



deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

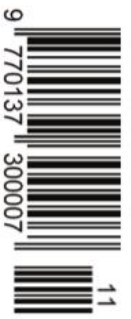
$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592$

NR 11 (558) 2020
CENA 5,5 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 5587
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

Hillel Furstenberg

$$\begin{aligned} R(K) &\xrightarrow{C} AB(K^II) \xrightarrow{AS \cap DR} BD(K^III) \xrightarrow{C} AS \\ R(K) &\rightarrow AS(L) \xrightarrow{D} CA(L^I) \rightarrow S^I(S^I L^I) \end{aligned}$$



Nakład: 3500 egz.

Gregory Margulis



ABEL
PRISEN
2020

SPIS TREŚCI NUMERU 11 (558)

Nagrody Abela w roku 2020
Mariusz Lemańczyk


 Zadania


Infekcja
Jarosław Górnicki

Czy można usłyszeć kształt bębna?
Joanna Jasińska

Co ma wspólnego cykl (6, 5, 4) z językiem polskim?
Bartłomiej Pawlik

Podróże w \mathbb{N}^d
Wojciech Czerwiński

 Wycieczka na Wenus
Lech Falandysz

 Kto z kim, kiedy i gdzie?
Magdalena Fikus

Gry głosowania ważonego
Oskar Skibski


Trysekcja kąta w *Geometrii* Kartezjusza
Grzegorz Łukaszewicz, Mikołaj Sierzęga

Klub 44

Prosto z nieba: Czy na „przewróconej” planecie może istnieć życie?

Niebo w listopadzie

Aktualności
Bardziej nie ma dziwadełek

 Wykłady p -adyczne
Bartłomiej Bzdęga

str. 1

str. 3

str. 4

str. 6

str. 8

str. 9

str. 12

str. 15

str. 16

str. 18

str. 21

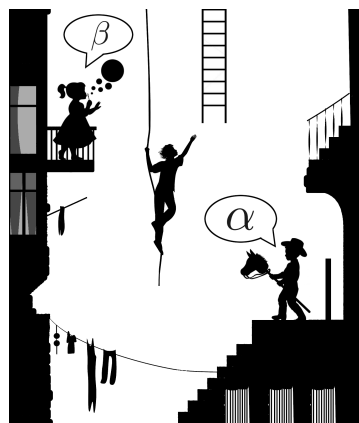
str. 22

str. 22

str. 24

str. 25

W kolejnym numerze: wyciskacz łez – co stoi na przeszkodzie α i β , żeby się wreszcie ujrzeć?



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Nagrody Abela w roku 2020

Za co Hillel Furstenberg (Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie) oraz Gregory Margulis (Uniwersytet Yale w New Haven) otrzymali tegoroczną nagrodę?

* Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Mariusz LEMAŃCZYK*

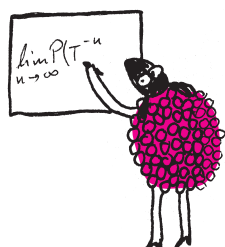
Badania naukowe tegorocznych laureatów Nagrody Abela koncentrują się na głębokich zastosowaniach teorii ergodycznej w różnych zagadnieniach dotyczących teorii liczb, geometrii, aproksymacji czy kombinatoryki. Teoria ergodyczna, która jest częścią szerszej teorii układów dynamicznych, wyrosła około 100 lat temu z zagadnień czysto fizycznych. W teorii tej zajmujemy się przestrzeniami probabilistycznymi (Ω, \mathbb{P}) , gdzie $\mathbb{P}(A)$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia $A \subset \Omega$. Zazwyczaj \mathbb{P} jest określone tylko dla pewnej rodziny podzbiorów zbioru Ω , zwanych *zbiorami mierzalnymi*. Na Ω mamy dodatkowo określone przekształcenie $T: \Omega \rightarrow \Omega$ zachowujące prawdopodobieństwo \mathbb{P} , tzn. $\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$ dla podzbiorów mierzalnych $A \subset \Omega$. Przekształcenie T mówi nam, jak przebiega ewolucja punktów $\omega \in \Omega$ w czasie:

$$\omega \mapsto T\omega \mapsto T^2\omega \mapsto \dots,$$

zachowywanie prawdopodobieństwa zaś to pewne „prawo fizyczne” – ewolucja w naszym układzie dynamicznym (Ω, \mathbb{P}, T) odbywa się z zachowaniem „objętości”, tzn. z zachowaniem prawdopodobieństwa \mathbb{P} . Popatrzmy na bardzo prosty przykład układu dynamicznego. Niech Ω będzie okręgiem jednostkowym, tzn. niech $\Omega = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, \mathbb{P} zaś prawdopodobieństwem wyznaczonym przez żądanie, aby dla każdego łuku $A \subset \mathbb{S}^1$, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2\pi}|A|$ (gdzie przez $|A|$ oznaczyliśmy długość łuku) i niech $Tz = e^{2\pi i \alpha} z$, gdzie $\alpha \in [0, 1)$ (T jest obrotem o kąt $2\pi\alpha$). Ten przykład jest charakterystyczny dla sytuacji, w której mamy dodatkową strukturę przestrzeni Ω , tzn. mamy zadane „dobre” przekształcenie T „dobrej” przestrzeni Ω i próbujemy opisać **wszystkie** możliwe prawdopodobieństwa niezmiennicze (w przykładzie powyżej można pokazać, że wskazane przez nas prawdopodobieństwo jest **jedynym** prawdopodobieństwem niezmienniczym, gdy α jest liczbą niewymierną). Natomiast sama teoria ergodyczna bada rozmieszczenie („geometrię”) *orbit* punktów w przestrzeni, tzn. zbiorów $\{T^n\omega : n \geq 0\}$, interesuje się własnościami „mieszającymi” (co jest wstępem do badania chaosu w układzie). Możemy np. pytać, czy $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A) = \Omega$, a dokładniej – pytać, czy z prawdopodobieństwem 1 orbita punktu $\omega \in \Omega$ trafi do ustalonego zbioru A , takiego że $\mathbb{P}(A) > 0$ (mówimy wtedy, że T jest *przekształceniem ergodycznym*). W powyższym przykładzie przekształcenie T jest ergodyczne wtedy i tylko wtedy, gdy α jest liczbą niewymierną. Możemy sprawdzać warunek mieszania dla podzbiorów mierzalnych $A, B \subset \Omega$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^{-n}(A) \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

(a więc intuicyjnie zbiór B po pewnym czasie rozmazuje się po całej przestrzeni, przy czym jest on w każdym zbiorze A proporcjonalnie do swojej miary). Ergodyczność i mieszanie to przykłady własności, które dla pewnych układów zachodzą, a dla innych nie zachodzą. Ale są też własności (dodajmy nieoczywiste), które zachodzą w **każdym** układzie dynamicznym. Dla przykładu w każdym układzie dynamicznym (Ω, \mathbb{P}, T) , dla dowolnego zbioru mierzalnego A , prawie każdy punkt $\omega \in A$ powróci do zbioru A nieskończenie wiele razy (ten fakt, zwany twierdzeniem o powracaniu, został odkryty przez Poincarégo jeszcze w XIX wieku). Znacznie głębsze jest słynne twierdzenie ergodyczne Birkhoffa (sprzed 90 lat), które mówi nam, że typowe punkty (tzn. punkty z pewnego zbioru o prawdopodobieństwie 1) „chodzą” po przestrzeni regularnie w tym sensie, że jeśli weźmiemy jakikolwiek „pomiar” na naszej przestrzeni (wyrażany przez funkcję $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, powiedzmy „mierzalną” i ograniczoną), to średnie $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n\omega)$ mają granicę, gdy $N \rightarrow \infty$. A gdy układ (Ω, \mathbb{P}, T) jest dodatkowo ergodyczny, to granica ta będzie równa „średniej” funkcji f po całej przestrzeni (tzn. otrzymamy całkę funkcji f względem prawdopodobieństwa \mathbb{P}).



Rozwiązanie zadania F 1012.

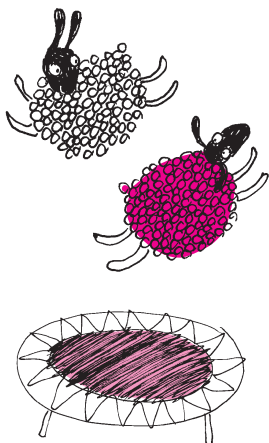
Jeżeli mięśnie zbudowane są z ułożonych równolegle jednakowych włókien, z których każde podczas skurczu działa z tą samą siłą, to siła F , z jaką działa mięsień, jest proporcjonalna do pola S jego przekroju poprzecznego. Skrócenie d mięśnia jest proporcjonalne do jego długości l . Energia potencjalna „skoczka” o masie m po osiągnięciu maksymalnej wysokości h jest równa pracy wykonanej przez kurczące się mięśnie: $mgh = Fd$, a więc

$$h = \frac{Fd}{mg}.$$

Występujące we wzorze wielkości skalują się z rozmiarem L zwierzęcia w następujący sposób: $m \propto L^3$, $F \propto S \propto L^2$ i $d \propto L$. Otrzymujemy:

$$h \propto \frac{L^2 \cdot L}{L^3} = L^0.$$

Nasze rozumowanie prowadzi do wniosku, że wysokość skoku nie zależy od rozmiarów zwierzęcia i tym samym także od jego masy. Dane (Knut Schmidt-Nielsen, *Dlaczego tak ważne są rozmiary zwierząt*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994): pchła: $h = 20$ cm, $m = 0,49$ mg; szarańcza $h = 59$ cm, $m = 3$ g; człowiek $h = 60$ cm, $m = 70$ kg.



Powyżej mówiliśmy o sytuacji, w której mamy do czynienia z jednym przekształceniem T (choć właściwie rozpatrujemy zbiór $\{T^n; n \in \mathbb{N}\}$), ale można sobie wyobrazić, że na Ω działa rodzina przekształceń $\{T_g; g \in G\}$, gdzie G ma jakąś dodatkową strukturę. Dla przykładu możemy myśleć, że G jest pewną rodziną macierzy o wyznaczniku różnym od zera, zamkniętą ze względu na mnożenie i branie elementu odwrotnego – jest to więc szczególnie przypadek struktury, którą w matematyce nazywa się *grupą*. Wtedy rodzina $\{T_g; g \in G\}$ jest pewną *reprezentacją* grupy G w zbiorze układów dynamicznych przestrzeni (Ω, \mathbb{P}) (zakładamy zachowywanie struktur, tzn. zakładamy, że $T_{gh} = T_g \circ T_h$ dla $g, h \in G$). I znowu możemy zadawać różne ciekawe pytania ergodyczne, których próbkę widzieliśmy powyżej, gdy „czas” G był równy \mathbb{N} . Czy taka abstrakcyjna teoria, która przecież musiała wypracować trudne metody, aby dowodzić w miarę ogólnych twierdzeń, może mieć cokolwiek wspólnego z bardziej „przyziemnymi” problemami matematyki? Okazuje się, że tak. Geniusz Hillela Furstenberga polegał m.in. na tym, że zaproponował on już w latach 70. XX wieku dalsze rozwijanie teorii ergodycznej w duchu twierdzeń dotyczących wielokrotnego powracania czy też zbieżności niekonwencjonalnych średnich ergodycznych. Widział on, że – może nieco wbrew swoim „fizycznym” korzeniom – twierdzenia teorii ergodycznej dają się interpretować jako twierdzenia o kombinatorycznych własnościach podzbiorów zbioru „czasów”, w szczególności podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Furstenberg udowodnił na przykład, że dla dowolnego układu dynamicznego (Ω, \mathbb{P}, T) , dowolnej liczby naturalnej $\ell \geq 1$ i dowolnego zbioru $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) > 0$ mamy

$$(*) \quad \mathbb{P}(A \cap T^{-r}(A) \cap T^{-2r}(A) \cap \dots \cap T^{-\ell r}(A)) > 0$$

dla **nieskończenie wielu** $r \geq 1$. Udowodnił on również, że powyższe twierdzenie jest równoważne pewnemu twierdzeniu opisującemu kombinatoryczne własności „dużych” podzbiorów liczb naturalnych. Zanim jednak przedstawimy jego pełne sformułowanie, potrzebujemy następującej definicji:

Definicja (górnjej dodatniej gęstości Banacha). Powiemy, że zbiór $F \subset \mathbb{N}$ ma własność GGBD, jeśli istnieje stała $\kappa > 0$ oraz dwa ciągi liczbowe a_N i b_N , które mają (dla każdego naturalnego N) następujące własności: $a_N \geq 1$, $b_N > N$ i $\frac{1}{b_N} |F \cap [a_N, a_N + b_N]| \geq \kappa$.

A oto i samo twierdzenie:

Twierdzenie. *Jeśli $F \subset \mathbb{N}$ ma własność GGBD, to zbiór F zawiera postępy arytmetyczne dowolnej długości. Tzn. dla dowolnej liczby naturalnej $\ell \geq 1$ istnieje takie $r \geq 1$ oraz $n \geq 1$, że $n, n+r, n+2r, \dots, n+\ell r \in F$.*

W pewnym sensie widać, że zbiór F nie może być „dowolny”, jakaś struktura całego zbioru liczb naturalnych w nim pozostała. Można spostrzec, że gdy $\mathbb{N} = F_1 \cup \dots \cup F_s$, gdzie zbiory F_j , $j = 1, \dots, s$ są parami rozłączne, to któryś z tych zbiorów musi mieć własność GGBD, a więc w którymś ze zbiorów F_j musiała „przeżyć” struktura zbioru \mathbb{N} . Może jeszcze tytułem ciekawostki dodajmy, że aby udowodnić powyższe twierdzenie, udowodnione wcześniej przez matematyka węgierskiego Endre Szemerédiego (laureata Nagrody Abela w roku 2012) metodami czysto kombinatorycznymi, w (*) potrzebujemy „jedynie”, żeby przekroje $A \cap T^{-r}(A) \cap \dots \cap T^{-\ell r}(A)$ były niepuste. Tak to już jednak bywa, że aby wykazać niepustość zbioru, tzn. istnienie „dobrej” konfiguracji bez wskazywania **konkretnej** konfiguracji, trzeba rozwinąć ogromną teorię wskazującą na **powód** niepustości.

Gdy chcemy dowodzić bardziej specyficznych własności teoriolicebowych czy też kombinatorycznych, często możemy zawęzić klasę układów dynamicznych, których pewne własności ergodyczne (o ile uda nam się je udowodnić) mają ciekawe i może bardziej intuicyjne implikacje. Niezwykle owocną rolę odgrywają tu tzw. układy dynamiczne pochodzenia algebraicznego, które są określone na pewnych strukturach ilorazowych grup macierzowych, a reprezentacja grupy G pochodzi od „obrotów” wyznaczonych przez mnożenie macierzy (obroty niewymierne są tu bardzo prostym, bo jednowymiarowym, przykładem takich działań). Zilustrujmy to podejście słynną hipotezą Oppenheima o formach

kwadratowych sprzed 90 lat, której prawdziwość udowodnił Gregory Margulis (laureat medalu Fieldsa z 1978 roku). Tytułem wprowadzenia popatrzymy na przypadek form zależących od dwóch zmiennych $x, y \in \mathbb{R}$. Otóż można spostrzec, że wzór $Q(x, y) = x^2 - (\alpha + 1)y^2$, gdzie α jest złotą proporcją, tzn. $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ definiuje funkcję $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o następujących własnościach: (i) Q jest formą kwadratową, (ii) Q przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne (Q nie jest ani dodatnio ani ujemnie określona), a ponadto (iii) Q nie jest proporcjonalna do formy o współczynnikach wymiernych. Jeśli teraz $x, y \neq 0$ są liczbami całkowitymi, to (wobec $\alpha^2 = \alpha + 1$)

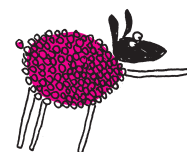
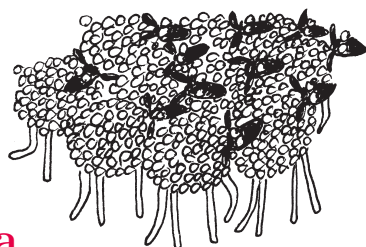
$$|Q(x, y)| = y^2 \left| \frac{x}{y} + \alpha \right| \left| \frac{x}{y} - \alpha \right| \geq \alpha y^2 \left| \frac{x}{y} - \alpha \right| \geq \alpha C > 0,$$

gdyż złota liczba jest źle aproksymowalna liczbami wymiernymi: $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq C/q^2$ dla pewnej stałej $C > 0$ i **dowolnych** $p, q \in \mathbb{N}$! Zatem wartości formy Q przyjmowane na argumentach całkowitych ($(x, y) \neq (0, 0)$) są odgraniczone od zera. Słynna hipoteza Oppenheima stanowiła, że jeśli użyjemy więcej zmiennych niż dwie, np. rozpatrując $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające własności (i)–(iii) podane powyżej, to takiego odgraniczenia od zera **nie** możemy uzyskać. Jakie tutaj układy dynamiczne będą odpowiadały za rozwiązanie problemu? Dowód Margulisa polegał na studiowaniu orbit grupy przekształceń zachowujących formę i klasyfikacji miar niezmienniczych, które możemy uzyskać na domknięciu orbit w tzw. przestrzeni jednorodnej odpowiedniej grupy macierzy o wyznaczniku 1.

Wybitne osiągnięcia tegorocznych laureatów nagrody Abela (i ich uczniów) pokazują, jak nowe, często zaskakujące, idee prowadzą do przełomowych odkryć stanowiących o postępie w nauce.



Zadania



Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1654. Piotrek stoi w windzie na ostatnim piętrze $(n + 1)$ -poziomowego wieżowca, licząc z parterem. Postępuje zgodnie z następującą zasadą: jeśli znajduje się na k -tym piętrze, przy czym $1 \leq k \leq n$, to losuje, na który z k niższych poziomów $0, 1, \dots, k - 1$ zjeżdża, tzn. każdy z nich wybiera z prawdopodobieństwem $\frac{1}{k}$.

(a) Jaki jest średnio numer piętra, z którego Piotrek zjedzie na parter?

(b) Ile średnio przejazdów windą wykona?

Rozwiązanie na str. 17

M 1655. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą całkowitą. Każdy wyraz ciągu $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ jest równy 1 lub -1 . Parę (k, l) nazwiemy *zerującą*, jeśli $1 \leq k < l \leq 2n$ oraz

$a_k + a_{k+1} + \dots + a_l = 0$. Wykazać, że liczba par zerujących jest nie większa od n^2 .

Rozwiązanie na str. 18

M 1656. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą całkowitą. Każdy wyraz ciągu $(b_1, b_2, \dots, b_{2n-1})$ jest równy 1 lub -1 . Parę (k, l) nazwiemy *minusjedyńkującą*, jeśli $1 \leq k < l \leq 2n - 1$ oraz $b_k \cdot b_{k+1} \cdot \dots \cdot b_l = -1$. Wykazać, że liczba par minusjedyńkujących jest nie większa od n^2 .

Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1011. Siła nośna F utrzymująca ptaka podczas lotu wynosi:

$$F = \frac{1}{2} c_L \rho_p S v^2,$$

gdzie ρ_p jest gęstością powietrza, v prędkością lotu (względem powietrza), S powierzchnią skrzydeł, a c_L współczynnikiem związanym z kształtem lecącego ptaka. Opierając się na tym, że siła oporu powietrza jest proporcjonalna do v^2 , oszacuj, jak optymalna predkość poziomego lotu zależy od masy m ptaka.

Rozwiązanie na str. 13

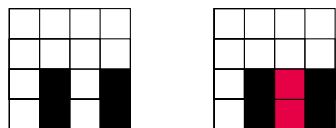
F 1012. Mięśnie zbudowane są z bardzo wielu jednakowych, ułożonych równolegle, cienkich włókien. Podczas kurczenia każde włókno skraca się o odcinek proporcjonalny do jego długości i działa na punkt zaczepienia z taką samą siłą. Oszacuj, jak wysokość h skoku zwierzęcia zależy od jego masy m . Przez wysokość skoku rozumiemy tu zmianę wysokości jego środka masy podczas skoku „z miejsca”, tj. bez rozbiegu.

Rozwiązanie na str. 1

Infekcja

Jarosław GÓRNICKI*

*Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

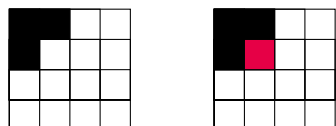


Rys. 1 i 2

Zostań na chwilę demonem zła. Chcesz zainfekować szachownicę o n^2 polach ($n \geq 2$), które będziemy nazywać *komórkami*. W każdym kolejnym kroku zdrowa komórka zostaje zainfekowana, gdy graniczy co najmniej dwoma bokami z zainfekowanymi sąsiadami. Ten proces nazywamy *2-infekcją*. Zainfekowana komórka pozostaje chora na zawsze.

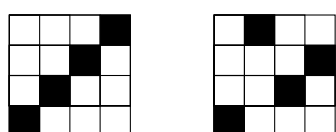
Jaki jest najmniejszy zbiór inicjujący 2-infekcję całej szachownicy? Musimy precyzyjnie odpowiedzieć na dwa pytania:

1. Jaka minimalna liczba zainfekowanych komórek wystarczy, by 2-zainfekować całą szachownicę?
2. Jak rozmieścić na szachownicy minimalny zbiór inicjujący 2-infekcję, by zainfekować wszystkie komórki?



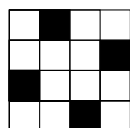
Rys. 3 i 4

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest prosta. Przyjmijmy, że zainfekowane komórki są czarne. Zauważmy, że zainfekowany zbiór na rysunku 1 ma obwód 12. Po zainfekowaniu środkowych kwadratów (zacięniowanych na zielono, rys. 2), obwód zainfekowanego zbioru jest równy $10 < 12$. Z kolei na rysunku 3 zainfekowany zbiór ma obwód 8, który nie zmienia się po rozszerzeniu infekcji (rys. 4).



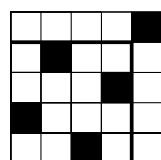
Rys. 5 i 6

Przykłady te sugerują, że rozprzestrzenianie 2-infekcji nie zwiększa obwodu zainfekowanej figury! Zatem jeśli mamy szachownicę o n^2 komórkach ($n \geq 2$) i obwodzie $4n$, to $(n - 1)$ zainfekowanych komórek nigdy nie wystarczy do 2-zainfekowania całej szachownicy (bo wtedy obwód zainfekowanego zbioru nie przekracza $4(n - 1) < 4n$).

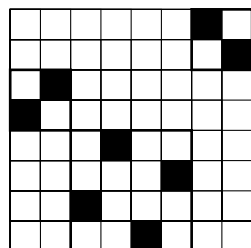


Rys. 7. Stabilna 2-infekcja

To, że n zainfekowanych komórek wystarczy do 2-zainfekowania szachownicy o n^2 komórkach, sprawdzamy empirycznie, rozmieszczając n zainfekowanych komórek na przekątnej (rys. 5). Inne „skuteczne” rozmieszczenie $n = 4$ zainfekowanych komórek na szachownicy o $4^2 = 16$ polach przedstawia rysunek 6. W obu tych konfiguracjach zainfekowana komórka występuje w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Warunek ten jeszcze nie gwarantuje 2-zainfekowania całej szachownicy (rys. 7). Oznacza to, że w procesie rozprzestrzeniania się 2-infekcji istotne jest rozmieszczenie komórek rozpoczynających 2-infekcję (różne od rozmieszczenia wzdłuż przekątnych). Koncentracja zainfekowanych komórek, jak i nadmierne ich rozproszenie nie gwarantują sukcesu. Im większa szachownica, tym oczywiście więcej możliwości „bezpiecznego” rozlokowania n zainfekowanych komórek (rys. 8, 9). Przy jednoczesnym spełnieniu warunku, że infekcja pojawia się w każdej kolumnie i w każdym wierszu, dają one możliwość zainfekowania wybranych obszarów, nie infekując całej szachownicy.

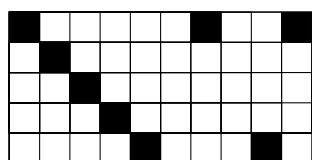


Rys. 8



Rys. 9

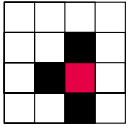
Problem komplikuje się, gdy rozważamy prostokątną tablicę $n \times m$ ($n, m \geq 2$) jednostkowych kwadratów (komórek). Rozumując jak wyżej, łatwo stwierdzamy, że do 2-zainfekowania takiej tablicy potrzebujemy co najmniej $\lceil \frac{n+m}{2} \rceil$ zainfekowanych komórek (symbol $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od x). Jednak rozmieszczenie zbioru $\lceil \frac{n+m}{2} \rceil$ zainfekowanych komórek, który 2-zainfekuje całą tablicę, nie jest tak oczywiste. Dla tablicy o wymiarach 5×10 rozmieszczenie 8 zainfekowanych komórek, jak na rysunku 10, pozwoli 2-zainfekować całą tablicę.



Rys. 10

Przykład ten pokazuje, jak 2-zainfekować tablicę $n \times m$: jeśli $n \leq m$, to najpierw infekujemy kwadrat $n \times n$, a pozostałe $\lceil \frac{m-n}{2} \rceil$ infekcji umieszczamy w co drugiej (i ewentualnie ostatniej) kolumnie pozostałego prostokąta $n \times (m - n)$.

Zobaczmy, jak może przebiegać rozwój infekcji, gdy w każdym kroku zdrowa komórka (kwadrat jednostkowy) zostaje zainfekowana, jeśli graniczy co najmniej trzema bokami z zainfekowanymi sąsiadami. Taki proces infekcji nazywamy *3-infekcją*.



Rys. 11

Przyjmijmy, że proces 3-infekcji szachownicy o n^2 komórkach ($n \geq 3$) rozpoczyna $k < n^2$ komórek, które jedna po drugiej zarażają wszystkie $t = n^2 - k$ komórek. Do zainfekowania komórki dochodzi, gdy wystąpi sytuacja z rysunku 11. Ogólnie, gdy zdrowa komórka zostaje zainfekowana, to w 3-infekcji obwód zainfekowanego obszaru maleje co najmniej o 2.

Zatem skoro początkowo zainfekowany obszar ma obwód co najwyżej $4k$, to po procesie zainfekowania wszystkich t komórek obwód zainfekowanego zbioru spełnia nierówność

$$4k - 2t = 4k - 2(n^2 - k) \geq 4n,$$

skąd

$$k \geq \left\lceil \frac{n^2 + 2n}{3} \right\rceil.$$

Gdy $n \geq 3$ jest liczbą parzystą, to możemy wskazać dokładniejsze (większe) ograniczenie dolne liczby zainfekowanych komórek, które przy właściwym rozmieszczeniu gwarantują 3-zainfekowanie szachownicy o n^2 komórkach. Zauważmy, że w tym przypadku 4 komórki w rogach szachownicy muszą być zainfekowane, bo te komórki mają tylko dwóch sąsiadów graniczących bokami. Z podobnych względów do krawędzi szachownicy nie mogą przylegać dwie sąsiadujące zdrowe komórki (nigdy nie zostałyby one zarażone). W tej sytuacji, ze względu na parzystość n , co najmniej 4 zainfekowane komórki przylegają do zainfekowanych rogów szachownicy. Wobec tego początkowy obwód zainfekowanych pól wynosi co najwyżej $4k - 8$. Zatem w tym przypadku mamy nowe oszacowanie

$$(4k - 8) - 2t = 4k - 8 - 2(n^2 - k) \geq 4n,$$

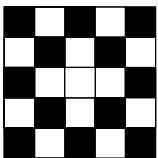
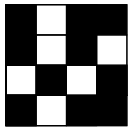
skąd

$$k \geq \left\lceil \frac{(n+1)^2}{3} \right\rceil + 1.$$

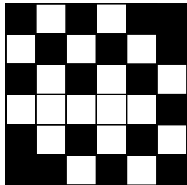
Wzory te pokazują, że dla dużych zbiorów skuteczną 2-infekcję wywołuje relatywnie mały zbiór, ale skuteczną 3-infekcję może wywołać tylko duży zbiór, stanowiący co najmniej trzecią część wszystkich komórek. Odporność na infekcję jest istotna! Oto przykłady pokazujące, że



Rys. 12 i 13



Rys. 14 i 15



- 5 zainfekowanych komórek 3-infekuje szachownicę o 9 komórkach (rys. 12),
- 10 zainfekowanych komórek 3-infekuje szachownicę o 16 komórkach (rys. 13),
- 12 zainfekowanych komórek 3-infekuje szachownicę o 25 komórkach (rys. 14),
- 18 zainfekowanych komórek 3-infekuje szachownicę o 36 komórkach (rys. 15).

Na większej szachownicy problem rozmieszczenia minimalnej liczby komórek, które 3-infekują całą szachownicę, staje się trudniejszy.

Zadanie. Pokazać, że: (a) 21 zainfekowanych komórek wystarczy do 3-infekcji całej szachownicy o $7^2 = 49$ komórkach, (b) 28 zainfekowanych komórek wystarczy do 3-infekcji całej szachownicy o $8^2 = 64$ komórkach.

Odpowiedź znajduje się na stronie 21. Łatwo sprawdzić, że przedstawione na powyższych przykładach konfiguracje realizują wyprowadzone przez nas wcześniej ograniczenie dolne na liczbę początkowo zainfekowanych komórek. Niestety nie wiemy, czy to ograniczenie jest zawsze optymalne?

Dyskusja nad tego typu problemami może być kontynuowana dla innych podziałów płaszczyzny wielokątami bądź może być rozciągnięta na wielowymiarowe prostopadłościany, np. na zbiory jednostkowych sześcianów wypełniających sześcian n^3 , gdzie $n \geq 3$.

Jeśli komórka w postaci jednostkowego sześcianu zostaje zainfekowana, gdy graniczy co najmniej dwiema ścianami z zainfekowanymi sąsiadami, to do zainfekowania całego sześcianu 3^3 wystarczą 4 zarażone komórki, 6 chorych komórek może zainfekować cały sześcian 4^3 . Ogólnie, jeśli $n \geq 3$, to $n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ chorych komórek może zainfekować cały sześcian n^3 ($\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x). Oczywiście, gdy trafnie rozmieścimy zainfekowane komórki...

Czy można usłyszeć kształt bębena?

* Studentka, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet
Warszawski

Joanna JASIŃSKA*

Każdy, komu choć raz zdarzyło się grać na gitarze lub innym instrumencie strunowym, dobrze wie, że na wysokość dźwięku ma wpływ między innymi długość struny. Uderzając w struny zbudowane z tego samego materiału i o tych samych grubościach, lecz o różnych długościach, otrzymamy dwie różne częstotliwości drgań, a więc dwa dźwięki o różnych wysokościach. A jak to jest z instrumentami perkusyjnymi? Czy na podstawie brzmienia drgającej membrany bębena można powiedzieć coś o jego kształcie? Jedne z pierwszych prób odpowiedzi na to pytanie pochodzą od Marka Kaca. Żeby przybliżyć tematykę, jaką się zajmował, należy przyjrzeć się opisanemu zagadnieniu z perspektywy analizy matematycznej.



Przez Ω będę oznaczała otwarty, spójny podzbiór \mathbb{R}^2 . Jest to model naszej membrany, która pod wpływem uderzenia będzie się odchylała. Aby móc ściśle odpowiedzieć na tytułowe pytanie, najpierw musimy matematycznie sformalizować „brzmienie bębena”. Niestety, w tym artykule nie mamy miejsca na dokładną analizę fizycznego modelu drgania membrany. Wynika z niego jednak, że od strony matematycznej brzmienie jest zdefiniowane przez pewien zbiór zwany widmem drgań i oznaczany przez $\Lambda(\Omega)$. Jest to zbiór wartości λ , dla których istnieje taka niezerowa funkcja $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (określająca amplitudę drgań w różnych punktach membrany), że

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} G(x,y) = 0$ dla dowolnego punktu (x_0, y_0) leżącego na brzegu Ω (odpowiada to założeniu, że brzeg membrany jest nieruchomy; założenie to nazywa się *warunkiem brzegowym Dirichleta*),
- $(\Delta G)(x,y) = \lambda G(x,y)$ dla wszystkich $(x,y) \in \Omega$.

Symbolem Δ oznaczamy *laplasjan*, czyli pewien operator, który z jednych funkcji tworzy inne (podobnie jak np. operator różniczkowania $f \mapsto f'$). Czytelników zaznajomionych z cząstkowymi pochodnymi odsyłamy do definicji na marginesie. Do zrozumienia najistotniejszej części tego artykułu wystarcza jednak elementarna wiedza z geometrii oraz przyjęcie do wiadomości, że laplasjan jest

Definicja laplasjanu:

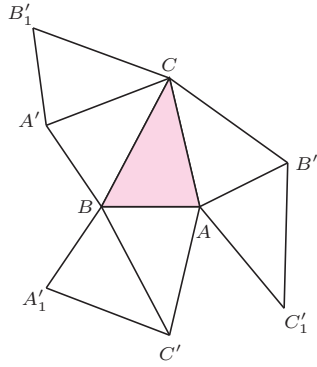
$$(\Delta G)(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(x,y).$$

Izometria to dowolne przekształcenie, które nie zmienia odległości między punktami.

- *addytywny*: $\Delta(G + H) = \Delta G + \Delta H$,
- *niezmienniczy ze względu na izometrię*: jeśli $\tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest izometrią, to $\Delta(G \circ \tau) = (\Delta G) \circ \tau$.

Fizycznie widmo drgań $\Lambda(\Omega)$ jest zbiorem częstotliwości, z jakimi może drgać uderzona membrana. Jeśli zatem udałoby się nam znaleźć dwie membrany o różnych kształtach (tj. dwa nieizometryczne obszary Ω_1 i Ω_2) i tym samym widmie drgań, otrzymalibyśmy negatywną odpowiedź na tytułowe pytanie. Właśnie w tej formie było ono zadane w 1966 roku przez Marka Kaca w jego artykule „Can one hear the shape of a drum?”. Okazuje się, że odpowiedź faktycznie jest negatywna – istnieje już wiele przykładów, które potwierdzają, że nie da się usłyszeć kształtu bębena. Pierwsze z nich były dosyć skomplikowane (jak na przykład konstrukcja Johna Milnora z 1964 roku: dwa nieprzystające 16-wymiarowe torusy o tym samym widmie drgań – z rozmaitych przyczyn nikt nie produkuje tego rodzaju bębenków...). Obecnie istnieją już konstrukcje dużo prostsze. Ta, którą przytoczymy, została podana w 1992 roku przez Carolyn Gordon, Davida L. Webba oraz Scotta Wolperta w artykule „One cannot hear the shape of a drum”. Uzasadnimy, że przedstawione na rysunku 1 wielokąty $W_1 = AC_1'B'CB_1'A'BA_1'C'$ oraz $W_2 = AB'A_2'CA'C_2'BC'B_2'$ są dobrym przykładem tego, że kształtu bębena nie da się usłyszeć... Powstały one z „posklejania” ze sobą siedmiu trójkątów przystających do trójkąta różnobocznego ABC . Kolejne punkty konstruujemy z trójkąta ABC poprzez symetrię. Niech $\sigma_{XY}(Z)$ oznacza obraz punktu Z w symetrii względem odcinka XY .

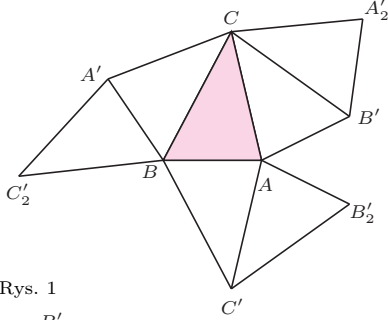
Tłumaczenie na język polski wspomnianego artykułu Marka Kaca ukazało się w „Wiadomościach Matematycznych” XIII (1971) i można je odnaleźć na stronie wydawnictwa.pfm.org.pl.



Wówczas:

$$\begin{aligned} A' &= \sigma_{BC}(A), & B' &= \sigma_{AC}(B), & C' &= \sigma_{AB}(C) \\ A'_1 &= \sigma_{BC'}(A), & B'_1 &= \sigma_{A'C}(B), & C'_1 &= \sigma_{AB'}(C) \\ A'_2 &= \sigma_{CB'}(A), & B'_2 &= \sigma_{AC'}(B), & C'_2 &= \sigma_{A'B}(C) \end{aligned}$$

Nasza argumentacja powinna składać się z dwóch kroków: najpierw należy uzasadnić, że powyższe wielokąty nie są przystające, a następnie, że ich wnętrza (oznaczane dalej odpowiednio przez Ω_1 oraz Ω_2) mają to samo widmo drgań. Łatwiejszą częścią dowodu jest wykazanie, że W_1 i W_2 nie są izometryczne. Pozostawiamy ją Pracowitemu Czytelnikowi do samodzielnego rozwikłania i przechodzimy do kroku drugiego.



Dowodzimy, że wielokąty W_1 oraz W_2 są *izospektralne*, czyli mają takie samo widmo drgań. Ustalmy zatem $\lambda \in \Lambda(\Omega_1)$. Wykażemy, że jest ono również w $\Lambda(\Omega_2)$. Skoro $\lambda \in \Lambda(\Omega_1)$, to z definicji istnieje nierówna stałe zero funkcja $G : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$, taka że $\Delta G = \lambda G$ i spełniony jest dla niej warunek brzegowy Dirichleta. Rozszerzmy tę funkcję na cały wielokąt W_1 :

$$\bar{G}(x, y) := \begin{cases} G(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Omega_1, \\ 0 & \text{dla } (x, y) \in W_1 \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

Z uwagi na warunek brzegowy taka funkcja oczywiście jest ciągła. Niech $\tau_{PQR} : \triangle ABC \rightarrow \triangle PQR$ oznacza teraz izometrię przekształcającą trójkąt ABC na trójkąt PQR . Określimy funkcje $G_i : \triangle ABC \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, 6$ następująco: $G_0 = \bar{G}|_{ABC}$ oraz

$$\begin{aligned} G_1 &= \bar{G}|_{A'BC} \circ \tau_{A'BC}, & G_2 &= \bar{G}|_{AB'C} \circ \tau_{AB'C}, & G_3 &= \bar{G}|_{ABC'} \circ \tau_{ABC'}, \\ G_4 &= \bar{G}|_{A'B_1C} \circ \tau_{A'B_1C}, & G_5 &= \bar{G}|_{AB_1C_1} \circ \tau_{AB_1C_1}, & G_6 &= \bar{G}|_{A_1BC'} \circ \tau_{A_1BC'} \end{aligned}$$

(rysunek 2). Ponownie powołamy się na niezmienniczość laplasjanu na izometrie, żeby stwierdzić, że dla każdego $i = 0, 1, \dots, 6$ na wnętrzu trójkąta ABC zachodzi

$$\Delta G_i = \lambda G_i.$$

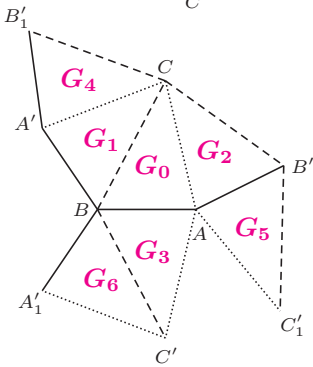
Określimy teraz również funkcję $H : W_2 \rightarrow \mathbb{R}$, która na poszczególnych kawałkach wielokąta W_2 będzie przyjmowała takie wartości, jak widać na rysunku 3. Uważny Czytelnik bardzo szybko zada pytanie: „W porządku, ale dlaczego ta funkcja jest dobrze określona na krawędziach trójkątów?”. Spieszymy z odpowiedzią: przyjrzyjmy się najpierw czworokątowi $ACBC'$. Określimy trzy funkcje $H_1, H_2, H_3 : \triangle ABC \cup \triangle ABC' \rightarrow \mathbb{R}$ następującymi wzorami:

$$H_1 = \begin{cases} G_3(x) & \text{dla } x \in \triangle ABC, \\ G_0(\tau_{ABC'}^{-1}(x)) & \text{dla } x \in \triangle ABC', \end{cases} \quad H_2 = \begin{cases} G_2(x) & \text{dla } x \in \triangle ABC, \\ G_5(\tau_{ABC'}^{-1}(x)) & \text{dla } x \in \triangle ABC', \end{cases}$$

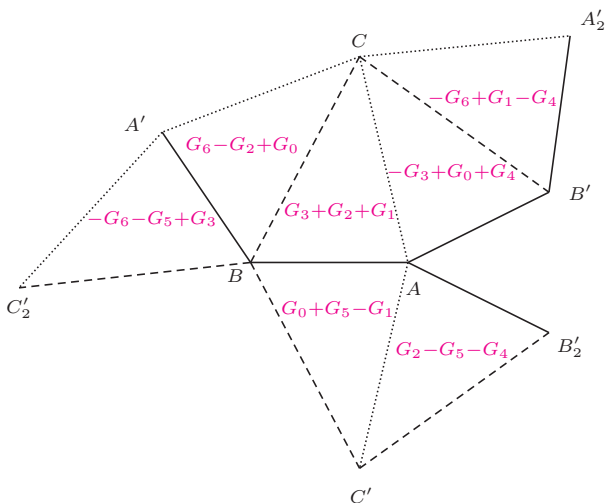
$$H_3 = \begin{cases} G_1(x) & \text{dla } x \in \triangle ABC, \\ -G_1(\tau_{ABC'}^{-1}(x)) & \text{dla } x \in \triangle ABC'. \end{cases}$$

W ten sposób $H|_{ACBC'} = H_1 + H_2 + H_3$. Ponadto $H_1 = G|_{ACBC'} \circ \tau_{ABC'}^{-1}$ oraz $H_2 = G|_{ACB'C_1} \circ \tau_{AB'C}^{-1}$. Znowu korzystając z niezmienniczości laplasjanu ze względu na izometrię, możemy stwierdzić, że we wnętrzu czworokąta $ACBC'$ spełnione jest równanie $\Delta H_i = \lambda H_i$ dla $i = 1, 2$ (gdyż funkcja G spełnia je na całym wielokącie W_1). Pozostaje przyjrzeć się funkcji H_3 . Z warunku zerowania się funkcji G na brzegu W_1 (w szczególności na odcinku BA') wynika, że $G_1|_{AB} = 0$, zatem funkcja H_1 jest dobrze „sklejona” na odcinku AB . Spełnia ona oczywiście warunek $\Delta H_1 = \lambda H_1$ we wnętrzach trójkątów ABC i ABC' . To, że równość ta jest spełniona również na odcinku AB , jest pewną szczególną własnością równania $\Delta G = \lambda G$, zwaną „własnością odbicia”; w pełnym brzmieniu przytaczamy ją na marginesie na następnej stronie, jednak dowód pominiemy. Liniowość laplasjanu gwarantuje nam teraz,

Rys. 1



Rys. 2. Jeśli funkcja G_i jest na powyższym rysunku napisana na trójkącie T , to powstaje przez złożenie obcięcia funkcji G do T z izometrią przekształcającą ABC na T



Rys. 3. Funkcja H . Każdą z przedstawionych funkcji składowych należy złożyć z izometrią, która odpowiadający jej trójkąt przekształca na trójkąt ABC . Aby ułatwić dalszą analizę, wykorzystując porównanie z rysunkiem 2, przystające odcinki oznaczono w ten sam sposób

Własność odbicia laplasjanu.

Niech D będzie otwartym podzbiorem \mathbb{R}^2 , symetrycznym względem prostej $y = 0$ i niech $D^+ = \{(x, y) : y > 0\}$. Załóżmy, że funkcja G klasy C^2 jest określona na D^+ i spełnia $\Delta G = \lambda G$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz dla każdego punktu $(x_0, 0) \in D$ mamy $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} G(x, y) = 0$. Wtedy funkcja $\tilde{G}(x, y) = \text{sgn}(y)G(x, |y|)$, określona na całym D , jest klasy C^2 oraz spełnia $\Delta \tilde{G} = \lambda \tilde{G}$.



że funkcja H określona kawałkami na trójkątach ABC oraz ABC' , spełnia warunek $\Delta H = \lambda H$ na całym tym obszarze.

W ten sam sposób, wyróżniając w W_1 inne czworokąty, wnioskujemy, że funkcja H jest dobrze określona na wszystkich krawędziach trójkątów, a także że spełnia równanie $\Delta H = \lambda H$ na całym Ω_2 . Dociekliwy Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić nietrudnym rachunkiem, że dla funkcji H jest również spełniony warunek brzegowy Dirichleta na Ω_2 . Dowód, że H nie jest tożsamościowo równa 0, pominiemy, gdyż jest on dość techniczny.

Pracowicie wykazaliśmy, że jeżeli λ należy do $\Lambda(\Omega_1)$, to należy również do $\Lambda(\Omega_2)$, czyli $\Lambda(\Omega_1) \subset \Lambda(\Omega_2)$. Analogicznie uzasadniamy $\Lambda(\Omega_2) \subset \Lambda(\Omega_1)$, a zatem $\Lambda(\Omega_1) = \Lambda(\Omega_2)$. Rozpatrywane wielokąty mają więc takie samo widmo drgań; nie są jednak izometryczne. Daje to negatywną odpowiedź na tytułowe pytanie. Ciekawe, co sądzą na ten temat perkusiści...?



Co ma wspólnego cykl (6, 5, 4) z językiem polskim?

Każdej liczbie rzeczywistej możemy przypisać nieskończony ciąg cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego. Jak wiadomo, jeżeli ciąg od pewnego miejsca się *zapętla*, to mamy do czynienia z liczbą wymierną. Inaczej rzecz ujmując, liczby wymierne mają *okresowe* rozwinięcie dziesiętne. Przyjmujemy tutaj, że tzw. rozwinięcie skończone jest rozwinięciem okresowym – od pewnego miejsca na każdej pozycji występuje wyłącznie cyfra 0.

My będziemy rozważać ciągi liczbowe. Możemy przyjąć jakąś konkretną metodę produkcji kolejnych wyrazów ciągu, na przykład

$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}c_n, & \text{gdy } c_n \text{ jest parzysta,} \\ 3c_n + 1, & \text{gdy } c_n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Jednak stwierdzenie, czy dla dowolnej początkowej liczby c_0 ten ciąg **zawsze** się zapętli, jest nie lada wyzwaniem. Tego dotyczy *problem Collatza* – ale to nie on jest bohaterem tego tekstu.

W 1972 roku zespół z Artificial Intelligence Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, opracował raport HAKMEM – złożony z prawie dwustu algorytmicznych ciekawostek (mieszasz algebry, kombinatoryki, teorii liczb, teorii grup...). Pozycja 134. wspomnianego raportu także dotyczy ciągów liczbowych i ich zapętlenia. Przyjmijmy następującą zasadę:

każdy element ciągu (oprócz pierwszego) określa, ile liter jest potrzebnych do zapisania słownie (w języku angielskim) poprzedniego elementu ciągu.

Zacznijmy na przykład od liczby 14. Słowo *fourteen* ma osiem liter, więc drugi element ciągu to 8. Słowo *eight* ma pięć liter, kolejny element ciągu to 5. Słowo *five* ma cztery litery – podobnie jak *four*. Zatem

$$14(\text{fourteen}) \rightarrow 8(\text{eight}) \rightarrow 5(\text{five}) \rightarrow 4(\text{four}) \rightarrow 4(\text{four}) \rightarrow \dots$$

i tym sposobem otrzymujemy ciąg $(14, 8, 5, 4, 4, \dots)$. Co ciekawe, niezależnie od tego, od jakiej liczby zaczniemy, dany ciąg zawsze (i szybko) zapętli się na liczbie 4.

Czy już się domyślasz, Czytelniku, jak brzmi odpowiedź na tytułowe pytanie?

Wspomniany raport HAKMEM można znaleźć na stronie dspace.mit.edu/handle/1721.1/6086

* Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska

Bartłomiej PAWLIK*

Podróże w \mathbb{N}^d

Autor **został właśnie** laureatem prestiżowego grantu ERC. Poniższy tekst opisuje jeden z trzech tematów badawczych, realizowanych w ramach tego grantu.

Jakiś czas temu koleżanki i koledzy z redakcji *Delty* poprosili mnie, żebym opisał, czym zajmuję się naukowo, i przedstawił pewien ciekawy wynik, który udało mi się wraz ze współpracownikami niedawno uzyskać. Pisząc ten tekst, postaram się przybliżyć tę właśnie dziedzinę, która mi osobiście wydaje się interesująca chyba dlatego, że rozważa problemy o bardzo prostym sformułowaniu geometrycznym, a mimo to jest w niej więcej znaków zapytania niż odpowiedzi. Badania często okazują się ciekawą kombinatoryką, popartą jednak zwykle geometrycznymi intuicjami. Wiele fundamentalnych pytań otwartych można sformułować bardzo szybko, jedno z nich przybliży na końcu tego tekstu.

Niedawno w *Delcie* Δ_{20}^7 pisałem o podróżach w \mathbb{R}^d . Można też równoważnie powiedzieć, że były to podróże w \mathbb{Z}^d . Jedną z konsekwencji omawianego tam lematu Steinitza był fakt mówiący, że jeśli układ n równań liniowych o d zmiennych i wartościach bezwzględnych wszystkich współczynników występujących w równaniach ograniczonych przez M ma rozwiązanie, to ma rozwiązanie niewielkie. Konkretnie rzecz biorąc, ma takie rozwiązanie $u \in \mathbb{R}^d$, że jego norma (tzn. maksimum z wartości bezwzględnych współrzędnych) jest ograniczona przez $(5dM + 1)^d$, nie zależy w ogóle od liczby równań n . Ten fakt z kolei implikuje, że pytania o podróże w \mathbb{Z}^d stają się stosunkowo łatwe. Rozważmy następujący *problem osiągalności w \mathbb{Z}^d* . Dany jest zbiór wektorów $U = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq \mathbb{Z}^d$ oraz wektory początkowy $s \in \mathbb{Z}^d$ i końcowy $t \in \mathbb{Z}^d$ takie, że normy wszystkich s , t oraz u_i są ograniczone przez M . Pytamy, czy istnieje taka podróż składająca się z przystanków w punktach $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Z}^d$, że zaczyna się ona w s (czyli $v_0 = s$), kończy w t (czyli $v_k = t$), a każdy krok jest przesunięciem o któryś wektor u_j (czyli dla każdego $i \in \{0, \dots, k-1\}$ istnieje $u_j \in U$ taki, że $v_{i+1} - v_i = u_j$). Jak łatwo zauważyć, jest to równoważne pytaniu, czy istnieją współczynniki $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ (określające, ile razy użyjemy w trakcie podróży każdego z wektorów), takie że $\sum_{i=1}^n a_i u_i = t - s$. Z faktu powyżej wynika, że jeśli istnieje podróż z s do t , to istnieje taka podróż długości co najwyżej $(5dM + 1)^d$. To w szczególności powoduje, że problem osiągalności w \mathbb{Z}^d należy do klasy NP, możemy zgadnąć współczynniki a_i , które są reprezentowane przez liczby o wielomianowo wielu bitach, i sprawdzić, że rzeczywiście spełniają równość $\sum_{i=1}^n a_i u_i = t - s$.

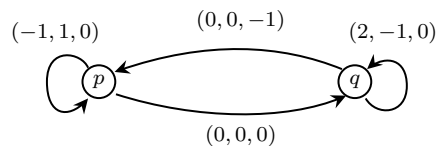
Dziś rozważymy *problem osiągalności w \mathbb{N}^d* , bardzo podobny do problemu osiągalności w \mathbb{Z}^d , a jednak, jak się okaże, o zupełnie innych własnościach. Podobnie jak poprzednio w problemie osiągalności w \mathbb{N}^d dany jest zbiór wektorów $U = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq \mathbb{Z}^d$, wektor początkowy $s \in \mathbb{N}^d$ i końcowy $t \in \mathbb{N}^d$, każdy z nich o normie ograniczonej przez M . Również pytamy o istnienie takiej podróży v_0, \dots, v_k , że $v_0 = s$, $v_k = t$ oraz każdy krok $v_{i+1} - v_i$ jest równy pewnemu wektorowi u_j . Wymagamy jednak, żeby każdy punkt podróży v_i miał

Wojciech CZERWIŃSKI

wszystkie współrzędne nieujemne, czyli $v_i \in \mathbb{N}^d$. Innymi słowy, cała nasza podróż ma się zmieścić w dodatniej ćwiartce układu współrzędnych (dla $d = 2$), a ogólnie w dodatnim ortancie \mathbb{N}^d . Okazuje się, że problem osiągalności w \mathbb{N}^d jest dużo trudniejszy od swojego odpowiednika w \mathbb{Z}^d i wciąż daleki od matematycznego zrozumienia.

Bardzo często rozważa się pewne eleganckie uogólnienie problemu osiągalności w \mathbb{N}^d . Dodajemy do naszych rozważań *stany*, intuicyjnie rzecz biorąc, oznacza to, że w każdym punkcie naszej podróży jesteśmy w jednym ze skończenie wielu trybów, zwanych stanami. Opis problemu składa się wtedy również z podania skończonego zbioru stanów Q , a każdy krok podróży określany jest nie tylko wektorem z \mathbb{N}^d , a raczej trójką $(p, u, q) \in U \subseteq Q \times \mathbb{Z}^d \times Q$. Taka trójka $(p, u, q) \in U$ oznacza, że jeśli jestem w stanie p , to mogę przesunąć się o wektor u i zmienić stan na q . Wprowadzenie stanów tylko pozornie komplikuje sprawę. System z wektorami w \mathbb{N}^d i $N - 1$ stanami można stosunkowo łatwo zasymulować systemem o wektorach z \mathbb{N}^{d+3} i bez stanów. Dodajemy do systemu trzy współrzędne i wtedy konfigurację: stan i -ty, wektor $u \in \mathbb{N}^d$, reprezentujemy jako wektor $(u, i, N(N - i), 0) \in \mathbb{N}^{d+3}$, który na pierwszych d współrzędnych ma wektor u . Przy odrobinie sprytu jesteśmy w stanie zakodować również ruchy w systemie ze stanami w tych $d + 3$ współrzędnych (przy czym jednemu ruchowi w oryginalnym systemie odpowiadać będzie pewien ciąg ruchów w jego reprezentacji). Ostatnia współrzędna nie jest używana przy kodowaniu stanów, ale przydaje się przy implementacji ruchów. Dociekliwy Czytelnik może spróbować dopowiedzieć sobie szczegóły.

Żeby poczuć nieco, jak ciekawe własności mogą mieć takie systemy, rozważmy przykład pokazany na rysunku 1. System ten ma dwa stany: p i q oraz cztery możliwe ruchy oznaczone strzałkami i ich etykietami. Przyjrzyjmy się, jaką podróż możemy wykonać, startując ze stanu p i punktu $(1, 0, n)$; będziemy oznaczali taką konfigurację $p(1, 0, n)$.



Rys. 1

Na początek możemy wykonać następującą trasę: $p(1, 0, n) \rightarrow p(0, 1, n) \rightarrow q(0, 1, n) \rightarrow q(2, 0, n) \rightarrow p(2, 0, n - 1)$, i jesteśmy z powrotem w stanie p z trzecim licznikiem o jeden mniejszym, ale za to pierwszym dwa razy większym. Możemy wykonać analogiczną trasę ponownie

$$p(2, 0, n - 1) \Rightarrow p(0, 2, n - 1) \rightarrow q(0, 2, n - 1) \Rightarrow q(4, 0, n - 1) \rightarrow p(4, 0, n - 2),$$

gdzie przez \Rightarrow oznaczamy kilka ruchów pod rząd. Powtarzając tę procedurę, możemy dotrzeć do konfiguracji $p(2^n, 0, 0)$, a stąd bardzo prosto do dowolnej konfiguracji postaci $p(x, y, 0)$, gdzie $x + y = 2^n$. Nietrudno

najkrótsze podróże mogą być długości podwójnie wykładniczej. Konstrukcja opiera się na następującym lemacie, dotyczącym ułamków, co dość zaskakująco okazuje się związane z podróżami w \mathbb{N}^d .

Lemat. Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje k ułamków $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_k}{b_k}$, takich że

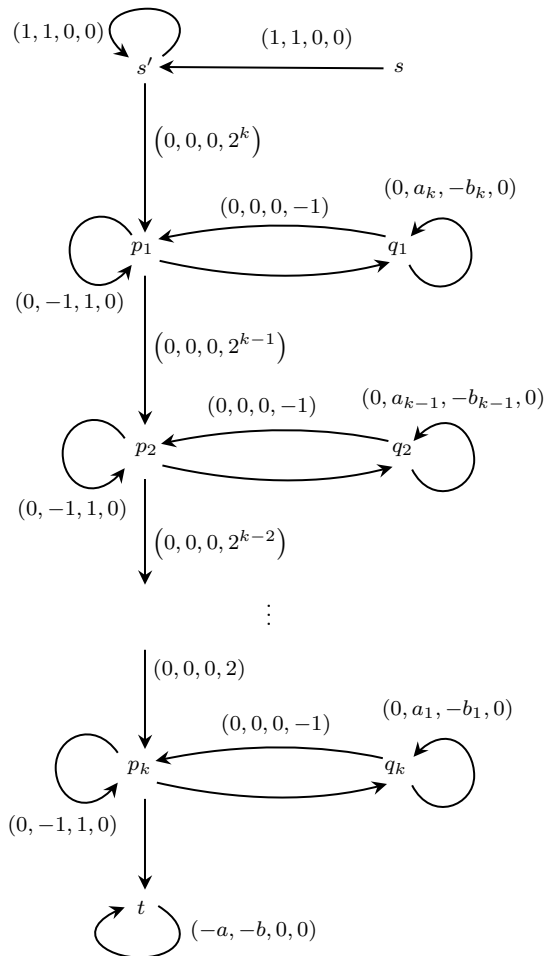
$$1 < \frac{a_1}{b_1} < \dots < \frac{a_k}{b_k} = 1 + \frac{1}{4^k},$$

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{2^1} \cdot \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{2^2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{2^k} = \frac{a}{b},$$

oraz wszystkie liczby całkowite a, b, a_i oraz b_i są ograniczone przez 16^{k^2+k} .

Zauważmy, że istnienie ułamków postulowanych w lemacie wcale nie jest oczywiste. Żeby $\frac{a_i}{b_i}$ był nie większy niż $1 + \frac{1}{4^k}$, to jego mianownik musi być równy co najmniej 4^k . Taki ułamek podniesiony do potęgi 2^i , dla i rzędu k , ma licznik oraz mianownik podwójnie wykładniczy względem k . Trudność w dowodzie powyższego lematu polega na tym, że liczniki i mianowniki wielu ułamków podwójnie wykładniczej wielkości muszą się poskracać przy mnożeniu w taki sposób, by w rezultacie otrzymany został ułamek $\frac{a}{b}$ dla a i b wielkości wykładniczej względem k . Dowodu lematu nie przedstawimy, choć dałoby się go udowodnić mniej więcej na jednej stronie.

Teraz pokażemy bardzo szkicowo, w jaki sposób lemat może posłużyć do konstrukcji zbioru ruchów dla $d = 4$, $U = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq Q \times \mathbb{N}^4 \times Q$ oraz konfiguracji



Rys. 2

takich $s(0, 0, 0, 0), t(0, 0, 0, 0) \in Q \times \mathbb{N}^4$, że podróż z $s(0, 0, 0, 0)$ do $t(0, 0, 0, 0)$ przy użyciu U jest podwójnie wykładnicza względem wielkości tych wektorów.

System jest zilustrowany na rysunku 2 (niepodpisane ruchy oznaczają brak przesunięcia). Tak dobraliśmy zbiór U , żeby każda podróż musiała wyglądać w bardzo konkretny sposób. Na początku generujemy wektor postaci $(N, N, 0, 0)$ przy użyciu pętli w stanie o efekcie $(1, 1, 0, 0)$ w stanie s' . Potem mnożymy drugą współrzędną przez $(a_k/b_k)^{2^k}$ w stanach p_1 i q_1 . Robimy to podobnie, jak w systemie na rysunku 1, używając dwóch stanów. Tam mnożyliśmy liczbę 1 przez ułamek $\frac{2}{1}$ co najwyżej n razy, ale każde mnożenie mogło mieć pewne straty. W efekcie po n pętlach między stanami p i q z liczby 1 uzyskaliśmy najwyżej liczbę 2^n . W analogiczny sposób możemy pomnożyć liczbę N przez co najwyżej $(a_k/b_k)^{2^k}$. Następnie mamy $k - 1$ podobnych faz, w których mnożymy drugą współrzędną przez co najwyżej $(a_{k-1}/b_{k-1})^{2^{k-1}}, \dots, (a_2/b_2)^{2^2}$ i na końcu przez co najwyżej $(a_1/b_1)^{2^1}$. Po tych wszystkich operacjach nasza druga współrzędną ma wartość co najwyżej $N \cdot \frac{a}{b}$, co wynika z równania w lemacie. A więc cała konfiguracja ma postać $t(N, N', 0, 0)$, gdzie $N' \leq N \cdot \frac{a}{b}$. Na koniec w stanie t w pętli odejmujemy wektor $(b, a, 0, 0)$ i chcemy dojść do konfiguracji $t(0, 0, 0, 0)$. Okazuje się, że jedyny sposób dojścia do $t(0, 0, 0, 0)$ jest taki, żeby N' było równe dokładnie $N \cdot (a/b)$, a to z kolei jest możliwe tylko, jeśli wszystkie mnożenia na trasie były dokładne. Pierwsze mnożenie, to w stanach p_1 i q_1 , było mnożeniem przez $(\frac{4^k+1}{4^k})^{2^k}$. Aby było zrealizowane dokładnie, to liczba N musiała być podzielna przez $(4^k)^{2^k}$, co jest liczbą podwójnie wykładniczą, a więc oznacza, że N musiało być podwójnie wykładnicze. Zatem oczywiście długość trasy też musiała być podwójnie wykładnicza, co kończy szkic konstrukcji. Szczegóły można znaleźć w artykule w serwisie [arXiv:arxiv.org/abs/2001.04327](https://arxiv.org/abs/2001.04327).

Przedstawiona konstrukcja dowodzi, że istnieją systemy w wymiarze $d = 4$, które mają najkrótszą ścieżkę pomiędzy dwoma niewielkimi konfiguracjami długości podwójnie wykładniczej względem opisu systemu. Czy możemy skonstruować takie systemy z najkrótszą ścieżką potrójnie wykładniczą? Tego nie wiadomo. Najlepsze górne oszacowanie to $F_7(n)$, czyli olbrzymie. Co ciekawe, podobnie jest również dla innych wymiarów. Dla $d = 2$ wiadomo, że w każdym systemie o ile dany punkt jest osiągalny w \mathbb{N}^2 , to jest osiągalny trasą co najwyżej wykładniczej długości. Wiadomo też, że są systemy, w których taka trasa wykładniczej długości jest faktycznie najkrótszą trasą. Jak jednak wygląda sytuacja dla wymiaru $d = 3$? Tego również nie wiadomo. Najlepsze znane górne oszacowanie to funkcja $F_6(n)$, czyli dużo większa niż wieża dwójek wysokości n . Możliwe jest też, że zawsze taka najkrótsza trasa jest wykładniczej długości. Osobiście obstawiam, że druga możliwość jest prawdziwa, ale to tylko dywagacje. Być może odpowiedzi udzieli ktoś z Czytelników, tworząc konstrukcję podobną do powyższej. Rozwiązania problemów otwartych od dziesięcioleci wcale nie muszą być bardzo trudne.



mała delta

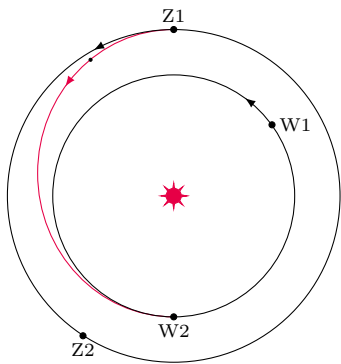
Jednostka Astronomiczna (j.a.), po angielsku AU (*Astronomical Unit*), to jednostka stosowana w pomiarach odległości, głównie w naszym Układzie Słonecznym. Wynosi ona 149 597 870 700 m, czyli tyle, ile wynosi średnia odległość Ziemi od Słońca.

W tym miesiącu nachylenie ekliptyki ziemskiej jest bardzo korzystne do obserwacji Wenus. Więcej na ten temat w artykule *Niebo w listopadzie*.

Wycieczka na Wenus

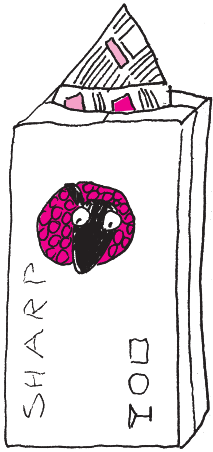
Zaraz po Słońcu i Księżycu Wenus jest najjaśniejszym obiektem widzianym na niebie. Oglądana nocą, przez wielu ludzi traktowana jest omyłkowo jako bardzo jasna gwiazda. Okrąża Słońce w odległości 0,723 j.a., więc jest planetą wewnętrzną (znajdującą się bliżej Słońca niż Ziemia). Dlatego z punktu widzenia obserwatora ziemskiego znajduje się ona na niebie w pobliżu Słońca – czasem bliżej, a czasem dalej. Jej największe oddalenie kątowe (elongacja) od Słońca dochodzi do około 48°. Gdy jest w elongacji zachodniej, wschodzi wcześniej niż Słońce i po wschodzie Słońca przestaje być widoczna. Przy maksymalnej zachodniej lub wschodniej elongacji widoczna jest na niebie tylko przez około 4 godziny. Kiedy jest w elongacji wschodniej, w ciągu dnia niewidoczna podąża na niebie za Słońcem. Dopiero po zachodzie Słońca staje się widoczna na południowo-zachodniej części nieba, świecąc jako Gwiazda Wieczorna. Odstęp czasowy pomiędzy największymi elongacjami – zachodnią i wschodnią – wynosi 440 dni ziemskich.

W starożytności Wenus wyróżniana była obok Słońca i Księżycy jako szczególne ciało niebieskie i kojarzona z boginią. U Greków była to bogini Jutrzenki Eos, która u schyłku nocy wyjeżdżała na niebo swoim rydwanem i rozpraszała mroki nocy. Dopiero po niej wyjeżdżał na niebo jej brat Helios, wioząc na rydwanie Słońce, i na Ziemi rozpoczynał się dzień. Gdy do obserwacji ciał niebieskich zaczęto używać lunet i teleskopów zwierciadłowych, astronomowie przyglądali się Wenus z uwagą. W XVII wieku odkryto, że planeta ma gęstą atmosferę, która nie pozwala dostrzec jej powierzchni. „Bogini” ukryła swe piękno pod nieprzezroczystą szatą, odbijającą około 76% światła słonecznego. Po odkryciu atmosfery przez długi czas wielu astronomów przypuszczało, że na powierzchni Wenus, pod ciepłą powłoką chmur znajduje się życie. Wyobrażano sobie, że pokryta jest egzotyczną roślinnością, drzewami, a wszystko to w ciepłym klimacie – wspaniały, planetarny raj. W czasach współczesnych planetę badały sondy kosmiczne: niektóre jedynie przy okazji „przelotu” obok planety, ale były i takie, które zostały wysłane z misją lądowania i zbadania powierzchni planety. O Wenus wiemy dużo, jednak nadal nie wszystko. Wybierzmy się zatem w podróż ku tej planecie, by jej się przyjrzeć. W tym celu po pierwsze należy wyznaczyć orbitę, po której popędzi nasz statek kosmiczny. Wśród kilku możliwych orbit wybieramy taką, przy której zużycie energii będzie najmniejsze – to obniży koszty podróży. Takie orbity obliczył w XX w. niemiecki uczoney Walter Hohmann.



Orbita transferowa Hohmanna umożliwia manewr zmiany orbity kołowej statku kosmicznego na wyższą lub niższą, przez dwukrotne użycie silników. W centrum znajduje się Słońce. W1 oraz W2 oznaczają położenia Wenus w stosunku do Słońca, natomiast Z1 i Z2 analogiczne położenia Ziemi.

Orbita Hohmanna, którą wybraliśmy ze względów ekonomicznych, przedstawiona jest na rysunku obok. Początkowo nasz statek kosmiczny okrąży Ziemię jak satelita po tzw. orbicie parkingowej (bez napędu). Czekamy na moment, w którym przejdziemy na eliptyczną orbitę Hohmanna. Gdy Ziemia znajdzie się w punkcie Z1, a Wenus w punkcie W1, włączamy silniki przyspieszające ruch, wchodzimy na orbitę Hohmanna i wyłączamy silniki. W tym momencie rozpoczynamy beznapędowy ruch po eliptycznej orbicie. Po upływie około 146 dni ziemskich dotrzemy w pobliże Wenus, która znajdzie się w tej chwili w punkcie W2. Wenus podczas naszej podróży dokonała około 0,65 obiegu wokół Słońca, a Ziemia 0,40 obiegu (144°).



Wykorzystana przez nas orbita jest połową elipsy, której peryhelium jest w pobliżu punktu W2, natomiast aphelium w punkcie Z1. Teraz włączamy silniki, by uregulować prędkość i wejść na orbitę parkingową wokół Wenus. Przygotowujemy się do lądowania. Będzie to zadanie niebezpieczne, ale pod względem technicznym jesteśmy przygotowani do lądowania i pobytu na planecie. Wiemy już, że napotkamy wysokie temperatury i olbrzymie ciśnienia. Nasz lądownik i jego wyposażenie wykonane są w większości ze znanych, bardzo wytrzymałych materiałów pochodzących od węgla – fulerenów węglowych. Mają one niezwykle właściwości mechaniczne, elektryczne i termiczne. Nanorurki węglowe są około 13 razy lżejsze od stali, a przy tym ich mechaniczna wytrzymałość na odkształcenia jest ponad 50 razy większa niż wspomnianej już stali. Dzięki temu nasz lądownik nie jest zbyt ciężki, a równocześnie jest wytrzymały na wysokie ciśnienia.

Lądownik opuszcza statek kosmiczny i zanurza się w atmosferę planety. Statek kosmiczny z resztą załogi nadal krąży wokół planety. Pomiędzy lądownikiem, statkiem i Ziemią zachowana jest łączność radiowa i telewizyjna. Lądownik opada na specjalnym spadochronie. Na wysokości około 70 km wchodzimy w kilkukilometrową warstwę chmur utworzonych z mgieł i aerozoli. Są tu cząsteczki CO₂ i aerozol kwasu siarkowego. Kolejna warstwa chmur znajduje się na wysokości około 55 km. Tu atmosfera jest niespokojna, porywista i zakłóca opadanie lądownika, który zaczął się kołysać, gwałtownie przeniósł się w bok, to znów na chwilę zawisł. W chmurach dominuje CO₂. Na wysokości około 50 km nad gruntem jest trzecia – najniższa warstwa chmur. Odkąd lądownik zanurzył się w atmosferę, Słońce przestało być widoczne. Obłoki oprócz CO₂ zawierają kwas siarkowy o stężeniu ponad 70%, ponadto mamy tu też trochę kwasu solnego i fluorowodorowego. Gdy lądownik znajduje się kilka kilometrów nad gruntem, „obmywa” go gorący deszczyk – mżawka z kropelek kwasu siarkowego.



Rozwiązanie zadania F 1011.

Optymalne warunki poziomego lotu odpowiadają sytuacji, gdy energia potrzebna do podtrzymania lotu jest możliwie mała. Oznacza to, że prędkość powinna być jak najmniejsza, ale wystarczająca do wytworzenia siły nośnej równoważącej ciężar ptaka. Otrzymujemy warunek:

$$mg = \frac{1}{2} c_L \rho_p S v^2,$$

gdzie m jest całkowitą masą ptaka, a g przyspieszeniem ziemskim. Wewnątrz jednego rzędu ptaki mają bardzo podobną budowę i upierzenie, ale mogą znacznie różnić się rozmiarami. Za miarę wielkości ptaka przyjmijmy jedną z charakterystycznych długości l – np. rozpiętość skrzydeł. Zachodzi wówczas skalowanie: $m \propto l^3$ oraz $S \propto l^2$, gdzie znak „ \propto ” oznacza proporcjonalność. Podstawienie tych relacji do podanego wyżej równania na siłę nośną prowadzi do oszacowania: $v^2 \propto l$ i dalej do:

$$v \propto \sqrt{l} \propto m^{1/6}.$$

Wykonane bardzo trudne pomiary prędkości lotu ptaków względem oszacowania $v \propto l^{0,55}$, skąd wynika $v \propto m^{0,18}$ (Knut Schmidt-Nielsen, *Dlaczego tak ważne są rozmiary zwierząt*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994).

$z a \approx 16 \text{ ms}^{-1}$ oraz $\alpha = 0,13$. Podawane są też wyniki pomiarów prowadzące do oszacowania $v \propto l^{0,55}$, skąd wynika $v \propto m^{0,18}$ (Knut Schmidt-Nielsen, *Dlaczego tak ważne są rozmiary zwierząt*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994).

Lądowanie było udane. Dokonujemy oględzin okolicy, mierzymy parametry atmosfery, za pomocą wysięgników pobieramy próbki materiałów geologicznych, które będą badane na Ziemi. Nie wolno wychodzić z lądownika. Temperatura w otaczającej atmosferze wynosi 470°C. Ta gorąca atmosfera składa się w 97% z CO₂ i jest bardzo gęsta. Ciśnienie atmosferyczne jest olbrzymie, 90 razy większe niż na Ziemi. Gdyby człowiek wyszedł z lądownika w skafandrze, zostałby natychmiast zmiażdżony. Gęstość atmosfery przy takich jej parametrach wynosi około 64 kg/m³. Jest to około 46 razy więcej niż gęstość powietrza przy powierzchni Ziemi. Przyczyną wysokiej temperatury atmosfery jest efekt cieplarniany. Poprzez gęstą atmosferę dochodzi do powierzchni mała, ale wystarczająca do ogrzania planety część światła słonecznego. Uzyskaną w ten sposób energię Wenus wysyła do atmosfery w formie promieniowania podczerwonego. Jednak nie przechodzi ono poprzez atmosferę do przestrzeni kosmicznej, ponieważ CO₂ jest dla tych fal nieprzezroczysty. Promieniowanie to ogrzewa atmosferę nad gruntem i stąd taka wysoka temperatura. Lądownik powoli przemieszcza się. Na postojach dokonujemy badań. Powierzchnia planety ma bogatą rzeźbę. Ukształtowała się pod wpływem aktywności wulkanicznej, która przed milionami lat była bardziej nasiloną. Teraz wulkany rzadziej dają znać o sobie. Rozległe równiny w większej części pokrywa zastygła magma. Tam, gdzie magma nie dotarła, widać więcej skał różnych wielkości oraz rumowiska. Równiny mają swoje nazwy zaznaczone na mapach, np. „Ziemia Afrodyty”, „Ziemia Isztar”. Ponad poziomy równin wznoszą się płaskowyże. Na Ziemi Isztar wznoszą się największe łańcuchy górskie, np. Maxwell Montes. Ich wulkaniczne szczyty są ogromne, niektóre sięgają około 11 km wysokości, a ich średnice nawet 100 km. Dużo tu wulkanów tarczowych.

W atmosferze ziemskiej prędkość dźwięku wynosi około 340 m/s. Na Marsie, gdzie też jest atmosfera z CO₂ – lecz zimna i bardzo rozrzedzona – prędkość dźwięku wynosi około 220 m/s.



Planeta jest tylko nieco mniejsza od Ziemi – jej średnica to 12 104 km. Natężenie pola grawitacyjnego na jej powierzchni jest mniejsze niż na Ziemi i wynosi około 8,9 N/kg, co stanowi około 90% przyspieszenia grawitacyjnego mierzonego na powierzchni Ziemi. Oznacza to, że na Wenus ważymy 90% tego co na Ziemi. Znając parametry atmosfery Wenus, obliczamy tamtejszą prędkość dźwięku: $V = 423,3$ m/s. Piszczalka jednostronnie otwarta o długości 19,3 cm na Ziemi wydaje ton a¹ o częstotliwości 440 Hz. Na Wenus identyczna piszczałka wydaje ton o częstotliwości 548,3 Hz. Jest to ton pośredni pomiędzy tonami c² i d².

Będąc na powierzchni Wenus, nigdy nie ujrzymy nieba usianego gwiazdami, nie ujrzymy też Słońca ani innych planet. Niebo planety jest wiecznie zakryte przez trzy grube warstwy chmur, powodujące panujący tu półmrok. Promieniowanie słoneczne w zakresie podczerwonych długości fal jest mocno rozpraszane na atomach CO₂ i mamy wrażenie, jakby ten półmrok był lekko zaczerwieniony. Znajdujemy obszar obłoku odrobinę jaśniejszy od otoczenia i domyślamy się, że to jest kierunek do Słońca. Jesteśmy w miejscu, które bynajmniej nie jest rajem, jak to sobie dawniej wyobrażano. To raczej piekło z wysoką temperaturą, przy wielkim ciśnieniu, które próbuje nas zgnieść, i jeszcze do tego ta złowieszczą czerwoną emanacją piekła zawieszona w atmosferze.

W niedalekiej odległości od nas odezwał się wulkan i wyrzucił z siebie rozpaloną lawę. Czym prędzej oddalamy się od wulkanu, aby uniknąć śmierci. Mijamy szerokie szczeliny, z których wydostaje się siarkowodor. Tam, gdzie byliśmy wcześniej, już dotarła lava. Wulkan jeszcze gwałtowniej wybuchł, przez co sytuacja stała się wysoce niebezpieczna. Wzmogły się błyskawice. Na Wenus są one częste, długotrwałe i przebiegają pomiędzy obłokami. Niemal zawsze najwięcej jest ich w pobliżu wulkanów. Wygląda na to, że Wenus jest niegościnną planetą, próbującą wszelkimi sposobami pozbyć się intruzów. Teraz jeszcze na dodatek „umila” nam pobyt opadem deszczowym z gorącego kwasu siarkowego. Decydujemy się na ucieczkę. Lądownik włączył silniki i startujemy ku obłokom. Mijamy trzy warstwy chmur i jesteśmy już na satelitarnej orbicie, krążąc wokół planety.

Połączyliśmy się z naszym statkiem kosmicznym. Wreszcie widzimy czarne niebo, na nim Słońce i przy nim Merkurego. Widać już też jasną planetę – to Ziemia, a obok niej Księżyc. Jesteśmy na orbicie parkingowej Wenus. Musimy poczekać na moment dogodny do startu ku Ziemi. W tym czasie dokonujemy dalszych badań planety, wysyłając fale radarowe ku jej powierzchni. Okazuje się, że jeden obrót Wenus wokół jej osi trwa 243 doby ziemskie. Ponadto, w odróżnieniu od innych planet Wenus obraca się wokół Słońca w przeciwną stronę. W wyniku złożenia się tych dwóch ruchów długość doby słonecznej na Wenus wynosi prawie 117 dni ziemskich. Jeden obieg planety wokół Słońca trwa 225 dni ziemskich – krócej niż obrót wokół osi. Jeden rok wenusjański ma 1,92 wenusjańskich dób słonecznych. Orbita tej planety jest niemal dokładnie okręgiem. Wenus nie ma księżycy, a nasz statek kosmiczny jest chwilowo jej jedynym sztucznym satelitą.

Gdy nadszedł odpowiedni moment, włączone zostały silniki i nasz statek wprowadzony został na orbitę eliptyczną Hohmanna. Orbita nasza jest drugą – symetryczną – częścią elipsy, po której pędziliśmy ku Wenus. Teraz rozpoczynamy powrotną, beznapędową podróż z peryhelium tej orbity do aphelium w okolicy Ziemi, która znów będzie trwała prawie 5 miesięcy. Pobyt na Wenus był wartościową misją badawczą i także wielką przygodą. Teraz jednak pędzimy ku Ziemi po torze o długości około 2,7 j.a., aby jak najszybciej znaleźć się w błękitnej kolebce ludzkości.

Zobacz też: „Wycieczka na Marsa”, Δ_{15}^8 .

Lech FALANDYSZ

życie na ży 116

Szkielet znaleziony w Etiopii został nazwany Lucy przez archeologów słuchających podczas wykopalisk piosenki The Beatles pt. „Lucy in the Sky with Diamonds”.

Kto z kim, kiedy i gdzie?

Homo sapiens „narodził się” prawdopodobnie w kilku rejonach Zachodniej i Południowej Afryki. Z wielkim prawdopodobieństwem możemy przypuszczać, że istniały tam na przestrzeni setek tysięcy lat, obok siebie, różne gatunki ludzi. W Etiopii znaleziono świetnie zachowany kobiecy szkielet *Australopithecus afarensis* (kobiecy szkielet nazwany Lucy) liczący 3,2 mln lat; zapewne najstarszy odnaleziony na świecie *Homo sapiens* pochodzi z Maroka (315 000 lat). Wykopaną w Zambii szczękę mającą 300 000 lat przypisano gatunkowi *Homo heidelbergensis*. W jaskini w Południowej Afryce odkryto wiele szkieletów sprzed 236 000–335 000 lat, oznaczonych jako *Homo naledi*. Jesteśmy świadomi, że tak wyznaczana historia gatunku *Homo* jest wysoce niepełna, składają się na nią często przypadkowe odkrycia. Dzięki współczesnemu rozwojowi fizyki, genetyki czy informatyki więcej wiemy o czasach nam bliższych, z których zachowały się szczątki organiczne: białka i geny. Najbardziej ekscytujące są dane o gatunku, z którym mamy najbliższego wspólnego przodka: o człowieku neandertalskim.

Genom *Homo sapiens* oznaczony został w roku 2004, a pierwszy genom neandertalczyka w 2013 roku przez Svante Pääbo. Od tego czasu w pracowni Pääbo zsekwencjonowano kilkanaście kolejnych genomów neandertalskich, a na całym świecie – setki i tysiące ludzkich genomów współczesnych. Informatycy znajdują podobieństwa i różnice, ewolucjoniści snują hipotezy i wyciągają wnioski.

Wspólny przodek nasz i neandertalczyków żył prawdopodobnie 500–750 tys. lat temu. Z nowo zbadanych sekwencji genomowych dowiedziano się, że neandertalczyki byli nosicielami trzech mutacji w genie *SCN9A*, który koduje białko Nav1.7, podwyższające wrażliwość na ból, a także trzech innych genów wpływających na przewodnictwo nerwowe. Białko Nav1.7 ma zmieniony kształt w stosunku do formy „dzikiej” i uciska na nerwy przenoszące sygnał bólowy od rdzenia kręgowego do mózgu. U ludzi współczesnych mutacje typu neandertalskiego występują bardzo rzadko i tylko na jednym chromosomie, podczas gdy w zbadanych genomach neandertalskich były w obu chromosomach.

W małej jaskini Stajnia w Jurze Krakowsko-Częstochowskiej znaleziono 3 zęby neandertalskie sprzed 80 000 lat. Wyekstrahowano z nich mitochondrialny DNA. Są to pierwsze neandertalskie szczątki odkryte na północ od Karpat. „Polscy” neandertalczyki byli podobni genetycznie do neandertalczyków z Kaukazu. W jaskini znaleziono także wiele krzemiennych narzędzi, zęby niedźwiedzia jaskiniowego i mamuta. W Stajni nie ma naturalnie występującego krzemienia – ludzie przynieśli tam swoje narzędzia. Odkrycie pozwala na dodatkowe wnioski o migracjach neandertalskich w różnych okresach lodowacenia północnej półkuli. Ostatnio poznano także sekwencje genów 442 kobiet, mężczyzn, niemowląt i dzieci zmarłych w okresie od około 2400 roku p.n.e. po rok 1600 n.e. W poszukiwaniu genetycznych śladów Wikingów, ich szczątki do badań (zęby i kości) pozyskano z cmentarzysk na Grenlandii, w Wielkiej Brytanii, Skandynawii, Polsce (10 próbek, m.in. ze stanowisk w Bodzi, Sandomierzu, Cedyni i Czersku), na Ukrainie i w Rosji. Dane porównano z 1118 znanymi już genomami starożytnymi oraz 3855 współczesnymi,

pochodzącymi z Europy i Azji. Wnioski...? Około 5% „średniopolskiego” genomu wywodzi się ze Skandynawii.

Bardzo długo trwały spory odnośnie tego, czy gdy się „spotkali” w realu, nastąpiły także zbliżenia intymne. Z sekwencji neandertalskich w genomach ludzi współczesnych (2–2,5%) wynika niezbicie, że te dwa gatunki krzyżowały się. I zapewne takie hybrydowe związki miały miejsce częściej niż myślano.

Nieustająco pytamy również o krzyżowanie się *Homo sapiens* migrujących z Afryki z innymi gatunkami *Homo* napotkanymi po drodze. Genetyczne śledztwa ujawniły wręcz masową skalę krzyżowania się neandertalczyków z ludźmi z Denisowej Jaskini w Altaju, prawdopodobnie około 50 000 lat temu. Pewne sekwencje genowe regulujące systemy immunologiczne neandertalczyków także odnajdowane są w genomach denisowian. Więcej – sensacyjnego odkrycia dokonano, sekwencjonując genom kobiety, nazwanej Denny, która żyła tam 90 000 lat temu: była w połowie denisowianką (ojciec), w połowie neandertalką (matka). Mieszana parę złapano na „gorącym uczynku” w XXI wieku! Zagadką jest również większe podobieństwo genów Denny do genów neandertalczyków z Chorwacji niż z Syberii. Współcześni mieszkańcy Papui-Nowej Gwinei i innych rejonów Oceanii niosą fragmenty DNA denisowian, niektóre z tych genów np. umożliwiają Tybetańczykom zamieszkiwanie w wysokich górach, w warunkach niedoboru tlenu.

Na tym tajemnicze krzyżówki gatunków *Homo* się nie kończą. Dokładna analiza oznaczonych sekwencji denisowian wskazuje na nieznanne dotychczas fragmenty genomów *Homo*, które wyemigrowały jeszcze wcześniej z Afryki (miliony lat temu). Mogą pochodzić od *Homo erectus* lub kuzynów *Homo floresiensis*, ale tego już żadne analizy genetyczne nie mogą potwierdzić – możliwe koligacje leżą zbyt głęboko w historii.

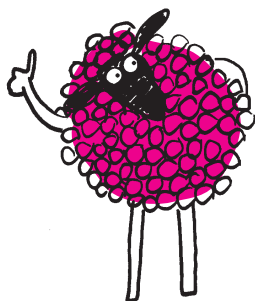
Nasze geny popychają nas ku szukaniu lepszych warunków życia. Migrujemy. Poznajemy „innych” i często się do nich zbliżamy. Trwa to od tysięcy lat. Warto o tym pamiętać także dziś...

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Gry głosowania ważonego

Oskar SKIBSKI*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Gdy w parlamencie jedna partia ma większość, to ma całą władzę i może przegłosować praktycznie każdą ustawę. Co wydarzy się jednak, jeżeli ją straci, choćby jednym głosem? Jak wówczas wygląda rozkład sił w parlamencie? Czy dobrze odpowiada rozkładowi mandatów partii politycznych?

W latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku John Banzhaf III, matematyk z Massachusetts Institute of Technology, napisał pracę o wiele mówiącym tytule *Głosowanie ważne nie działa: matematyczna analiza*. Analizował w niej radę hrabstwa Nassau w stanie Nowy Jork. W hrabstwie tym znajdowało się wówczas (i znajduje się po dziś dzień) 5 miast: Hempstead, North Hempstead, Oyster Bay, Glen Cove i Long Beach. Hempstead, które było zdecydowanie największym miastem, podzielone było na dwie strefy: Hempstead I oraz Hempstead II, a podział miejsc w radzie był następujący: Hempstead I (9 miejsc), Hempstead II (9), North Hempstead (7), Oyster Bay (3), Glen Cove (1) i Long Beach (1). Aby ocenić, jaki wpływ na przyjmowane uchwały mają te miasta, Banzhaf analizował, w jakich sytuacjach miasto zmieniając swój głos, zmienia wynik głosowania. Załóżmy na przykład, że tylko miasto North Hempstead popiera uchwałę wnoszącą, aby wybudować na ich terenie park za 10 milionów dolarów. Jeżeli Oyster Bay przychyli się do wniosku, uchwała wciąż nie zostanie podjęta – oba miasta mają razem 10 głosów, a do większości potrzeba ich 16. Z kolei jeśli to Hempstead II (druga strefa miasta Hempstead) zagłosuje „za”, uchwała zostanie przyjęta.

Zastanówmy się w ogólności, kto musi zagłosować za uchwałą, aby została ona przyjęta. Jeżeli obie strefy miasta Hempstead zagłosują „za”, to będą mieć większość. Tak samo będzie, jeżeli „za” zagłosuje jedna z tych stref oraz miasto North Hempstead. Z kolei jeśli tak nie będzie, tzn. jeżeli „za” będzie tylko jedna ze stref albo tylko miasto North Hempstead, to niezależnie od głosów pozostałych miast większości nie uda się zdobyć. Dochodzimy do zaskakującego wniosku: głosy Oyster Bay, Glen Cove i Long Beach w ogóle się nie liczą! To właśnie zaobserwował Banzhaf i grzmiał w swoim artykule, że nie może być tak, że 16% mieszkańców, bo tylu wtedy mieszkało w tych miastach, nie ma żadnego realnego wpływu na podejmowane decyzje!

Ciekawostką jest, że Banzhaf podobno pomylił się w swoich założeniach, bo w radzie hrabstwa wcale nie głosowano większością głosów, a potrzebnych było 19 głosów „za” uchwałą. Jak zmienia to rozkład sił w radzie?

Matematycznym modelem do analizy systemów głosowania są *gry głosowania ważonego* – jedna z najważniejszych klas gier koalicyjnych. Niech $N = \{1, \dots, n\}$ będzie naszym zbiorem graczy. Gra głosowania ważonego zapisywana jest jako $[q; w_1, \dots, w_n]$, gdzie w_i to waga gracza i , która odpowiada jego liczbie głosów, a q oznacza liczbę głosów potrzebnych do przegłosowania uchwały. W radzie hrabstwa Nassau graczami są zatem miasta lub ich strefy i radzie odpowiada gra $[16; 9, 9, 7, 3, 1, 1]$. Grupa graczy, czyli inaczej *koalicja*, nazywana jest *wygrywającą*, jeżeli ma w sumie tyle głosów, aby przegłosować ustawę: koalicja $S \subseteq N$ jest *wygrywająca*, jeżeli $\sum_{i \in S} w_i \geq q$. W przeciwnym wypadku koalicja jest *przegrywająca*.

Aby ocenić znaczenie gracza w grze głosowania ważonego, Banzhaf zaproponował, by sprawdzić, jak często jest on *kluczowy* w koalicji. Gracz i jest *kluczowy* w koalicji S , jeżeli koalicja jest *wygrywająca* z nim, a *przegrywająca* bez niego, tzn. S jest koalicją *wygrywającą*, a $S \setminus \{i\}$ – *przegrywającą*. Ocenę graczy wyznaczamy następująco. Najpierw dla każdego gracza liczymy, w ilu koalicjach jest on *kluczowy*: $|\{S \subseteq N \setminus \{i\} : i \text{ jest kluczowy w } S\}|$. Następnie dzielimy tę liczbę przez sumę liczb dla wszystkich graczy, aby ich oceny sumowały się do jedynki. Siła gracza i w grze $[q; w_1, \dots, w_n]$ opisana jest zatem następującym wzorem:

$$BV_i([q; w_1, \dots, w_n]) = \frac{|\{S \subseteq N : i \in S, i \text{ jest kluczowy w } S\}|}{\sum_{j \in N} |\{S \subseteq N : j \in S, j \text{ jest kluczowy w } S\}|}$$



Rozwiązanie zadania M 1654.

Odpowiedź (na obydwie pytania):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Oznaczmy przez a_n, b_n odpowiedzi na pytania zadane, odpowiednio, w punktach (a) i (b). Bezpośrednio sprawdzamy, że $a_1 = b_1 = 1$. Przyjmijmy dalej, że $n \geq 2$.

W części (a) zauważmy, że w pierwszym przejeździe z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$ Piotrek od razu zjedzie na parter oraz dla $k = 1, 2, \dots, n-1$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$ znajdzie się na piętrze k , a zatem w sytuacji, w której średni numer ostatniego piętra, które odwiedzi przed parterem, jest równy a_k . Wobec tego

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

Podobnie w części (b) z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$ Piotrek zjedzie na parter od razu oraz dla $k = 1, 2, \dots, n-1$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$ znajdzie się w sytuacji, w której oczekiwana liczba dalszych przejazdów jest równa b_k , czyli

$$b_n = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (1 + b_k).$$

Nietrudno zauważyć, że wyprowadzone rekurencyjne wzory na a_n oraz b_n są w istocie jednakowe, a zatem $b_n = a_n$. Pozostaje rozwiązać tę rekurencję.

Korzystając z wyprowadzonej zależności dla a_{n-1} , uzyskujemy

$$\sum_{k=1}^{n-2} a_k = (n-1)(a_{n-1} - 1),$$

skąd po podstawieniu do rekurencji dla a_n mamy

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}((n-1)(a_{n-1} - 1) + a_{n-1}) = a_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Stąd wobec $a_1 = 1$ wynika, że

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Uwaga. Czytelnik Oblatany zauważy z pewnością, że wynik, czyli n -ta suma częściowa szeregu harmonicznego, jest oczekiwaną liczbą cykli w rozkładzie losowej permutacji zbioru n -elementowego. Jeśli ponadto ów Czytelnik należy do zbioru Czytelników Ambitnych, polecamy Mu znalezienie kombinatorycznego uzasadnienia tego związku.

Metoda ta powszechnie nazywana jest indeksem siły Banzhafa, chociaż już wcześniej, w 1946 roku, zaproponował ją angielski uczoney Lionel Penrose, bardziej znany ze swoich prac dotyczących genetyki niepełnosprawności umysłowej.

Obliczmy, jaki jest rozkład sił w radzie hrabstwa Nassau, przy użyciu nowo poznanej techniki. Gracz 1 jest kluczowy w koalicji, jeżeli zawiera ona jego i dokładnie jednego z graczy 2 i 3. Takich koalicji jest 16: jest $2^3 = 8$ koalicji z graczami 1 i 2, ale bez gracza 3 oraz $2^3 = 8$ koalicji z graczami 1 i 3, ale bez gracza 2. Dla graczy 2 i 3 dostajemy ten sam wynik. Gracze 4, 5 i 6 nie są kluczowi nigdy. We wszystkich koalicjach mamy zatem 48 graczy kluczowych. Rozkład sił, jaki uzyskaliśmy, jest więc następujący:

$$BV([16; 9, 9, 7, 3, 1, 1]) = \langle 16/48, 16/48, 16/48, 0, 0, 0 \rangle,$$

gdzie kolejno wypisaliśmy indeksy siły Banzhafa dla gracza 1, 2 itd.

Szeroko stosowaną alternatywą dla indeksu siły Banzhafa jest indeks siły Shapleya–Shubika, który odpowiada zastosowaniu do gier głosowania ważonego wartości Shapleya, o której już w *Delcie* pisaliśmy („Rozbijanie sieci terrorystycznych za pomocą teorii gier”, Δ_{16}^{11}).

Paradoksy

Analizując indeks siły Banzhafa, możemy przekonać się, jak skomplikowaną i często nieprzewidywalną funkcją jest rozkład sił w parlamencie. Często jeden głos może zmienić sytuację diametralnie.

Załóżmy na przykład, że decyzją administracyjną status miasta otrzymała wieś Atlantic Beach i w radzie przyznano jej dwa miejsca. Dodanie dwóch miejsc zwiększy próg większości do 17 i otrzymamy następującą grę głosowania ważonego: $[17; 9, 9, 7, 3, 1, 1, 2]$. Dodaliśmy nowego gracza, możemy się zatem spodziewać, że istotność istniejących graczy spadnie. Nic bardziej mylnego – okazuje się, że miasta, które mają jednego reprezentanta, czyli gracze 5 i 6, zaczynają się liczyć. Popatrzmy na koalicję $S = \{1, 3, 5\}$. Koalicja razem ma $9 + 7 + 1 = 17$ głosów, a więc każdy jej głos jest na wagę złota. Gracz 5 jest w niej zatem kluczowy, a jego siła w grze nie jest już zerowa. Łatwo sprawdzić, że jeżeli dokładając gracza z 2 miejscami, nie zwiększylibyśmy progu q , czyli uzyskali grę $[16; 9, 9, 7, 3, 1, 1, 2]$, to gracze z jednym głosem także zyskaliby na znaczeniu. Ta obserwacja nazywana jest *paradoksem nowego członka*.

Załóżmy teraz z kolei, że obie strefy miasta Hempstead zostaną połączone, czyli rozpatrzmy grę $[16; 18, 7, 3, 1, 1]$. Jasne jest, że miasto to staje się wówczas jedynym znaczącym graczem. Może się także zdarzyć, że po złączeniu dwóch graczy ich sumaryczna siła spadnie (tak jest np. w grze $[4; 1, 1, 1, 1]$, w której gracze 1 i 2 mają w sumie siłę $1/2$, a po połączeniu ich siła spada do $1/3$). Łączenie partii może więc zarówno pozytywnie, jak i negatywnie wpływać na ich siłę. Ta obserwacja nazywana jest *paradoksem wielkości*.

Na koniec warto zaznaczyć, że w naszej analizie dokonujemy kilku upraszczających założeń. Po pierwsze zakładamy *dyscyplinę partyjną*, czyli to, że wszystkie osoby reprezentujące daną partię lub miasto głosują tak samo. Po drugie przyjmujemy, że zawsze wszyscy są obecni, czyli nikt w hrabstwie nie choruje. Po trzecie ustalamy jeden próg potrzebny do przegłosowania dowolnej uchwały, co nie zawsze ma miejsce (np. w polskim sejmie wymagana jest większość konstytucyjna, aby zmienić konstytucję). Po czwarte zakładamy, że wszystkie koalicje są równie prawdopodobne, czyli że nie ma sympatii i antypatii między partiami. Jak odrzucenie tych założeń wpłynęłoby na rozkład sił? To już jest temat na kolejny artykuł.

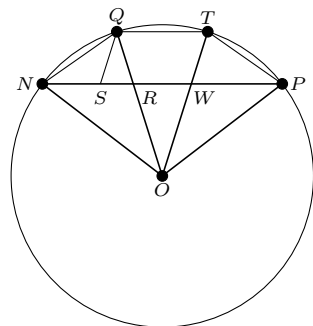
Trysekcja kąta w Geometrii Kartezjusza

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*, Mikołaj SIERŻĘGA*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



René Descartes (1596–1650)



Rys. 1

Celem tego artykułu jest przybliżenie Czytelnikowi zagadnień i metod matematyki XVII wieku na przykładzie zadania trysekcji kąta i jego rozwiązania przez Kartezjusza. Przeplatają się tu metody geometryczne z algebraicznymi.

Zadanie. Podzielić dany kąt na trzy równe części.

Zadanie jest geometryczne i wymagana jest *konstrukcja* rozwiązania (odcinka). W *metodzie* zaproponowanej przez Kartezjusza w traktacie *Geometria*, rozwiązanie tego typu zadań przebiega w dwóch krokach: analiza (*resolutio*) i synteza (*compositio*), w następującym ujęciu.

Analiza to ułożenie równania algebraicznego. Składa się z dwóch punktów:

- Dla danego zadania geometrycznego zakładamy, że wymagana konstrukcja jest już dokonana i robimy odpowiadający zadaniu rysunek (rys. 1).
- Budujemy relacje między odcinkami danymi i odcinkiem szukanym i manipulujemy nimi, aż uzyskamy odpowiednie równanie algebraiczne.

Synteza to tzw. *konstrukcja równania*, czyli geometryczna konstrukcja odcinka odpowiadającego rozwiązaniu równania algebraicznego (pierwiastki równania są reprezentowane jako miejsca przecięcia krzywych algebraicznych najniższego możliwego stopnia).

Zobaczmy, jak to wygląda w przypadku zadania trysekcji kąta. Punkt (a) to rysunek 1 na marginesie. Zawiera on już pewien pomysł, narysowanie odcinka QS równoległego do odcinka OT jest jego ważną częścią.

Położmy: $NO = 1$, $NP = q$, $NQ = z$. Chcemy znaleźć równanie na z w zależności od q , które mamy dane, gdy znamy kąt NOP , który mamy podzielić.

Zauważamy, że trójkąty ONQ , NQR i QRS są do siebie podobne (proszę sprawdzić), zatem

$$(1) \quad \frac{NO}{NQ} = \frac{NQ}{QR} = \frac{QR}{RS},$$

skąd mamy $QR = z^2$, $RS = z^3$. Mamy dalej $NQ = QT = TP = z$ i $SW = QT = NR = WP = z$. Ponieważ $NR + RW + WP = NP = q$ i $RW = SW - RS = z - z^3$, otrzymujemy w końcu równanie algebraiczne, które Kartezjusz zapisuje w postaci

$$(2) \quad z^3 = 3z - q.$$

Jest oczywiste, że jeśli znamy z , czyli długość odcinka NQ , to konstrukcja trysekcji kąta jest zakończona za pomocą dwóch ruchów cyrklem. Zauważmy, że dla $0 < q \leq 2$ istnienie dodatniego pierwiastka powyższego równania wynika z interpretacji geometrycznej równania.

Konstrukcja odcinka z należy do części drugiej rozwiązania naszego zadania, czyli do **syntezy**.

W *Geometrii* nasze zadanie rozważane jest jako szczególny przypadek równania 4. stopnia postaci

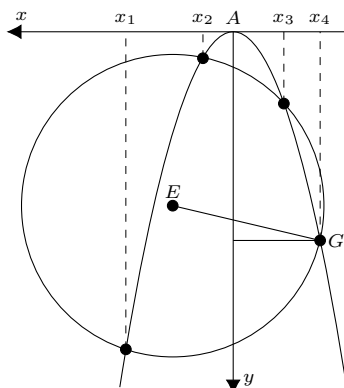
$$(3) \quad x^4 = Kx^2 + Lx + M$$

(do którego Kartezjusz sprowadza ogólne równanie 4. stopnia). Gdy $M = 0$, dzieląc powyższe równanie przez x , otrzymujemy równanie 3. stopnia postaci (2).

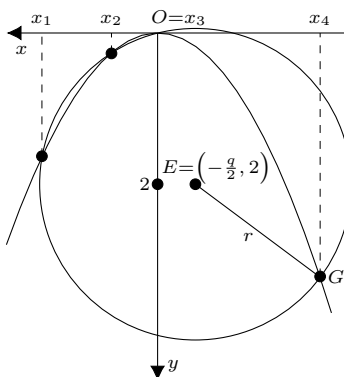


Rozwiązanie zadania M 1655. Ponieważ 1 oraz -1 są liczbami nieparzystymi, więc w każdej z par zerujących liczby k i l są różnej parzystości. To oznacza, że takich par jest co najwyżej tyle, co zbiorów $\{k, l\} \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ z jedną liczbą parzystą i jedną nieparzystą. Tych ostatnich jest dokładnie n^2 .

Uwaga. Można zauważyć, że przyjmując np. $a_i = (-1)^i$ dla $i = 1, 2, \dots, 2n$, uzyskujemy dokładnie n^2 par zerujących.



Rys. 2. Ten i następny rysunek to nieco uwspółcześnione wersje oryginalnych rysunków z *Geometrii*



Rys. 3

Dokonyjemy konstrukcji pierwiastków równania (3), przy założeniu, że ma ono cztery pierwiastki rzeczywiste. Ujemne pierwiastki nazywa Kartezjusz *falszywymi*, co nie wynika z tego, jakoby „bał się liczb ujemnych”, jak to czasem się przedstawia, ale z faktu, że długości odcinków są liczbami dodatnimi. Odrzuca on zatem rozwiązania absurdalne.

Konstrukcję rozwiązań równania (3) sprowadza Kartezjusz do konstrukcji geometrycznej punktów przecięcia paraboli $y = x^2$ z okręgiem, który należy znaleźć. Zauważmy, że jeśli w równaniu okręgu podstawimy $y = x^2$, to otrzymamy równanie czwartego stopnia.

Równanie okręgu o środku w punkcie (x_E, y_E) kartezjańskiego prostokątnego układu współrzędnych i promieniu r ma postać

$$(4) \quad (x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 = r^2.$$

Sprowadzając to równanie do postaci bez nawiasów, podstawiając w nim $y = x^2$ i porównując współczynniki ze współczynnikami w równaniu (3), dostaniemy zależności

$$(5) \quad x_E = \frac{L}{2}, \quad y_E = \frac{K+1}{2}, \quad r^2 = M + \frac{L^2}{4} + \frac{(K+1)^2}{4}.$$

Można już teraz narysować okrąg, którego odcięte przecięcie z parabola $y = x^2$ są pierwiastkami równania (3) (rys. 2). Bardzo możliwe, że Kartezjusz do swojej konstrukcji wykorzystał powyższą metodę współczynników nieoznaczonych (Guicciardini, str. 53).

W przypadku równania (2), w zgodzie z powyższą redukcją równania 4. stopnia do równania 3. stopnia, początek układu współrzędnych i wierzchołek paraboli znajdują się na okręgu, środek okręgu znajduje się w punkcie $(-\frac{q}{2}, 2)$, promień okręgu $r = \sqrt{\frac{q^2}{4} + 4}$ i (dla $0 < q < 2$) mamy trzy rozwiązania równania (2), z których jedno jest „falszywe”, a dwa są dodatnie (rys. 3). (W Księdze I *Geometrii* Kartezjusz przedstawia *arytmetykę odcinków*, czyli konstrukcje odcinków o długości $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, \sqrt{a} itd., gdy mamy dane odcinki a i b . O paraboli zakłada się tu, że jest dana, wykreślona za pomocą przyrządu).

Łatwo sprawdzić, że rozwiązaniem zadania geometrycznego trysekcji kąta NOP z rysunku 1 jest mniejszy z pierwiastków dodatnich. Zauważmy jednak, że punkty N i P wyznaczają nie jeden, a dwa dopełniające się kąty. Widzimy tutaj, jakie znaczenie ma drugi z dodatnich pierwiastków równania (2). Wyznacza on długość cięciwy stosowanej do trysekcji dopełnienia kąta NOP . W przypadku skrajnym, $q = 2$, mamy jeden pierwiastek dodatni $z = 1$. Wtedy styczna do wykresu funkcji z^3 pokrywa się z prostą $3z - 2$. Na koniec warto zauważyć, że ujemny pierwiastek, jakkolwiek geometrycznie absurdalny, jest ściśle powiązany z pozostałymi pierwiastkami, będąc, co do modułu, równy ich sumie. Jest to uniwersalna własność równań 3. stopnia z zerowym współczynnikiem przy wyrazie drugiego rzędu.

Zauważmy, że synteza w powyższym przykładzie nie jest prostą odwrotnością analizy, jak to bywa np. w zagadnieniach algebraicznych, gdzie rozumowanie opiera się na ciągu równań prowadzących od hipotezy do tezy, które można przeczytać w odwrotną stronę (ciąg równoważności $A \equiv B \equiv C \equiv \dots \equiv J$). W swojej *konstrukcji równania* Kartezjusz użył krzywych stożkowych, dobrze znanych od starożytności.

Warto uzmysłowić sobie, że bardzo długo w matematyce dominował paradygmat mówiący o tym, że rozwiązanie zadania to konstrukcja geometryczna, a nie ułożenie równania i wykazanie, że rozwiązania istnieją (konstrukcja rozwiązania nie należy do dzisiejszego paradygmatu matematyki, co niewątpliwie jest jej słabością). Niektórzy autorzy tamtych czasów uważali analizę (*resolutio*) tylko za część pomocniczą, *heureze*, która jest nieelegancka i którą można usunąć w ostatecznej wersji publikacji. Pewność dowodu daje konstrukcja. Także Archimedes chował często źródła swoich pomysłów analitycznych, przedstawiając



Rozwiązanie zadania M 1656.

Rozważmy ciąg $a_1 = 1$ oraz $a_{i+1} = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_i$ dla $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$. Zauważmy, że para (k, l) jest minusjedynkująca dokładnie wtedy, gdy $a_k = -a_{l+1}$, tzn. $\{a_k, a_{l+1}\} = \{-1, 1\}$. Jeśli w ciągu $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ jest m wyrazów równych 1, to szukana liczba jest równa

$$m(2n - m) = n^2 - (n - m)^2,$$

a więc jest nie większa od n^2 .

Uwaga. Można zauważyć, że przyjmując np. $b_i = -1$ dla $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$, uzyskujemy dokładnie n^2 par minusjedynkujących.

tylko dowód geometryczny. Wielkim orędownikiem metod geometrycznych, jako dających matematyczną pewność, był Isaac Newton. Wystarczy zajrzeć do *Principiów*. Kontrowersje co do tego, jak ma wyglądać matematyka i w jakim języku należy ją wyrażać, ciągną się do współczesności. Dominujący od około 100 lat paradygmat ujęć algebraicznych czy analitycznych w języku abstrakcyjnej symboliki literowej, redukujących geometrię do co najwyżej rysunku pomocniczego, spotyka się stale ze słuszną krytyką znakomitych matematyków i nauczycieli. Niestrudzonym adwokatem metod geometrycznych we współczesnej matematyce był na przykład Władimir Arnold. Tristan Needham z kolei porównuje obecną sytuację do absurdałnego świata muzyki, w którym można tworzyć jedynie partyturę utworu, ale jego wykonywanie jest niemile widziane czy wręcz zakazane. A przecież muzyka to słuchanie, a matematyka to widzenie. Najwyższą formą poznania jest widzenie intuicyjne, jasny i wyraźny obraz.

À propos **trysekcji klasycznej**. Bez wątpienia części Czytelników problem trysekcji kąta skojarzy się z klasycznym problemem jej niewykonalności. Faktycznie, w 1837 roku Pierre Wantzel, uzbrojony w przełomowe idee Évariste'a Galois, dowiódł, że taki podział jest w ogólności (tj. dla dowolnego kąta) niemożliwy do wykonania **za pomocą cyrkla i liniału**. Jak te fundamentalne fakty mają się do powyższego przepisu? Jak już wiemy, w swojej *Geometrii* Kartezjusz ułożył równanie

$$z^3 = 3z - q,$$

gdzie z jest odcinkiem, który należy zbudować, mając dane q , które zależy od kąta, który z kolei mamy podzielić na trzy części.

Zauważmy, że dla kąta $\alpha = 180^\circ$ mamy $q = 2$ i pierwiastkiem naszego równania jest $z = 1$, co jest oczywiście równe NO , czyli równo promieniowi okręgu, na którym oparty jest kąt α . W tym przypadku trysekcja kąta pokrywa się z zadaniem wyznaczenia sześciokąta foremnego.

Dla kąta $\alpha = 60^\circ$ mamy $q = 1$, ale w tym przypadku rozwiązanie równania

$$(6) \quad z^3 = 3z - 1$$

nie jest konstruowalne za pomocą cyrkla i liniału. Łatwo się o tym przekonać, sprawdzając, że równanie to nie ma pierwiastków wymiernych (wystarczy podstawić $z = \frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi, niemającymi wspólnego dzielnika). Proste rozumowanie prowadzi do wniosku, że z powyższej postaci może być równe tylko 1 lub -1 . Żadna z tych liczb nie jest rozwiązaniem równania (6). Skorzystaliśmy ze znanego twierdzenia o wielomianach trzeciego stopnia, które jest przystępnie opisane na przykład w książce Couranta i Robbinsa *Co to jest matematyka?*

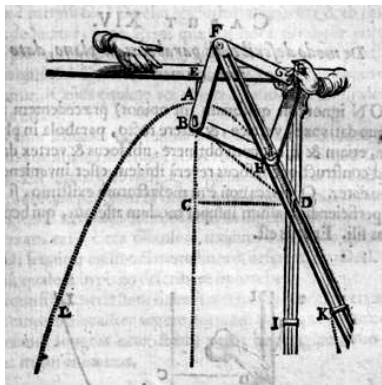
Ogólniej, poza pewnymi szczególnymi przypadkami, krokiem przepisu Kartezjusza, który jest niekonstrukcyjny w sensie klasycznym, jest znalezienie punktów przecięcia paraboli i okręgu.

Jeżeli jednak będziemy mniej radykalni i, podobnie jak matematycy XVII wieku, wyjdziemy poza liniał i cyrkiel, poprzez użycie narzędzi takich, jak na przykład ukazany na marginesie mechanizm Franza van Schootena (1615–1660), to okaże się, że procedura Kartezjusza pozwala rozwiązywać równania trzeciego stopnia bez wykonania jakiegokolwiek algebraicznej operacji.

Literatura:

- W. I. Arnold, *O nauczaniu matematyki*, Wiadomości Matematyczne, **37**, Nr 01, str. 17–26, 2001.
 N. Guicciardini, *Isaac Newton on mathematical certainty and method*, MIT Press, 2009.
 Kartezjusz, *Geometria*, TAIWPN Universitas Kraków, 2016.
 T. Needham, *Visual Complex Analysis*, OUP (USA), 1999.
 I. Newton, *Matematyczne zasady filozofii przyrody*, Copernicus Center Press, 2013.
 R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka?* Prószyński i S-ka, 1988.
 G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, PWN, 1964.

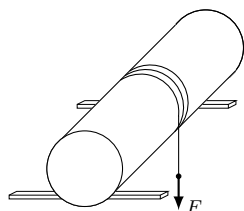
Konstruowalność za pomocą cyrkla i liniału zakłada skończoną sekwencję operacji typu:
 (a) narysować prostą przechodzącą przez dwa punkty,
 (b) narysować okrąg o zadanym środku i promieniu,
 (c) znaleźć punkt przecięcia dwóch prostych, dwóch okręgów lub prostej i okręgu.



Mechanizm rysujący parabolę

Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2021



Klub 44 M

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
799 ($WT = 2,12$) i 800 ($WT = 2,84$)
z numeru 4/2020

Franciszek S. Sikorski	Warszawa	44,03
Zbigniew Skalik	Wrocław	43,94
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Andrzej Kurach	Ryjewo	41,17
Marek Spychała	Warszawa	40,62
Jakub Węgrecki	Kraków	39,40
Karol Matuszewski	Rawicz	38,31
Marcin Małogrosz	Warszawa	36,93
Tomasz Wietecha	Tarnów	36,85
Janusz Olszewski	Warszawa	34,69

Pan Franciszek S. Sikorski – już po raz drugi!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Zadania z fizyki nr 706, 707

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

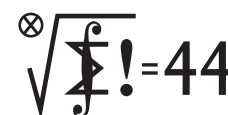


706. Gdy krótkowidz i dalekowidz używają swoich okularów, widzą tak jak człowiek, który ma dobry wzrok. Pewnego razu przez pomyłkę panowie zamienili swoje okulary. Po włożeniu okularów krótkowidza dalekowidz stwierdził, że widzi ostro tylko bardzo daleko położone przedmioty. Jaka jest najmniejsza odległość, z której krótkowidz w okularach dalekowidza widzi ostro drobny druk?

707. Na dwóch równoległych poziomych deskach leży pełny walec o promieniu R i masie m , na który nawinięty jest sznurek (rysunek). Na zwisający koniec sznurka działa pionowo siła F . Jaka jest najmniejsza wartość współczynnika tarcia między walcem a deskami, przy której będzie on się toczył bez poślizgu. Oś walca jest prostopadła do desek, a jego środek ciężkości i siła F leżą w płaszczyźnie pionowej przechodzącej pośrodku między deskami.

Zadania z matematyki nr 809, 810

Redaguje *Marcin E. KUCZMA*



809. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości AD i BE przecinają się w punkcie H . Proste AB i DE przecinają się w punkcie S . Prosta przechodząca przez środek M boku AB i równoległa do dwusiecznej kąta ASE przecina proste CA , CB , HA , HB , odpowiednio, w punktach X , Y , P , Q . Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach CXY i HPQ są przystające.

810. Dla permutacji (x_1, \dots, x_n) zbioru $\{1, \dots, n\}$ rozważamy liczby:

$$s_k = x_1 + \dots + x_k \quad \text{oraz} \quad t_k = k + x_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ udowodnić, że permutacja o własności:

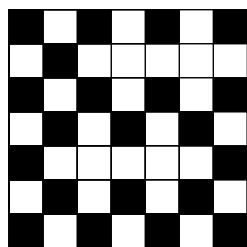
(i) liczby s_1, \dots, s_n dają różne reszty z dzielenia przez n

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje permutacja o własności:

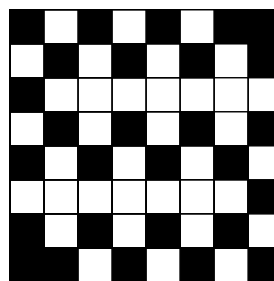
(ii) liczby t_1, \dots, t_n dają różne reszty z dzielenia przez n .

Zadanie 810 zaproponował pan Semen Słobodianiuk.

Rozwiązanie zadania z artykułu *Infekcja* (str. 5)



Punkt (a)

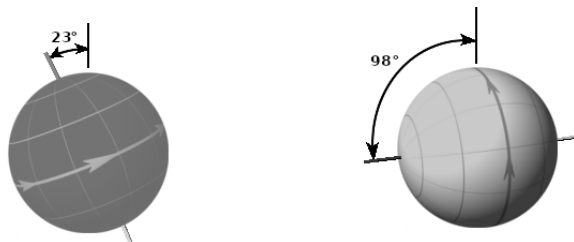


Punkt (b)

Prosto z nieba: Czy na „przewróconej” planecie może istnieć życie?

Artykuł ten jest oparty na publikacji *Atmospheric Dynamics in High Obliquity Planets*, Ana H. Lobo & Simona Bordini, *Icarus*, Volume 340, 113592.

Wyobraźmy sobie planetę będącą skrzyżowaniem Ziemi i Urana – odpowiednio nasłonecznioną (znajdującą się w tak zwanej ekosferze gwiazdy), z dużą ilością wody na powierzchni, ale o osi obrotu (linii łączącej północny i południowy biegun geograficzny) nachylonej pod kątem około 90° względem prostej prostopadłej do płaszczyzny orbitalnej – tak jak nachylona jest oś obrotu Urana. Oczywiście taka planeta aktualnie nie istnieje w Układzie Słonecznym, ale naukowcy podejrzewają, że miliardy lat temu tak właśnie mógł wyglądać... Mars.



Nachylenie osi obrotu względem prostej prostopadłej do płaszczyzny orbitalnej dla Ziemi to około 23° , natomiast dla Urana to aż 98° .

Dzięki nachyleniu osi obrotu Ziemi do płaszczyzny orbitalnej na naszej planecie występują pory roku – gdy północny koniec osi Ziemi jest skierowany ku Słońcu, wówczas na półkuli północnej jest lato, w tym samym czasie na półkuli południowej jest zima (w drugiej połowie roku sytuacja jest odwrotna). Ale co by było, gdyby oś planety podobnej do Ziemi leżała w płaszczyźnie orbity? Czyli przez pół roku nasłoneczniony byłby jeden biegun, a przez kolejne pół roku drugi biegun planety. Czy nadawałaby się ona wtedy do zamieszkania?

Na to pytanie spróbowali odpowiedzieć naukowcy z Kalifornijskiego Instytutu Technicznego (Caltech). W tym celu wykorzystali Model Ogólnej Cyrkulacji (*General Circulation Model*, GCM) – numeryczną symulację komputerową opisującą klimat planety na

podstawie równań mechaniki płynów oraz innych równań z zakresu fizyki i chemii opisujących procesy istotne z punktu widzenia zmian klimatu.

I tak, na planecie o dużym nachyleniu osi obrotu ($> 55^\circ$) bieguny otrzymają średnio więcej światła słonecznego niż równik (w przeciwieństwie do Ziemi). Spowoduje to silne nagrzewanie biegunów latem i ich szybkie ochłodzenie zimą. Na takiej planecie będziemy mieli więc do czynienia z gwałtownymi zmianami temperatur pomiędzy porami roku. Dla przykładu, na planecie przechylonej o więcej niż 85° umiarkowane szerokości geograficzne będą nagrzewały się (i ochładzały) średnio o około 20°C bardziej niż ma to miejsce na Ziemi. Oznacza to, że w lipcu w Polsce mielibyśmy do czynienia z przyjemnymi temperaturami rzędu 50°C , a w grudniu z przymrozkami rzędu -40°C .

Jest jeszcze jedna rzecz, do której musielibyśmy się przyzwyczaić w Polsce – sezony monsunowe. Naukowcy zauważyli, że w miarę zwiększania się nachylenia osi obrotu planety obszary równikowe zamieniają się w pustynie, a klimat wyższych szerokości geograficznych staje się coraz bardziej wilgotny. Oznacza to ekstremalnie intensywne i długotrwałe opady deszczu występujące jednocześnie na całej półkuli planety.

Czy planeta o dużym nachyleniu osi obrotu nadawałaby się więc do życia? Okazuje się, że tak. Symulacje klimatu takiej planety pokazują, że mimo ekstremalnie długich dni i nocy polarnych, globalnych pór monsunowych i gwałtownych zmian temperatur niektóre jej regiony mogłyby nadawać się do zamieszkania przez ludzi. Po prostu występowałyby w innych obszarach geograficznych niż obecnie na Ziemi. Jest to bardzo dobra informacja dla astronomów poszukujących nowych planet pozasłonecznych – skrajnie przechylone planety orbitujące wewnątrz ekosfery rodzimej gwiazdy możemy uznać za te, na których potencjalnie mogło rozwinąć się życie.

Anna DURKALEC

Niebo w listopadzie

Listopadowe Słońce kontynuuje wędrówkę na południe, lecz wyhamowuje w tym ruchu i wysokość jego górowania zmniejsza się o 8° , do 16° na koniec miesiąca. W tym czasie Słońce przemierzy cały gwiazdozbiór Wagi, przetnie najbardziej na północ wysunięty fragment Skorpiona i zakończy miesiąc w gwiazdozbiórze Wężownika, czyli trzynastym znaku zodiaku, którego nie uwzględniają horoskopy.

Podobnie jak w październiku, w listopadzie księżycowa luna rozświetli początek i koniec miesiąca, a w jego środku Srebrny Glob przejdzie przez now. Październik skończył się pełnią Księżyca na pograniczu gwiazdozbiorów Barana i Wieloryba, ponad 25° na północny wschód od bardzo jasnej planety Mars. Przez

pierwszy tydzień listopada Księżyc przejdzie przez gwiazdozbiory Byka, Bliźniąt i Raka, osiągając ostatnią kwadrę 8 listopada na pograniczu gwiazdozbiorów Raka i Lwa.

Z ciekawszych spotkań Księżyca z innymi ciałami niebieskimi w tym okresie należy odnotować rano 3 listopada, gdy Księżyc w fazie 94% minie w odległości 1° gwiazdę Ain (ϵ Tau), czyli najbardziej na północ wysuniętą jasną gwiazdę Hiad, i jednocześnie w odległości nieco ponad 4° Aldebarana, najjaśniejszą gwiazdę Byka. Cztery dni później, 7 listopada, około godziny 22, zaraz po swoim wschodzie Srebrny Glob w fazie 65% odkryje gwiazdę Asellus Borealis, inaczej γ Cnc, czyli gwiazdę stanowiącą północno-wschodni róg

trapezu otaczającego znaną i jasną gromadę otwartą gwiazd M44, która sama znajdzie się 2° od Srebrnego Globu.

W kolejnych dniach Księżyc podąży ku nowiu, przez który przejdzie rankiem 15 listopada. Ze względu na to, że o tej porze roku ekliptyka tworzy duży kąt z porannym widnokregiem, Srebrny Glob pozostanie widoczny prawie do samego spotkania ze Słońcem. W dniach 9–10 listopada chudnący Księżyc spotka się z Regulesem, najjaśniejszą gwiazdą Lwa. Z kolei 13 listopada, już bardzo cienki sierp Księżyca, w fazie jedynie 6%, dotrze na 4,5 stopnia do planety Wenus i jednocześnie na 9° do planety Merkury. Dobę później sierp Księżyca przesunie się kilkanaście stopni na południowy wschód i w fazie zaledwie 1% znajdzie się 5° od Merkurego, na godzinie 7 względem niego. O świcie Księżyc wzniesie się na wysokość 3°, a Merkury 4° wyżej.

Duże nachylenie ekliptyki jest korzystne także dla wspomnianych wyżej **Wenus** i **Merkurego**. Pierwsza z planet już od dłuższego czasu ozdabia poranny nieboskłon. Przez cały miesiąc przemierzy resztę gwiazdozbioru Panny i przejdzie do sąsiedniego gwiazdozbioru Wagi. 6 listopada Wenus minie Porrimę, jedną z jaśniejszych gwiazd Panny, w odległości niewiele przekraczającej 1°, a 16 dnia miesiąca – Spikę, najjaśniejszą gwiazdę konstelacji, tym razem w odległości 4°. W listopadzie jasność Wenus spadnie poniżej -4^m , a jej tarcza skurczy się do 12''.

Planeta Merkury 10 listopada osiągnie maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą 19°, i można ją obserwować przez większość miesiąca. Początkowo Merkury zakresli pętlę 4° od Spiki i podąży w kierunku Wagi, do której wejdzie pod koniec okresu widoczności. W okolicach maksymalnej elongacji Merkury o świcie zdąży się wzniesć na wysokość mniej więcej 7°. Jak zawsze podczas elongacji zachodniej, jasność i faza Merkurego z upływem czasu rośnie, a jego tarcza maleje. Na początku miesiąca planeta zaprezentuje tarczę o jasności $+0,7^m$, średnicy 9'' i fazie około 20%. Natomiast 22 listopada blask Merkurego urośnie do $-0,7^m$, średnica tarczy spadnie do 5'', zaś faza urośnie do prawie 90%. Tego ranka planeta przejdzie niewiele ponad 1° na północ od Zuben Elgenubi, drugiej co do jasności gwiazdy Wagi. Do odszukania Merkurego można wykorzystać planetę Wenus, która zbliży się doń od początkowego dystansu 18° do 13° w środku okresu widoczności. Potem odległość między planetami znowu znacznie rośnie.

Po nowiu Księżyc przeniesie się na niebo wieczorne, gdzie ekliptyka jest nachylona niekorzystnie i na jego wyłonienie się z zorzy wieczornej trzeba poczekać kilka dni. W drugiej połowie miesiąca, 19 listopada, Księżyc w fazie 25% przejdzie 4° na południe od pary planet **Jowisz-Saturn**. Obie planety są widoczne coraz słabiej, dążąc do styczniowego spotkania ze Słońcem. Zanim znikną, zbliżą się do siebie na bardzo małą odległość kilku minut kątowych w dniu przesilenia zimowego. Natomiast w listopadzie dystans między planetami

zmniejszy się z 5° na początku miesiąca do 2° pod jego koniec. Planety można obserwować wieczorem nisko nad południowo-zachodnim widnokregiem. Obie chowają się za widnokrąg przed godziną 21. Jasność Jowisza obniży się do -2^m , a średnica jego tarczy zmniejszy się do 34''. Saturn świeci blaskiem $+0,6^m$, przy tarczy o średnicy 16''.

Księżyc przejdzie przez I kwadrę 22 listopada, a dobę później spotka się z planetą **Neptun**, która pod koniec miesiąca zmieni kierunek ruchu z wstecznego na prosty, kończąc tym samym okres swojej najlepszej widoczności w tym sezonie obserwacyjnym. Neptun zawróci 45' na wschód od gwiazdy 4. wielkości φ Aqr. Planeta przecina południk lokalny około godziny 20, a zatem nadal jest dobrze widoczna.

Trzy dni później Srebrny Glob, już w fazie ponad 80%, przejdzie 6° od **Marsa**, kontynuującego szybkie oddalanie się od Ziemi i idący w ślad za tym spadek jasności i średnicy kątowej. W trakcie miesiąca blask Czerwonej Planety osłabnie o całe magnitudo, do $-1,1^m$, a tarcza skurczy się do 15''. W połowie listopada planeta zmieni kierunek ruchu na prosty, stąd jej pozycja na początku i na końcu miesiąca zmieni się tylko o 2°.

Przez cały miesiąc bardzo dobrze widoczna jest planeta **Uran**, którą prawie pełny Księżyc minie 27 dnia miesiąca. Planeta jest tuż po opozycji i można ją obserwować prawie całą noc, mniej więcej 10° na południe od Hamala, najjaśniejszej gwiazdy Barana.

Ostatniego dnia listopada przypada druga w tym miesiącu pełnia Księżyca. Tym razem Srebrny Glob zahaczy o półcień Ziemi. I to całkiem głęboko, gdyż faza maksymalna wyniesie 83%. Jest to już czwarte takie zjawisko w tym roku, niestety niewidoczne z Polski, choć dostrzegalne m.in. z Wysp Brytyjskich i północnej Skandynawii.

W zeszłym miesiącu dwie jasne mirydy: **Mira** (o Cet) i **R Leo** miały maksimum swojej jasności i w listopadzie wciąż powinny mieć duży blask. Mira góruje w tym samym momencie co Uran, lecz 16° niżej. Rok temu, podczas poprzedniego maksimum Mira osiągnęła blask $+2,5^m$ i jeśli tym razem zbliży się do podobnej jasności, to w listopadzie wciąż powinna łatwo dać się dostrzec gołym okiem. Druga z gwiazd wschodzi po godzinie 22, górując 7 godzin później. Tę gwiazdę powinno dać się łatwo odszukać przez lornetkę, jakieś 5° na zachód od Regulusa.

Listopad jest miesiącem słynnych meteorów **Leonidów**. Promieniują one prawie cały miesiąc, z maksimum 17 listopada. W tym roku zbiega się ono z nowiem Księżyca, a zatem ich warunki obserwacyjne są znakomite. Radiant roju znajduje się w sierpnie Lwa i wschodzi godzinę przed R Leo, górując około 5 rano na wysokości 60°. Niestety w tym roku nie przewiduje się deszczu Leonidów. Oczekuje się maksymalnie kilkunastu zjawisk na godzinę. Są to bardzo szybkie meteory, zderzają się z naszą atmosferą z prędkością 72 km/s i często zostawiają za sobą smugi dymu.

Ariel MAJCHER

Bardziej nie ma dziwadełek

Ile materii da się upchnąć w bardzo małej przestrzeni, porównywalnej rozmiarami z atomem (rzędu 10^{-10} m) czy jądrem atomowym (rzędu 10^{-15} m)? Wiadomo, że gdy się z tym upychaniem przesadzi, otrzymuje się czarną dziurę. Taka o rozmiarach atomowych ważyłaby kilkaset bilionów kilogramów, o rozmiarach jądrowych – coś koło miliarda kilogramów.

Co do istnienia obiektów nieco mniej „gęstych” niż czarne dziury fizycy wcale nie są zgodni. Teoretycy debatują nad możliwością istnienia obiektów uroczo nazwanych dziwadełkami (ang. *strangelet*), zbudowanych z materii, w której prócz kwarków górnych i dolnych, tworzących protony i neutrony, występują w dużej ilości również kwarki dziwne. Rozważa się także zlokalizowane konfiguracje pól bozonowych z zachowanym ładunkiem, które miałyby się zachowywać jak zwykle, tyle że bardzo duże cząstki elementarne. Jeszcze innym pomysłem są monopole magnetyczne stanowiące zlokalizowane źródła pola magnetycznego (w zwykłej elektrodynamice źródłem pola magnetycznego jest ruch ładunków lub zmienne w czasie pole elektryczne). To tylko najmniej kontrowersyjne pomysły, ale listę tę można by ciągnąć znacznie dłużej...

Jak jednak stwierdzić, czy takie byty rzeczywiście znajdują się wokół nas? Nie może ich być zbyt dużo, gdyż oddziałując grawitacyjnie, łatwo zdradzałyby swoją obecność, tak jak ciemna materia. Mogłyby też oddziaływać z atomami zwykłej materii, należałoby

tylko ustalić, jakie jest prawdopodobieństwo takiego oddziaływania. Obliczono, że poruszające się z prędkością 100 km/s dziwadełka o masie 10^{-14} g byłyby w stanie przejść przez atmosferę, a te o masie 0,1 g – nawet przez całą kulę ziemską na wskroś. Poruszając się w ośrodku takim jak woda czy powietrze, dziwadełka zderzające się z atomami traciłyby z wolna energię, która byłaby uwalniana w postaci promieniowania elektromagnetycznego – podgrzewany ośrodek po prostu rozświetlałby się wzdłuż trajektorii dziwadełek.

Jak to zaobserwować? Potrzebny jest detektor o możliwie dużym polu widzenia, stale monitorujący całe niebo. Takim detektorem był zaprojektowany w Warszawie przez garstkę zapaleńców z różnych jednostek naukowych instrument „Pi of the Sky”. Składał się on z 16 kamer CCD, z których każda miała matrycę w rozmiarze 4 megapikseli. Kamery były zamocowane w taki sposób, że zapewniały obserwację wycinka sfery niebieskiej odpowiadającego około 2 steradianom (cała sfera to 4π steradianów), realizując niemalże obietnicę zawartą w nazwie projektu. Urządzenie znajdowało się w centrum El Arenosillo w pobliżu Mazagón w prowincji Huelva w Andaluzji, na południowo-zachodnim wybrzeżu Hiszpanii, skąd startują rakiety suborbitalne zarządzane przez Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, i pracowało w latach 2013–2017. (Prototyp „Pi of the Sky” pracował od roku 2004 w Las Campanas Observatory w Chile.)

Zasadniczym celem zbudowania „Pi of the Sky” było poszukiwanie optycznych odpowiedników błysków gamma. Pojedyncze zdjęcia nieba wykonywane przez przyrząd były wynikiem naświetlania przez 10 sekund. Tak długi czas naświetlania nie stanowi idealnej konfiguracji do poszukiwania śladów dziwadełek i innych małych, lecz masywnych obiektów, ale skoro przez lata pracy zgromadzono całkiem pokaźną ilość danych, szkoda było nie wykorzystać ich do poszukiwania egzotycznej materii [*]. Czytelnicy Uważni dostrzegą, że na niezbyt długiej liście autorów figurują m.in. redaktorka *Delty* oraz wiceminister nauki i szkolnictwa wyższego. Największym wyzwaniem było odróżnienie – wśród kilku tysięcy podłużnych, świecących kształtów znalezionych na zdjęciach – potencjalnych dziwadełek od innych poruszających się obiektów, takich jak meteory i sztuczne satelity. W przeciwieństwie do nich dziwadełka nie tracą zbyt wiele energii, przelatując przez atmosferę, i nie zmieniają znacząco swojej jasności. Spośród 29 kandydatów na ślady dziwadełek udało się odrzucić 9 w oparciu o bazy danych znanych satelitów, ale wiadomo, że wokół Ziemi krąży wiele satelitów niezarejestrowanych w tych bazach. Dwadzieścia pozostałych przypadków było jednak wciąż nieoczywistych, gdyż według teorii ślady prawdziwych dziwadełek powinny być bardzo długie. Zdecydowano się zatem na przyjęcie konserwatywnej hipotezy, że żadne dziwadełka czy podobne obiekty nie zostały zaobserwowane, na tej podstawie wyznaczono nowe ograniczenie górne na liczbę takich obiektów (o masach od 100 g do 100 kg) uderzających w Ziemię.

Widać stąd, że nawet ze starych i zgromadzonych w zupełnie innym celu danych można wycisnąć trochę świeżej fizyki godnej publikacji w świetnym czasopiśmie.

Krzysztof TURZYŃSKI



[*] L. W. Piotrowski, K. Małek, L. Mankiewicz, M. Sokołowski, G. Wrochna, A. Zadrożny, A. F. Żarnecki, *Limits on the flux of nuclearites and other heavy compact objects from the "Pi of the Sky" project*, Phys. Rev. Lett. **125** (2020) 091101.



Wykładniki p -adyczne

Bartłomiej BZDEGA

Niech $n \neq 0$ będzie liczbą całkowitą, zaś p liczbą pierwszą. Wówczas największą taką liczbę całkowitą nieujemną α , dla której $p^\alpha \mid n$, nazywamy *wykładnikiem p -adycznym* liczby n i oznaczamy $\nu_p(n)$. Dodatkowo przyjmujemy, że $\nu_p(0) = +\infty$.

Dla $n \neq 0$ stwierdzenie $\nu_p(n) = \alpha$ jest równoważne stwierdzeniu, że $p^\alpha \mid n$ i $p^{\alpha+1} \nmid n$. Stosuje się również notację $p^\alpha \parallel n$, którą odczytujemy: p^α *dzieli dokładnie* n . Możemy też zapisać $n = p^\alpha m$, przy czym $p \nmid m$. Warto jeszcze zauważyć, że $\nu_p(n) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \nmid n$.

Wykładniki p -adyczne mają następujące własności dla całkowitych a, b i dowolnej liczby pierwszej p :

- (1) $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$; dla $a \mid b$ mamy $\nu_p(b/a) = \nu_p(b) - \nu_p(a)$;
- (2) jeśli $\nu_p(a) < \nu_p(b)$, to $\nu_p(a+b) = \nu_p(a)$;
- (3) jeśli $\nu_p(a) = \nu_p(b)$, to $\nu_p(a+b) \geq \nu_p(a)$.

Dowód. Przypadek $a = 0$ lub $b = 0$ jest trywialny, więc go pominiemy. Niech $a = p^\alpha n$ i $b = p^\beta m$, przy czym $p \nmid m, n$. Równość $ab = p^{\alpha+\beta} mn$ i niepodzielność $p \nmid mn$ dowodzą pierwszej części własności (1). Druga część jasno wynika z pierwszej. Aby wykazać (2) i (3), zapiszmy $a+b = p^\alpha(m+np^{\beta-\alpha})$. Korzystając z (1) mamy $\nu_p(a+b) = \alpha + \nu_p(m+np^{\beta-\alpha})$. Jeśli $\alpha < \beta$, to $p \nmid m+np^{\beta-\alpha}$, a jeśli $\alpha = \beta$, to liczba $m+np^{\beta-\alpha} = m+n$ może, choć nie musi, być podzielna przez p .

We własnościach (2) i (3) dodawanie można zastąpić odejmowaniem, dowód jest praktycznie taki sam. Indukcyjnie otrzymamy następujące uogólnienie na liczby całkowite a, b, c, \dots :

- (2') jeśli w ciągu $(\nu_p(a), \nu_p(b), \nu_p(c), \dots)$ istnieje dokładnie jeden wyraz najmniejszy, to $\nu_p(a+b+c+\dots) = \min\{\nu_p(a), \nu_p(b), \nu_p(c), \dots\}$;
- (3') w każdym przypadku $\nu_p(a+b+c+\dots) \geq \min\{\nu_p(a), \nu_p(b), \nu_p(c), \dots\}$.

Posługując się twierdzeniem o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze, można wykazać, że dla liczb całkowitych dodatnich a, b, c, \dots :

- (4) $a = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby pierwszej p zachodzi równość $\nu_p(a) = \nu_p(b)$;
- (5) $a \mid b$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby pierwszej p zachodzi nierówność $\nu_p(a) \leq \nu_p(b)$;
- (6) $\nu_p(\text{NWD}(a, b, c, \dots)) = \min\{\nu_p(a), \nu_p(b), \nu_p(c), \dots\}$;
- (7) $\nu_p(\text{NWW}[a, b, c, \dots]) = \max\{\nu_p(a), \nu_p(b), \nu_p(c), \dots\}$;
- (8) liczba a jest k -tą potęgą liczby naturalnej wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby pierwszej p zachodzi podzielność $k \mid \nu_p(a)$.

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Zadania

1. Udowodnić następujące równości dla liczb całkowitych dodatnich a, b i c :
 - (a) $\frac{\text{NWW}[a, b, c] \text{NWD}(a, b) \text{NWD}(b, c) \text{NWD}(c, a)}{\text{NWD}(a, b, c)} = abc$,
 - (b) $\frac{\text{NWW}[a, b] \text{NWW}[b, c] \text{NWW}[c, a]}{\text{NWW}[a, b, c]^2} = \frac{\text{NWD}(a, b) \text{NWD}(b, c) \text{NWD}(c, a)}{\text{NWD}(a, b, c)^2}$.
2. Korzystając z *postulatu Bertranda* (dla każdego rzeczywistego $x \geq 1$ w przedziale $[x, 2x]$ znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza), udowodnić, że dla naturalnych $n > 1$:
 - (a) liczba $n!$ nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku naturalnym i większym niż 1,
 - (b) liczba $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ nie jest naturalna.
3. Liczby $a, b \neq 0$ oraz $\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b}$ są całkowite. Wykazać, że liczby $\frac{b^2}{a}$ i $\frac{a^2}{b}$ też są całkowite.
4. Liczby $a, b, c \neq 0$ oraz $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ są całkowite. Dowieść, że abc jest sześcianem liczby całkowitej.
5. Liczby całkowite $a, b > 0$ spełniają podzielność $ab \mid a^2 + b^2 + a$. Wykazać, że a jest kwadratem liczby naturalnej.
6. Liczby naturalne a i b są dzielnikami n . Wykazać, że jeśli liczba $\frac{n}{a} + \frac{n}{b}$ jest podzielna przez a i b , to liczba n jest podzielna przez liczbę $\frac{\text{NWW}(a, b)^2}{\text{NWD}(a, b)}$.

Wskazówki do zadań
 Uwaga. O ile nie napisano inaczej, we wszystkich wskazówkach p jest pewną liczbą pierwszą oraz
 1. Można bez straty ogólności przyjąć, że $a \leq b \leq c$, i skorzystać z własności (1), (6) i (7), a na koniec (4).
 2. Weźmy liczbę pierwszą p , spełniającą nierówność $\frac{1}{2}n \leq p \leq n$.
 (a) $a = 1$,
 (b) zapisać tę sumę w postaci $a/n!$ i stosując własność (2'), wykazać, że $a \leq 2a$.
 z własności (2) i (3), wykazać nierówność $a + b \leq a^2 + b^2 + a$. Rozważając osobno z której wnioskujemy, że $a + b \leq a^2 + b^2 + a$.
 3. Zachodzi podzielność $ab \mid a^3 + b^3$,
 4. Zachodzi podzielność $abc \mid a^2c + b^2a + abc$, która należy do równości $a^3 + b^3 + abc$.
 5. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 6. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 7. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 8. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 9. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 10. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 11. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 12. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 13. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 14. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 15. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 16. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 17. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 18. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 19. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 20. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 21. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 22. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 23. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 24. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 25. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 26. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 27. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 28. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 29. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 30. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 31. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 32. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 33. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 34. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 35. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 36. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 37. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 38. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 39. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 40. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 41. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 42. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 43. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 44. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 45. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 46. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 47. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 48. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 49. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 50. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 51. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 52. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 53. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 54. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 55. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 56. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 57. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 58. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 59. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 60. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 61. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 62. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 63. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 64. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 65. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 66. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 67. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 68. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 69. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 70. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 71. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 72. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 73. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 74. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 75. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 76. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 77. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 78. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 79. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 80. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 81. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 82. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 83. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 84. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 85. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 86. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 87. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 88. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 89. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 90. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 91. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 92. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 93. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 94. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 95. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 96. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 97. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 98. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 99. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.
 100. Wystarczy rozważyć tylko te liczby pierwsze p , które dzielą $a - b$ i $a + b$.



Wyniki 42. Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego

24 września 2020 roku odbył się finał Konkursu Uczniowskich Prac – młodzi ludzie przedstawiali wyniki swoich prac badawczych. Prezentacje te były na niezwykle wysokim poziomie – nie tylko pod względem merytorycznym, także dojrzałość w formułowaniu „matematycznych myśli” zrobiła na Jury ogromne wrażenie. Jury, którego przewodniczącym jest Andrzej KomisarSKI (Uniwersytet Łódzki), po burzliwej dyskusji postanowiło nagrodzić medalami wszystkich Finalistów.

Złote medale i nagrody w wysokości 1500 zł otrzymali:

Bartosz Chomiński z pracą „O pewnym kryterium zbieżności szeregów trygonometrycznych”,
LO nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu, opiekun: Agnieszka Hejna
oraz

Radosław Żak z pracą „Sprzężenie izogonalne i kilka własności punktu X_{25} ”,
V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, opiekun: Dominik Burek.

Srebrny medal i nagrodę w wysokości 1000 zł otrzymał

Stanisław Majchrzak z pracą „Od trójkątów do krzywych stożkowych, czyli o prostej innej niż wszystkie”,
III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie, opiekun: Dominik Burek.

Brązowe medale i nagrody w wysokości 800 zł otrzymali:

Daniel Goc z pracą „ W -zbieżność funkcji”,
V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, opiekun: Tomasz Kobos,

Piotr Juszczyk z pracą „O ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ z zadania 12. LXX Olimpiady Matematycznej”,
XII LO im. Stanisława Wyspiańskiego w Łodzi, opiekun: Wojciech Banaszczyk,

Gabriel Kiciński z pracą „O nierówności jednorodnej z permutacjami i jej Shapiro-podobnym analogu”,
III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni, opiekun: Andrzej Czarnecki
oraz

Filip Konieczny z pracą „Przekształcenia rzutowe i involucje”,
III LO w Tarnowie, opiekun: Marcin Radwański.

Finaliści i opiekunowie prac otrzymali również nagrody rzeczowe ufundowane przez: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Wydawnictwo Szkolne Omega, Wydawnictwo Aksjomat, Polskie Wydawnictwo Naukowe.

Organizatorem Konkursu jest Polskie Towarzystwo Matematyczne oraz miesięcznik *Delta*.

