

O pewnej charakteryzacji równoległościanu

Grzegorz Dłużewski

1 kwietnia 2016

Twierdzenie 1. Dany jest czworokąt (niekoniecznie płaski). Wówczas suma kwadratów długości jego boków jest co najmniej taka jak suma kwadratów długości jego przekątnych, przy czym równość zachodzi wtedy, gdy czworokąt jest równoległobokiem.

Okazuje się, że można ową nierówność, tudzież charakteryzację równoległoboku, przenieść do przestrzeni i rzec rzecz następującą:

Twierdzenie 2. Dany jest kuboid. Wówczas suma kwadratów długości jego przekątnych jest co najmniej taka jak suma kwadratów długości jego krawędzi, przy czym równość zachodzi wtedy, gdy kuboid jest równoległościanem.

Kuboid jest to wielościan o sześciu ścianach, ośmiu wierzchołkach, którego każda ściana jest czworokątem i w którego każdym wierzchołku spotykają się trzy ściany (patrz rysunek).

Rozpocznijmy od dowodu twierdzenia 1., gdyż przyda się ono przy wykazaniu twierdzenia 2.:

Dowód. (twierdzenie 1.) Dowód przeprowadzimy korzystając z własności iloczynu skalarnego. Oznaczmy wierzchołki czworokąta kolejno jako A, B, C i D oraz niech $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i $\vec{d}$ oznaczają odpowiednio AB, BC, CD i DA . Wiadomo, że $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. Mnożąc skalarnie obie strony równości przez $\vec{a}$ otrzymujemy, że $\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} = 0$. Ponadto:

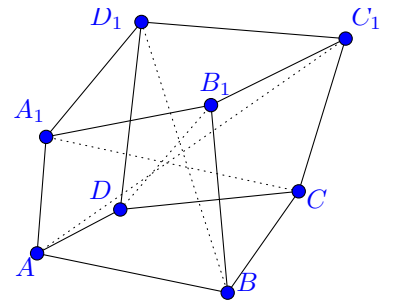
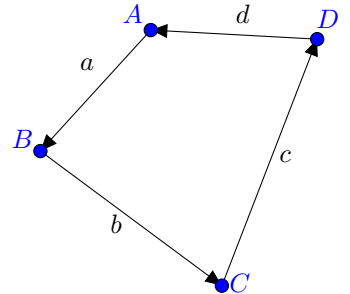
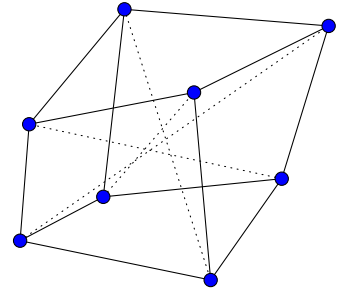
$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 + 2 \cdot \vec{0} = \\ &= 3\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{d} = (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{d} + \vec{a})^2 + (\vec{a} + \vec{c})^2 = \\ &= AC^2 + BD^2 + (\vec{a} + \vec{c})^2 \geq AC^2 + BD^2 \end{aligned}$$

Faktycznie widzimy, że równość w nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{a} = -\vec{c}$, czyli kiedy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, czego należało dowieść.

Dowód. (twierdzenie 2.) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku: niech wierzchołki dolnej podstawy kuboidu to A, B, C i D , zaś górnej to A_1, B_1, C_1, D_1 . Zastosujemy twierdzenie 1. dla czworokątów $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ oraz dla BB_1D_1D i AA_1C_1C . Dla wygody przyjmijmy oznaczenie $S(XYZT)$ = suma kwadratów długości boków czworokąta $XYZT$ oraz niech S i T oznaczają odpowiednio sumę kwadratów długości krawędzi i sumę kwadratów długości przekątnych kuboidu. Wówczas:

$$\begin{aligned} S &= S(ABCD) + S(A_1B_1C_1D_1) + AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 + DD_1^2 \geq \\ &\geq AC^2 + BD^2 + A_1C_1^2 + B_1D_1^2 + AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 + DD_1^2 = \\ &= S(AA_1C_1C) + S(BB_1D_1D) \geq AC_1^2 + A_1C^2 + BD_1^2 + B_1D^2 = T \end{aligned}$$

Równość w powyższej nierówności zajdzie wtedy, gdy wyżej wymienione czworokąty staną się równoległobokami, a wtedy kuboid będzie równoległościanem.



Jednak tę zależność można jeszcze uogólnić.

Twierdzenie 3. Dany jest n -kuboid. Wówczas suma kwadratów długości jego krawędzi jest co najmniej taka jak suma kwadratów długości jego głównych przekątnych, przy czym równość zachodzi wtedy, gdy n -kuboid jest n -równoległościanem.

Warto teraz wspomnieć, czym są wspomniane n -kuboidy i n -równoległościany.

n -Równoległościan (czy też równoległościan n -wymiarowy) to bryła, która powstaje poprzez translację równoległościanu $n - 1$ -wymiarowego o wektor nienależący do tej samej $n - 1$ -wymiarowej płaszczyzny, co powyższy $n - 1$ -równoległościan i połączenie krawędziami odpowiadających sobie wierzchołków w $n - 1$ -równoległościanach. 2-równoległościan jest równoległobokiem, zaś 3-równoległościan jest zwykłym równoległościanem.

n -Kuboid z kolei jest bryłą niekoniecznie n -wymiarową, lecz co najmniej n -wymiarową. Wybierzmy bowiem w przestrzeni 2^n punktów $A_1, A_2, \dots, A_{2^n}$ i połączmy krawędziami te punkty, których indeksy różnią się w zapisie binarnym na dokładnie jednym miejscu. Niech ponadto wierzchołki tej bryły, które mają takie same jedno miejsce w zapisie binarnym (na przykład $A_1 A_2 \dots A_{2^{n-1}}$ - wszystkie mają 0 na n -tym miejscu) wraz z krawędzi je łączącymi były $n - 1$ -kuboidami (to znaczy, niech również tworzą bryłę co najmniej $n - 1$ -wymiarową). Tak powstała bryła to n -kuboid, 2-kuboidem jest dowolny czworokąt - niekoniecznie płaski.

Ponadto główne przekątne n -kuboidu to odcinki pomiędzy tymi jego wierzchołkami, których suma indeksów wynosi $2^n + 1$.

Skoro więc 2-kuboid jest dowolnym czworokątem (niekoniecznie płaskim), to twierdzenie 3. dla przypadków $n = 2, 3$ to nic innego, jak twierdzenia 1. i 2.

Dowód. (twierdzenie 3.) Będziemy rozumować indukcyjnie, podobnie jak w przypadku $n = 3$.

Krok indukcyjny. Przyjrzyjmy się czworokątom $A_i A_{2^{n-1}+i} A_{2^n+1-i} A_{2^{n-1}+1-i}$. Przekątne tych czworokątów to główne przekątne n -kuboidu, zaś krawędzie to główne przekątne $n - 1$ -kuboidów $A_1, A_2, \dots, A_{2^{n-1}}$ i $A_{2^{n-1}+1}, A_{2^{n-1}+2}, \dots, A_{2^n}$ (oznaczymy je przez X i Y) oraz krawędzie pomiędzy odpowiadającymi wierzchołkami w $n - 1$ -kuboidach X i Y . Niech S_X, S_Y oraz T_X, T_Y oznaczają sumy kwadratów długości krawędzi oraz sumy kwadratów długości głównych przekątnych w odpowiadających $n - 1$ -kuboidach X i Y . Przyjmując więc oznaczenia z dowodu twierdzenia 2. oraz stosując twierdzenie 1., jak również założenie indukcyjne ($S_X \geq T_X$ i $S_Y \geq T_Y$) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S &= S_X + S_Y + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} A_i A_{2^{n-1}+i}^2 \geq T_X + T_Y + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} A_i A_{2^{n-1}+i}^2 = \sum_{i=1}^{2^{n-2}} A_i A_{2^{n-1}+i}^2 + A_{2^{n-1}+i} A_{2^n+1-i}^2 + \\ &+ A_{2^n+1-i} A_{2^{n-1}+1-i}^2 + A_{2^{n-1}+1-i} A_i^2 \geq \sum_{i=1}^{2^{n-2}} A_i A_{2^n+1-i}^2 + A_{2^{n-1}+i} A_{2^{n-1}+1-i}^2 = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} A_i A_{2^n+1-i}^2 = T \end{aligned}$$

Zatem, rzeczywiście suma kwadratów krawędzi w n -kuboidzie (S) jest nie mniejsza od sumy kwadratów długości głównych przekątnych (T), przy czym równość zachodzi, gdy we wszystkich powyższych nierównościach zachodzą równości. Dzieje się to wtedy, gdy $n - 1$ -kuboidy X i Y są $n - 1$ -równoległościanami (bowiem wtedy $S_X = T_X$ i $S_Y = T_Y$) oraz każdy z czworokątów $A_i A_{2^{n-1}+i} A_{2^n+1-i} A_{2^{n-1}+1-i}$ jest równoległobokiem. Drugi z tych faktów implikuje, iż wszystkie odcinki $A_i A_{2^{n-1}+i}$ są równoległe i równe. Wobec tego, wyjściowy n -kuboid powstaje poprzez translację $n - 1$ -równoległościanu X o wektor $A_1 A_{2^{n-1}+1}$.

Zatem rzeczywiście jest on n -równoległościanem.

Lecz to nie koniec ciekawych własności n -równoległościanów:

Twierdzenie 4. Dowolny k -kuboid, którego wierzchołki i krawędzie są wierzchołkami i krawędziami n -równoległościanu ($k \leq n$) jest k -równoległościanem.

Skoro w dowolnym n -kuboidzie krawędzie występują jedynie między tymi parami jego wierzchołków, których indeksy różnią się w zapisie binarnym na dokładnie jednym miejscu, to nazwijmy krawędź takiego n -kuboidu l -tą, jeśli różnica ta występuje na l -tym miejscu. Dwie krawędzie nazwiemy pseudorównoległymi, jeśli dla obu ta liczba jest taka sama. Krawędziami jednego kierunku l nazwiemy zbiór wszystkich krawędzi n -kuboidu pomiędzy wierzchołkami, których indeksy różnią się na l -tym miejscu.

Zbiór pseudorównoległych krawędzi B pewnego n -kuboidu nazwiemy *osiągalnym* z pewnego zbioru pseudorównoległych krawędzi A tego n -kuboidu, jeżeli:

- a) dla każdej krawędzi w B , która nie jest w A istnieje krawędź w A taka, że wszystkie krawędzie czworokąta wyznaczonego przez te dwie krawędzie są krawędziami n -kuboidu lub
 - b) jest osiągalny ze zbioru A' tego n -kuboidu, który jest z kolei osiągalny ze zbioru A .
- Ponadto zbiór A osiąga sam siebie.

Lemat. Zbiór wszystkich krawędzi jednego kierunku pewnego n -kuboidu jest osiągalny z jednej krawędzi tego kierunku.

Dowód (lemat.) Stwórzmy graf z wierzchołkami ponumerowanymi od 1 do $2^n - 1$, gdzie krawędzie będą występować jedynie między takimi dwoma wierzchołkami, których indeksy w zapisie binarnym różnią się na dokładnie jednym miejscu.

Z jednej strony graf ten żywo przypomina nam $n - 1$ -kuboid, można więc bez wątpienia stwierdzić, iż jest on grafem spójnym. Z drugiej zaś strony, skoro pseudorównoległe krawędzie to krawędzie między wierzchołkami, których indeksy różnią się na tym samym miejscu w zapisie binarnym, to każdej z nich można przypisać wierzchołek w tym grafie.

Co więcej, krawędź między dwoma wierzchołkami A i B w tym grafie oznacza, że odpowiadające im krawędzie są przez siebie osiągane w sposób a). Skoro więc ten graf jest spójny, to cały ten zbiór jest osiągalny z jednego jego wierzchołka.

Dowód (twierdzenie 4.) Zauważmy, że usuwając wszystkie krawędzie jednego kierunku dzielimy ten n -kuboid na dwa $n - 1$ -kuboidy. Skoro więc w n -równoległoboku zachodzi równość $S = T$, to niezależnie, którego kierunku krawędzie usuniemy, zawsze uzyskamy dwa $n - 1$ -równoległosciany (bowiem tylko wtedy znajdą równości $S_X = T_X$ i $S_Y = T_Y$). Ponadto okazuje się, że wszystkie krawędzie jednego kierunku są równoległe i równe (wynika to z równości przy drugiej nierówności), więc w n -równoległoboku każdy czworokąt, którego krawędzie są krawędziami tego n -równoległoscianu jest równoległobokiem (wynika to również z indukcyjnej konstrukcji n -równoległoscianu).

Weźmy zatem ów k -kuboid, którego krawędzie są krawędziami n -równoległoboku. Wszystkie jego krawędzie jednego kierunku (patrząc z perspektywy k -kuboidu) są na mocy lematu osiągalne z jednej krawędzi tego kierunku. Ale skoro wszystkie czworokąty n -równoległoscianu, w którym zawarty jest ten k -kuboid są równoległobokami, to osiągalność ta oznacza, że wszystkie krawędzie jednego kierunku są równoległe i równe. Wobec tego, rzeczywiście ten k -kuboid jest k -równoległoscianem.

Lecz to nie koniec własności n -równoległoscianów. Okazuje się bowiem, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5. Dowolny k -równoległobok, którego krawędzie są krawędziami n -równoległoscianu można "dokonstruować" do tego n -równoległoscianu.

Innymi słowy, dla tego n -równoległoscianu istnieje zawarty weń $n - 1$ -równoległoscian, dla niego zaś istnieje zawarty weń $n - 2$ -równoległoscian, ..., dla niego zaś istnieje zawarty weń $k + 1$ -równoległoscian, taki że jest w nim zawarty ów k -równoległoscian.

Dowód (twierdzenie 5.) Policzmy na początku liczbę k -równoległoscianów, które można "dokonstruować" do wyjściowego n -równoległoscianu. Można o tym również myśleć, jak o redukowaniu n -równoległoscianu do k -równoległoscianu. W każdym ruchu możemy wybrać sobie kierunek i usunąć wszystkie krawędzie tego kierunku, a następnie wybrać jeden z dwóch tak powstałych o 1 mniejszych równoległoscianów. Zauważmy jednak, że kolejność wyboru kierunków w przeciwieństwie do wyboru kierunków, które wystąpią oraz do wyboru jednego z dwóch o jeden mniejszych równoległoscianów, wcale nie wpływa na to, jaki k -równoległoscian uzyskamy na

końcu redukcji.

Wobec tego, liczba k –równoległoscianów, do których można dojść z n –równoległoscianu wskutek redukcji wynosi $\binom{n}{n-k}2^{n-k}$, bowiem za każdym usunięciem kierunku (których jest $n - k$) dokonujemy wyboru pomiędzy dwoma o 1 mniejszymi równoległoscianami (stąd 2^{n-k}). Ponadto, na $\binom{n}{n-k}$ sposobów wybieramy, które kierunki usuwamy.

Z drugiej zaś strony, każdy k –równoległoscian w n –równoległoscianie oparty jest na k kierunkach n –równoległoscianu. Wynika z tego, że dla każdego wierzchołka k –równoległoscianu $n - k$ miejsc w zapisie binarnym jego wierzchołków jest takich samych. Ponadto, wybranie $n - k$ miejsc w zapisie binarnym spośród n i wybranie dlań wartości w pełni determinuje k –równoległoscian. Wobec tego, k –równoległoscianów w n –równoległoscianie jest $\binom{n}{n-k}2^{n-k}$, gdyż na $\binom{n}{n-k}$ sposobów można wybrać miejsca w zapisie binarnym, zaś na 2^{n-k} sposobów wartości dla nich.

Wobec tego, skoro jest tyle samo k –równoległoscianów w n –równoległoscianie, co k –równoległoscianów, do których można zredukować n –równoległoscian, to rzeczywiście twierdzenie 5. jest prawdziwe.