drugi przez stwierdzenie 3.1, zatem moduły sum częściowych są ograniczone przez pewną stałą liczbę, więc moduł szeregu jest ograniczony. □

Literatura

[1] N.H. Abel, *Untersuchungen über die Reiche* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$, J. reine angew. Math.1 (1826), 311–339.

[2] P. Dirichlet, *Démonstration d'un théorème d'Abel*, Journal de mathématiques pures et appliquées 2nd series, tome 7 (1862), pp. 253–255.

[3] C.D. Evans, W.K. Pattison, *Convergence and divergence testing theory and applications by Integration at a point*, https://arxiv.org/abs/1503.00817v1

[4] G. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy tom 2*, PWN, Warszawa 1999.

[5] W. Freedman, *Abel's summation formula in partially ordered groups*, Topology Appl. 159 (2012), no. 1, 175–182.

[6] A. Khosravi, B. Khosravi, *Generalization of Dirichlet's test and Abel's test*, Int. J. Sci. Technol. Univ. Kashan 1 (2000), no. 1, 29–32.

[7] M. Mursaleen, S.A. Mohiuddine, *Convergence methods for double sequences and applications*, Springer, New Delhi, 2014. x+171 pp. ISBN: 978-81-322-1610-0; 978-81-322-1611-7

[8] R. Szwarc, *Analiza matematyczna ISIM I*, http://www.math.uni.wroc.pl/~szwarc/pdf/AnalizaISIM1.pdf (dostęp: 14.04.2020)

[9] P. Głowacki, *Analiza matematyczna 1 B*, http://www.math.uni.wroc.pl/~glowacki/analizaB.html (dostęp: 14.04.2020)

[10] M. Nathanson, *Additive number theory. The classical bases,* Graduate Texts in Mathematics, 164. Springer-Verlag, New York, 1996. xiv+342 pp. ISBN: 0-387-94656-X.

[11] C. Niculescu, M. Stănescu, *A note on Abel's partial summation formula*, Aequationes Math. 91 (2017), no. 6, 1009–1024.

[12] E.M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier analysis.An introduction,* An introduction. Princeton Lectures in Analysis, 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. xvi+311 pp. ISBN: 0-691-11384-X.

[13] I. Stewart, *Seventeen equations that changed the world*, Profile Books (2012).

[14] Egzamin wstępny na Studium Doktoranckie Instytutu Matematycznego UWr, czerwiec 2007, http://www.math.uni.wroc.pl/studia-doktoranckie-rekrutacja (dostęp: 14.04.2020)

[15] I.M. Vinogradov, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*, Trav. Inst. Math. Stekloff 23, (1947). 109 pp.

[16] A. Zygmund, *Trigonometric series. Vol. I, II.*, Third edition. With a foreword by Robert A. Fefferman. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii; Vol. I: xiv+383 pp.; Vol. II: viii+364 pp. ISBN: 0-521-89053-5.