# XXV Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki

## Serdecznie zapraszamy

W tym roku postanowiliśmy poświęcić zaproszeniu do udziału w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki całą ośmiostronicową wkładkę. Przyczyną tej decyzji jest chęć wytłumaczenia, na czym ten Konkurs polega, oraz zamiar przedstawienia kilku możliwych tematów prac na ten Konkurs.

Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki to rywalizacja między samodzielnymi pracami badawczymi uczniów szkół licealnych (nie wykluczamy też gimnazjalistów, ale nie ma dla nich żadnych specjalnych ułatwień). Praca badawcza zaś to opracowanie tematu, który w taki sposób, jaki został zaprezentowany w pracy konkursowej, jeszcze opracowany nie został. Ten sposób musi się różnić merytorycznie (czyli z punktu widzenia matematyki) od ujęć dostępnych w literaturze, niezależnie od jej nośnika (a więc publikacji papierowej, internetowej, filmowej itd.). Nie interesuje nas zatem inne ułożenie redakcyjne, opatrzenie innymi komentarzami rzeczy gotowych.

Są zresztą konkursy na twórcze opracowanie tematów matematycznych zaproponowanych przez organizatorów tych konkursów.

Matematyka jest jednak na tyle bogata, że każdy może znaleźć dla siebie wiele nierozwiązanych problemów i nie wszystkie z nich wymagają profesjonalnej techniki i rutyny – często błysk natchnienia, muśnięcie skrzydłem muzy wystarczy, by odkryć coś nowego. Zaproponowane w tej wkładce tematy będą sugerowały pewne okolice, w których można takich odkryć poszukiwać. Nie mamy pewności, że te odkrycia tam są, ale mamy pewną rutynę, która pozwala nam wskazywać te, a nie inne, okolice tak, jak geolog może sugerować, gdzie szukać złota czy diamentów.

Laureaci naszych Konkursów, odbywających się już od ćwierć wieku, rozmaicie ułożyli swoje życie. Są jednak wśród nich wybitni uczeni, a kilku młodszych ma „w kieszeni” medal z urządzanego przez Unię Europejską konkursu na Młodego Uczonego Europejskiego. Konkurs zaowocował także wieloma publikacjami w czasopismach fachowych.

Zapraszamy do udziału.

---

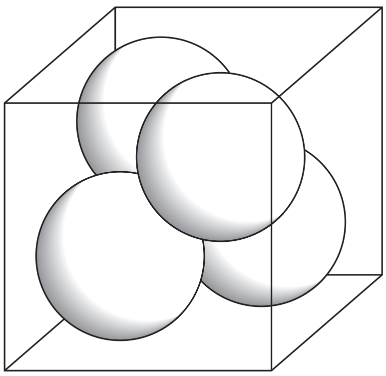
## Oblicz wartość funkcji

Oczywiście istnieje wiele funkcji, dla których nie da się obliczyć ich konkretnych wartości i to już dla, zdawałoby się, najprostszych argumentów. Niektóre z takich problemów mają renomę niesłychanie trudnych (choćby problem obliczania liczb Ramseya – patrz np. *Delta* 1/2002 – powszechnie się sądzi, że znalezienie wartości, powiedzmy, $R(6,6)$ długo jeszcze przekraczać będzie ludzkie możliwości).

Ale czasem funkcja nie ma złej sławy. Weźmy choćby funkcję, która odpowiada na pytanie, jak wielkie kule mogą się zmieścić w sześcianie.

Dokładniej: w sześciennym pudełku o krawędzi 1 znajduje się $n$ jednakowych kul; funkcja $f$ przyporządkowuje każdemu $n$ największą wartość $f(n)$ średnicy kul – $n$ kul o takiej średnicy zmieści się jeszcze w pudełku, $n$ kul o większej średnicy umieścić się w pudełku nie da.

Już z samej definicji widać, że $f$ jest funkcją nierosnącą.



Oczywiście $f(1)=1$. Nie jest specjalnie trudno sprawdzić, że

$$f(2)=\frac{3-\sqrt{3}}{2},\quad f(3)=2-\sqrt{2}=f(4).$$

I tu jest zaskoczenie: funkcja nie jest ściśle malejąca.

Bez trudu można zauważyć, że np. $f(8)=\frac{1}{2}$. Ale jak obliczyć wartości funkcji dla 5, 6, 7, czy innych wartości nie będących sześcianami? A jak często funkcja przyjmuje te same wartości dla kolejnych liczb naturalnych? Czy „postoje” mogą być dłuższe? Jak długie?

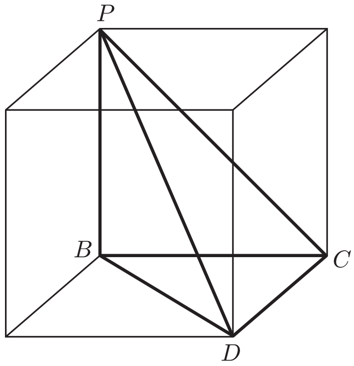
Słowem, pytań jest wiele. Wiele jest też naturalnie zdefiniowanych funkcji do zbadania.

*M. K.*

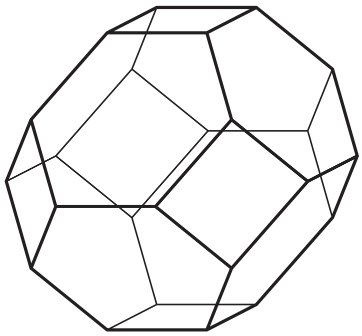
## Wypełnianie przestrzeni

Nie jest trudno wypełnić szczelnie przestrzeń jednakowymi sześcianami – każdy wskaże bez trudu kilka sposobów. Jest niemożliwe szczelne wypełnienie przestrzeni jednakowymi czworościanami foremnymi – co drugi potrafi to udowodnić. Trochę trudniej będzie wykazać, że pokazanym na rysunku 1 czworościanem przestrzeń można szczelnie wypełnić.

W *Kalejdoskopie Matematycznym* Steinhausa (i w *Delcie* 9/1996) można znaleźć informacje, jak wypełnić przestrzeń czternastościanami powstałymi przez obcięcie ośmiościanowi foremnemu wszystkich rogów tak, aby wszystkie krawędzie pozostałego wielościanu były równej długości (rys. 2).




Rys. 1. $PB \perp BC \perp CD \perp PB$ i $PB = BC = CD$



Rys. 2

Kolekcja wypełniających przestrzeń wielościanów wypukłych nie jest pełna. Nie wiadomo już np. jak wyglądają wszystkie czworościany, którymi można szczelnie wypełnić przestrzeń. Albo np. pięciościany. Albo czy istnieje górne ograniczenie na liczbę ścian wielościanu wypukłego, którego kopiami da się szczelnie wypełnić przestrzeń? Pytań można postawić bardzo wiele i zapewne na wiele z nich uda się znaleźć odpowiedź.

Oczywiście problem był i jest badany. Można więc znaleźć informacje o tym, co powszechnie wiadomo. Żadna całościowa teoria na ten temat jednak nie została zbudowana.

Hasła: XVIII problem Hilberta, parkietaż, krystalografia.

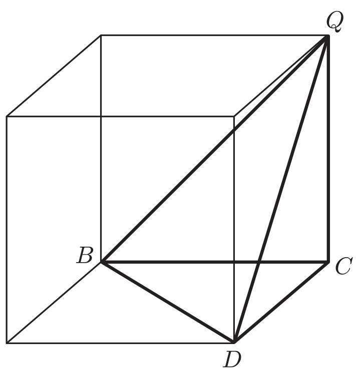
*M. K.*

## Przestrzenne tangramy

Tangram to takie płaskie kostki, z których można ułożyć różne figury. Przestrzenny tangram to takie klocki przestrzenne, z których można ułożyć różne wielościany. Pamiętajmy, że za każdym razem muszą być użyte wszystkie klocki. Czyli równoważne „tangramowo" wielościany mają równe objętości.

Zażądajmy dodatkowo, aby ułożony z takich kostek wielościan był wypukły. Nie jest oczywiste, czy z każdego takiego tangramu można ułożyć choćby dwa różne wypukłe wielościany. Czasami jednak tak się zdarza. Np. czworościan z rysunku 1 można pociąć na mniejsze części – wielościany, z których da się ułożyć sześcian. Nie wiadomo jednak, jaka jest najmniejsza liczba tych mniejszych części.

Ale żadne pocięcie czworościanu foremnego na skończoną liczbę klocków wielościennych nie pozwoli ułożyć z tych klocków sześcianu. Podobnie, żadne pocięcie na skończoną liczbę wielościennych klocków czworościanu z rysunku 3 nie pozwoli na ułożenie z nich sześcianu. Ale czy jakieś klocki z tego czworościanu pozwolą na ułożenie z nich czworościanu foremnego?




Rys. 3. $QC \perp BC \perp DC \perp QC$ i $QC = BC = DC$

Zauważmy, że mamy dość zaskakujący wynik: czworościany z rysunków 1 i 3 nie są „tangramowo" równoważne.

A czy któryś z tych czworościanów jest „tangramowo" równoważny z czternastościanem z rysunku 2?

Dla dowolnego konkretnego wielościanu można poszukać jak najwięcej wielościanów, z którymi jest „tangramowo" równoważny.

Istnieje dość rozwinięta teoria zajmująca się takimi tangramami. Jednak rezultatów dotyczących konkretnych wielościanów jest w niej mało. Stąd pole do popisu.

Hasła: III problem Hilberta, niezmiennik Dehna, równoważność przez rozkład.

*M. K.*

## Liczby niedoskonałe

Pitagorejczycy nadawali duże znaczenie liczbom doskonałym, czyli takim liczbom naturalnym, które są równe sumie swoich dzielników właściwych (różnych od samej tej liczby). Nazwijmy liczbę naturalną *poddoskonałą*, gdy suma jej dodatnich dzielników właściwych jest od niej mniejsza (np. 4), a *naddoskonałą* – gdy suma jej dodatnich dzielników właściwych jest od niej większa (np. 12). Łatwo zauważyć, że liczb poddoskonałych jest nieskończenie wiele, ponieważ każda liczba pierwsza jest poddoskonała. Czy liczb naddoskonałych też jest nieskończenie wiele? Czy istnieją dowolnie długie ciągi kolejnych liczb naddoskonałych? A liczb poddoskonałych? Które liczby – poddoskonałe czy naddoskonałe – są gęściej rozmieszczone wśród liczb naturalnych? A może istnieje granica stosunku liczby liczb naddoskonałych nie większych od $n$ do $n$? Pytania można mnożyć (niemal) bez ograniczeń.

*W. B.*

## Znaczące współczynniki

Wykres funkcji liniowej

$$f(x) = ax + b$$

zależy od każdego ze współczynników: $a$ decyduje o nachyleniu prostej, $b$ o jej położeniu względem osi współrzędnych. Wiemy, co się dzieje z funkcją kwadratową postaci

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

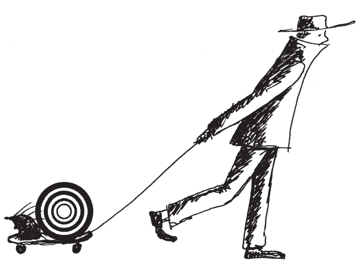
gdy zmieniamy współczynnik $a$: ramiona paraboli będą zmieniać nachylenie, może nastąpić odwrócenie paraboli. Wiemy także, co się stanie, gdy zmieniać będziemy współczynnik $c$, a nawet potrafimy powiedzieć, co się dzieje z parabolą, gdy zmieniamy tylko współczynnik $b$ (właśnie, co?). Czy można w podobny sposób opisać znaczenia współczynników wielomianów wyższych stopni, poczynając od stopnia trzeciego? Jak wpływa na wykres zmiana każdego z nich? Pewne intuicje można sobie zapewne wyrobić na podstawie wykresów oglądanych na ekranie komputera lub kalkulatora graficznego, ale czy można je uściślić i opisać matematycznie?

*W. B.*

## Ukryta podzielność

Kiedy wartości wielomianu o współczynnikach całkowitych są dla wszystkich całkowitych argumentów podzielne przez ustaloną liczbę $n$? Na pewno wtedy, gdy wszystkie współczynniki danego wielomianu są podzielne przez $n$. To tak oczywisty przypadek, że nawet nie warto o nim wspominać. Ale czy tylko wtedy? Co będzie, kiedy współczynniki wielomianu nie mają wspólnego dzielnika większego od 1? Wtedy mimo wszystko wartości wielomianu mogą być podzielne przez ustaloną liczbę większą od 1!

Najprostszy przykład to wielomian $x^2 + x$, którego wartość dla dowolnej liczby całkowitej $x$ jest parzysta. Podobnie, wartości wielomianu $x^3 + 5x$ są zawsze podzielne przez 6.



I stąd już możesz, drogi Czytelniku, wypłynąć na szerokie wody badacza ukrytych podzielności. Możesz znaleźć mnóstwo takich wielomianów. Może uda Ci się je jakoś sklasyfikować lub udowodnić jakieś twierdzenia o tym, kiedy taka ukryta podzielność na pewno występuje albo kiedy nie występuje. A jak tego będzie mało, zawsze można uciec w wielomiany wielu zmiennych, np. wartość wielomianu $xy^{25} - x^{49}y$ dla dowolnych całkowitych argumentów $x$ i $y$ jest podzielna przez 2730.

*Jarosław WRÓBLEWSKI*

## Wyznaczniki dużych macierzy

Na ogół niewiele da się powiedzieć o wyznaczniku dużej macierzy poza podaniem definicji wyznacznika lub żmudnym wyliczeniem go w konkretnym przypadku.

Ale jeżeli macierz jest szczególnej postaci...

Co to znaczy „szczególnej postaci”? A to już zależy od Waszej inwencji twórczej.

Wyobraźmy sobie, że mamy macierz zbudowaną według prostego przepisu (a raczej ciąg $(A_n)$ macierzy o wzrastających rozmiarach).

Na przykład macierz $n$ na $n$ postaci

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ma dwójki na przekątnej, jedynki bezpośrednio pod i nad przekątną, a poza tym zera.

Ile jest równy wyznacznik macierzy $A_n$? Nietrudno dostrzec, że $\det A_n = 2\det A_{n-1} - \det A_{n-2}$, skąd otrzymujemy $\det A_n = n+1$.

A czemu jest równy wyznacznik macierzy

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

A macierzy

$$C_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

A innych, wymyślonych przez Was macierzy?

*Jarosław WRÓBLEWSKI*

## A jednak całkowite

Liczba

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

jest całkowita dla dowolnych liczb naturalnych $m$ i $n$. Fakt ten i niezliczone dowody jego są tak znane, że przytaczać ich po prostu nie wypada.

Jeśli jednak rozważymy liczbę

$$\frac{(m+n-1)!}{m!n!},$$

to na ogół nie będzie ona całkowita. Chyba że w jakiś szczególny sposób powiążemy $m$ i $n$.

Na przykład liczba
$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$
jest całkowita dla każdego $n$. Nie jest mi znany kombinatoryczny dowód tego faktu, można go jednak udowodnić, wykorzystując nierówność
$$\left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{n+1}{k}\right] \leqslant \left[\frac{2n}{k}\right],$$
gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby $x$.

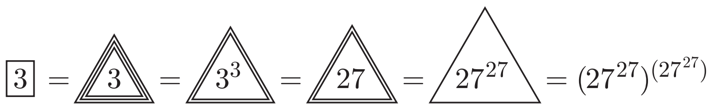
I tu zadanie dla Ciebie, drogi Czytelniku. Znaleźć inne sytuacje, w których liczba
$$\frac{(m+n-1)!}{m!n!}$$
jest całkowita. Mogą to być warunki na $m$ i $n$ (np. $m$, $n$ większe od 0 i $m{+}n$ pierwsza) lub przykłady wyrażeń postaci
$$\frac{(an+cn+b+d-1)!}{(an+b)!(cn+d)!},$$
(gdzie $a$, $b$, $c$, $d$ są ustalone) przyjmujących wartość całkowitą dla każdego $n$. Może uda Ci się udowodnić twierdzenia postaci *jak $a$, $b$, $c$, $d$ są takie a takie, to jest dobrze, a jak są takie a takie, to jest źle.*

Ciekawa byłaby też odpowiedź na pytanie, czy istnieją takie $a$, $b$, $c$, $d$, że liczba
$$\frac{(an+cn+b+d-2)!}{(an+b)!(cn+d)!}$$
jest całkowita dla każdego $n$ lub rozsądnie ogólny warunek na $m$ i $n$ pociągający całkowitość liczby
$$\frac{(m+n-2)!}{m!n!}.$$

*Jarosław WRÓBLEWSKI*

## Magia liczby

Znana jest konstrukcja liczby mega pochodząca od Hugona Steinhausa i liczby moser pochodząca od Leo Mosera. Liczba $a$ w trójkącie to prostu liczba $a^a$. Liczba $a$ w prostokącie to liczba $a$ otoczona $a$ trójkątami.




Liczba $a$ w pięciokącie to liczba $a$ otoczona $a$ prostokątami. Liczba mega to liczba 2 w pięciokącie. Moser to liczba 2 otoczona mega-kątem.

Skonstruujmy inną serię wielkich liczb. Dla dowolnych liczb naturalnych $b$ i $n$ przyjmijmy
$$(b,1,n) = \underbrace{b+b+\ldots+b}_{n \text{ razy}} = b \textcircled{1} n.$$

Oczywiście znaczek $\textcircled{1}$ zastępuje tu znak mnożenia.
Dla $k \geqslant 2$ przyjmijmy
$$(b,k,n) = \underbrace{b \textcircled{k-1} b \textcircled{k-1} \ldots \textcircled{k-1} b}_{n \text{ razy}} = b \textcircled{k} n,$$
umawiając się, że działania wykonujemy „od tyłu" (tzn. od prawej do lewej). Jak za pomocą liczb $(b,k,n)$ oszacować z dołu i z góry liczbę mega i moser? A może skonstruujecie inne liczby, które przydadzą się w szacunkach?

*Przemysław PANEK i W. S.*