

Wielomiany z podłogami

Adam Klukowski

Dla względnie pierwszych liczb całkowitych dodatnich definiujemy $P_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{mn-1} x^{\lfloor \frac{k}{m} \rfloor + \lfloor \frac{k}{n} \rfloor}$.
Celem tej pracy jest wykazanie, że wszystkie pierwiastki zespolone $P_{m,n}$ mają moduł równy 1.

0. Mamy $\deg(P_{m,n}) = \lfloor \frac{mn-1}{m} \rfloor + \lfloor \frac{mn-1}{n} \rfloor = n-1 + m-1 = m+n-2$

1. Niech $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^{m+n} = 1$. Obliczmy $P_{m,n}(\zeta)$.

Zacniemy od $P_{m,n}(\zeta^n)$. Mamy

$$P_{m,n}(\zeta^n) = \sum_{k=0}^{mn-1} \zeta^{n \lfloor \frac{k}{m} \rfloor + n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor} = \sum_{k=0}^{mn-1} \zeta^{-m \lfloor \frac{k}{m} \rfloor + n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor} = \sum_{k=0}^{mn-1} \zeta^{(k-m \lfloor \frac{k}{m} \rfloor) - (k-n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor)} = \sum_{k=0}^{mn-1} \zeta^{(k \bmod m) - (k \bmod n)}$$

Liczby m, n są względnie pierwsze, więc funkcja $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ postaci $k \rightarrow (k \bmod m, k \bmod n)$ jest bijekcją. Zatem

$$\sum_{k=0}^{mn-1} \zeta^{(k \bmod m) - (k \bmod n)} = \sum_{\substack{0 \leq a < m \\ 0 \leq b < n}} \zeta^{a-b} = \left(\sum_{a=0}^{m-1} \zeta^a \right) \left(\sum_{b=0}^{n-1} \zeta^{-b} \right)$$

co dla $\zeta \neq 1$ daje

$$P_{m,n}(\zeta^n) = \frac{(1 - \zeta^m)(1 - \zeta^{-n})}{(1 - \zeta)(1 - \zeta^{-1})} = \frac{(1 - \zeta^{-n})^2}{(1 - \zeta)(1 - \zeta^{-1})}$$

Oznaczmy odwrotność n modulo $n+m$ przez l . $n+m$ i n są względnie pierwsze, więc l istnieje. Zatem $\zeta^{n+m} = 1 \wedge \zeta \neq 1 \Rightarrow (\zeta^l)^{n+m} = 1 \wedge \zeta^l \neq 1$. W takim razie

$$P_{m,n}(\zeta) = P_{m,n}((\zeta^l)^n) = \frac{(1 - \zeta^{-nl})^2}{(1 - \zeta^l)(1 - \zeta^{-l})} = \frac{(1 - \zeta^{-1})^2}{(1 - \zeta^l)(1 - \zeta^{-l})}$$

2. Zdefiniujmy $O_{m,n}(x) = \frac{P_{m,n}(x^2)}{x^{m+n-2}}$. Rozpatrzmy tę funkcję dla $x \in \mathbb{C}$ o module 1.

Pokażemy, że dla x o module 1 zachodzi $O_{m,n}(x) \in \mathbb{R}$. Dowód będzie sformalizowaniem spostrzeżenia, że ciąg współczynników wielomianu P jest palindromem. Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{mn-1-k}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{mn-1-k}{n} \right\rfloor &= \left\lfloor n - \frac{1+k}{m} \right\rfloor + \left\lfloor m - \frac{1+k}{n} \right\rfloor = n + \left\lfloor \frac{-1-k}{m} \right\rfloor + m + \left\lfloor \frac{-1-k}{n} \right\rfloor = \\ &= n - \left\lceil \frac{k+1}{m} \right\rceil + m - \left\lceil \frac{k+1}{n} \right\rceil = n - \left(1 + \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor \right) + m - \left(1 + \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \right) = m+n-2 - \left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

Mamy

$$\overline{O_{m,n}(x)} = \sum_{k=0}^{mn-1} x^{2-m-n+2\lfloor \frac{k}{m} \rfloor + 2\lfloor \frac{k}{n} \rfloor} = \sum_{k=0}^{mn-1} x^{m+n-2-2\lfloor \frac{k}{m} \rfloor - 2\lfloor \frac{k}{n} \rfloor}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że dla $x \in \mathbb{C}$ o module 1 zachodzi $\bar{x} = x^{-1}$. Korzystając z naszego spostrzeżenia dostajemy

$$\sum_{k=0}^{mn-1} x^{m+n-2-2\lfloor \frac{k}{m} \rfloor - 2\lfloor \frac{k}{n} \rfloor} = \sum_{k=0}^{mn-1} x^{2\lfloor \frac{mn-1-k}{m} \rfloor + 2\lfloor \frac{mn-1-k}{n} \rfloor + 2-m-n}$$

co po zmianie kolejności sumowania daje

$$\sum_{k=0}^{mn-1} x^{2\lfloor \frac{mn-1-k}{m} \rfloor + 2\lfloor \frac{mn-1-k}{n} \rfloor + 2-m-n} = \sum_{k=0}^{mn-1} x^{2\lfloor \frac{k}{m} \rfloor + 2\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 2-m-n} = O_{m,n}(x)$$

Zatem dla x o module 1 zachodzi $\overline{O_{m,n}(x)} = O_{m,n}(x)$, czyli $O_{m,n}(x) \in \mathbb{R}$.

3. Rozpatrzmy funkcję $D : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ postaci $D(t) = O_{m,n}(e^{\frac{\pi it}{m+n}})$.

Jest ona ciągła, ponieważ jest złożeniem funkcji ciągłych. Ponadto, dla $k \in \{1, 2, \dots, m+n-1\}$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{k\pi}{m+n}\right) &= O_{m,n}\left(e^{\frac{\pi ik}{m+n}}\right) = e^{\frac{\pi ik}{m+n}(2-m-n)} P_{m,n}\left(e^{\frac{2\pi ik}{m+n}}\right) = \\ &= e^{-\pi ik} e^{\frac{2\pi ik}{m+n}} \frac{\left(1 - e^{\frac{-2\pi ik}{m+n}}\right)^2}{\left(1 - e^{\frac{2\pi ikl}{m+n}}\right)\left(1 - e^{\frac{-2\pi ikl}{m+n}}\right)} = -(-1)^k \frac{\left(1 - e^{\frac{2\pi ik}{m+n}}\right)\left(1 - e^{\frac{-2\pi ik}{m+n}}\right)}{\left(1 - e^{\frac{2\pi ikl}{m+n}}\right)\left(1 - e^{\frac{-2\pi ikl}{m+n}}\right)} = (-1)^{k+1} \frac{1 - \cos \frac{2\pi k}{m+n}}{1 - \cos \frac{2\pi kl}{m+n}} \end{aligned}$$

k jest niepodzielna przez $m+n$, a skoro l i $m+n$ są względnie pierwsze, to kl również. Zatem $\frac{2\pi k}{m+n}, \frac{2\pi kl}{m+n}$ nie są całkowitymi wielokrotnościami 2π , czyli ich cosinusy są ściśle mniejsze od 1. Zatem $\frac{1 - \cos \frac{2\pi k}{m+n}}{1 - \cos \frac{2\pi kl}{m+n}} > 0$, więc wartość $D(\frac{\pi k}{m+n})$ jest tego samego znaku co $(-1)^{k+1}$.

Wobec ciągłości funkcji D oznacza to, że ma ona miejsce zerowe na każdym przedziale $(\frac{\pi k}{m+n}, \frac{\pi(k+1)}{m+n})$ dla $k \in \{1, 2, \dots, m+n-2\}$. Ale jeśli $D(t) = 0$, to $P_{m,n}(e^{2\pi it}) = 0$. Zatem dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, m+n-2\}$ istnieje pierwiastek $P_{m,n}$ leżący na łuku okręgu jednostkowego, na którym argumenty zawierają się w przedziale $(\frac{2\pi k}{m+n}, \frac{2\pi(k+1)}{m+n})$. $1 \leq k \leq m+n-2$, więc łuki te są rozłączne. W takim razie $P_{m,n}$ ma $m+n-2 = \deg(P_{m,n})$ pierwiastków na okręgu jednostkowym.

Komentarz

Twierdzenie jest prawdziwe również dla niekoniecznie względnie pierwszych m, n , ponieważ

$$\sum_{k=0}^{d^2mn-1} x^{\lfloor \frac{k}{dm} \rfloor + \lfloor \frac{k}{dn} \rfloor} = d \left(\sum_{j=0}^{d-1} x^{j(m+n)} \right) \left(\sum_{k=0}^{mn-1} x^{\lfloor \frac{k}{m} \rfloor + \lfloor \frac{k}{n} \rfloor} \right)$$

A wielomian w pierwszym nawiasie jest dzielnikiem $x^{d(m+n)} - 1$.

Na zakończenie kilka ciekawostek:

- $P_{m,n}(x)$ można zapisać jako

$$P_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{m+n-2} \min\{m, n, mk + m \bmod m+n, nk + n \bmod m+n\} x^k$$

- Lub równoważnie (zakładamy $m < n$, w wykładnikach dzielimy modulo)

$$P_{m,n}(x) = p \frac{x^{m+n-1} - 1}{x - 1} - \sum_{k=1}^{m-1} k \left(x^{\left(\frac{k}{n} \bmod m+n\right)} + x^{\left(\frac{k}{m} \bmod m+n\right)-2} \right)$$

- Konstruując wielomian równy $P_{m,n}$ w pierwiastkach stopnia $m+n$ z jedynki i porównując ze wzorem u góry strony dostajemy ładnie wyglądający wzór

$$\sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{\zeta^{kmj}(1 - \zeta^{-kn})^2}{(1 - \zeta^k)(1 - \zeta^{-k})} = (m+n) \min\{m, n, mj + m \bmod m+n, nj + n \bmod m+n\}$$

dla $0 \leq j < m+n$ i $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m+n}}$

- Stosując analizę Fourierowską dostajemy

$$P_{m,n}(x) = (1 - x^{m+n}) \int_0^{2\pi} \frac{(1 - e^{im\theta})(1 - e^{-in\theta})}{(1 - xe^{im\theta})(1 - xe^{-in\theta})(1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})} d\theta$$

dla $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$

- Zera funkcji $D(t)$ są również rozwiązaniami równania (zakładamy $m < n$)

$$\begin{aligned} \sin(m+n-1)t \left(m - 2 \sin t \sum_{k=1}^{m-1} k \sin \left(2 \left(\frac{k}{n} \bmod m+n \right) + 1 \right) t \right) = \\ = 2 \cos(m+n-1)t \sin t \sum_{k=1}^{m-1} k \cos \left(2 \left(\frac{k}{n} \bmod m+n \right) + 1 \right) t \end{aligned}$$

co dla $\min\{m, n\} \leq 3$ przy zastosowaniu podobnej metody pozwala na odrobinę dokładniejsze zlokalizowanie pierwiastków P .