

# deltad

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$   $E=hc/\lambda$   $\tau=3,141592$

NR 4 (551) 2020

CENA 5,5 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

**„Narzędzia  
zrobione ze światła”  
Nagroda Nobla  
z fizyki 2018**

str. 1

Zdjęcie: PkHere

UNIWERSYTET  
WARSZAWSKI



9 770137 300007 04



Nakład: 3500 egz.

## SPIS TREŚCI NUMERU 4 (551)

„Narzędzia zrobione ze światła”  
Nagroda Nobla z fizyki 2018, część I  
*Piotr Fita*

Równania napisów  
*Artur Jeż*

 **Zadania**

 **Malutkie i sprytnie**  
*Magdalena Fikus*

O wieżach potęgowych (II)  
*Karol Gryszka*

Dawno, dawno temu w odległej  
galaktyce... Obserwacje Wszechświata  
sprzed 10 miliardów lat  
*Anna Durkalec*

Gwiazdne przedszkola – obszary HII  
w Galaktyce  
*Miguel Figueira*

Składanie inwersji z symetrią  
*Michał Kieza*

Informatyczny kącik olimpijski (136):  
*Theater Tickets*

Algorytmy podzielności przez 7  
*Łukasz Grządko*


Widoczność w nieskończonym lesie  
Klub 44

Prosto z nieba: „Niemożliwa” czarna  
dziura

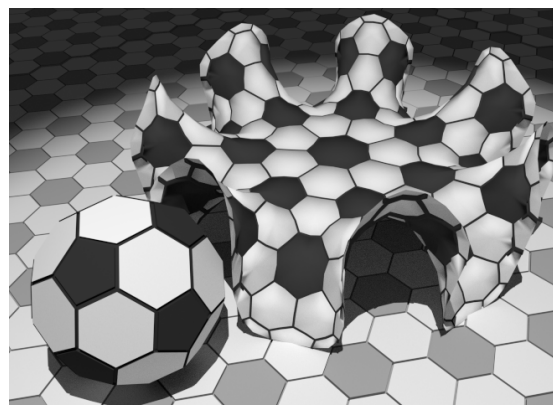
Niebo w kwietniu

Aktualności

Włeczeni w czasoprzestrzeni

 Zera zmieniają jednostkę w miliony  
*Bartłomiej Bzdęga*

W następnym numerze piszemy o świecie,  
w którym bardzo łatwo się zgubić.



**Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka** jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej,  
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel,  
dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący,  
prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski,  
dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz,  
dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk,  
dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin,  
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący,  
dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński,  
prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz,  
dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak,  
dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki,  
prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol,  
Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac.,  
Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec,  
Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac.,  
Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik,  
Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Drukarnia Greg [www.greg-drukarnia.pl](http://www.greg-drukarnia.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł;  
wcześniejsze egzemplarze 3 zł

 **Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):**  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

**Można nas też znaleźć na**  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

str. 25 **Wydawca: Uniwersytet Warszawski**

# „Narzędzia zrobione ze światła” Nagroda Nobla z fizyki 2018, część I

Piotr FITA\*

\*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Pomiędzy Nagrodami Nobla z fizyki przyznanymi za odkrycia i osiągnięcia w skali „kosmicznej” – detekcja fal grawitacyjnych nagrodzona w roku 2017 oraz prace teoretyczne z zakresu kosmologii i odkrycie planety pozasłonecznej wokół gwiazdy podobnej do Słońca, nagrodzone w roku 2019 – doceniono osiągnięcia w skali znacznie mniejszej: w roku 2018 przyznano Nagrodę Nobla za „narzędzia zrobione ze światła”. Podzielił się nią Arthur Ashkin, któremu przyznano połowę nagrody za skonstruowanie tzw. pęsety optycznej (zwanej też szczypcami optycznymi lub pułapką optyczną), oraz Donna Strickland i Gérard Mourou, którzy za opracowanie metody wytwarzania ultrakrótkich impulsów

światła o dużej energii otrzymali po 1/4 nagrody. Użyte w oficjalnych materiałach prasowych Komitetu Noblowskiego słowo „narzędzia” nie ma tu znaczenia wyłącznie metaforycznego. Nagrodzone odkrycia naprawdę pozwalają mechanicznie manipulować materialnymi obiektami za pomocą światła: przenosić je, obracać, ścisnąć (za pomocą pęsety optycznej) lub przecinać czy przewiercać (za pomocą lasera generującego ultrakrótkie impulsy światła) niczym w warsztacie ślusarskim, ale w mikroskali i z najwyższą precyzją. Jak to możliwe? Przyjrzyjmy się najpierw pęsete optycznej, a o ultrakrótkich impulsach napiszemy w kolejnym numerze *Delty*.

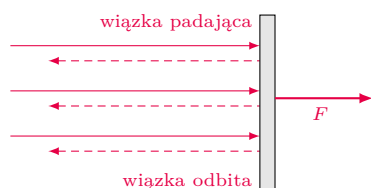
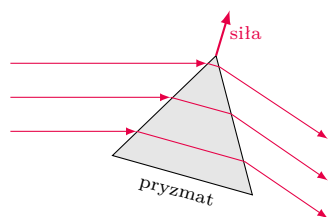
## Pęseta optyczna

Działanie pęsety optycznej oparte jest na fakcie, że światło niesie pęd. Pęd to miara ilości ruchu, którą definiujemy jako iloczyn masy ciała i jego prędkości. O ile światło w życiu codziennym niezbyt kojarzy się nam z ruchem – ze względu na bardzo dużą wartość prędkości światła światło albo jest, albo go nie ma i nie widać, żeby się poruszało – to jednak również ono niesie ze sobą pęd. W wyobrażeniu pędu światła pomaga obraz korpuskularny, czyli obraz światła jako strumienia poruszających się fotonów. Mimo że fotony nie mają masy, to każdy z nich ma pęd  $p_{\text{fot}}$  związany z jego energią  $E$  (a więc długością fali, czyli barwą światła) równaniem

$$p_{\text{fot}} = \frac{E}{c},$$

gdzie  $c$  jest prędkością światła. W tym ujęciu pęd wiązki światła jest równy sumie pędów wszystkich fotonów, które składają się na tę wiązkę.

Jedną z własności pędu jest to, że jest zachowany, jeśli na ciało nie działa żadna siła zewnętrzna, natomiast zmiana pędu ciała wymaga działania siły. Pęd jest wielkością wektorową, a więc określa go zarówno jego wartość, jak i kierunek. To oznacza, że działanie siły jest niezbędne nie tylko wówczas, gdy zmianie ulega prędkość ciała, ale i kierunek jego ruchu. W odniesieniu do świata makroskopowego jest to dla nas intuicyjne. Gdy chcemy zmienić kierunek ruchu toczącej się kulki, to musimy zadziałać na nią siłą, np. popychając ją palcem. Przy tym da o sobie znać trzecia zasada dynamiki Newtona: nasz palec „poczuje” to pchnięcie, co oznacza, że kulka zadziałała na niego siłą taką samą co do wartości, lecz przeciwnie skierowaną do siły, którą palec zadziałał na kulkę.



Te same prawa rządzą zjawiskami, w których światło zmienia kierunek, np. w wyniku odbicia lub załamania na granicy ośrodków. Oznacza to, że gdy światło odbija się od lustra, to na lustro działa siła! Podobnie, gdy wiązka światła ugina się w pryzmacie, siła działa na pryzmat. Obliczymy teraz wartość siły działającej na lustro, na które pada prostopadle do jego powierzchni wiązka światła o mocy  $P$  i odbija się. Zmiana pędu wywołana działaniem stałej siły  $F$  w czasie  $\Delta t$  jest równa

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t.$$

Jeśli w czasie  $\Delta t$  na lustro pada  $N$  fotonów o tej samej energii, to ich całkowity pęd ma wartość

$$p_0 = N \frac{E}{c}.$$

Zmiana pędu równa jest różnicy pędu końcowego  $\vec{p}_k$  i początkowego  $\vec{p}_0$  (czyli  $\Delta \vec{p} = \vec{p}_k - \vec{p}_0$ ), a w przypadku odbicia wstecznego zachodzi  $\vec{p}_k = -\vec{p}_0$ , z czego wynika, że  $\Delta \vec{p} = -2\vec{p}_0$ .

Wartość działającej na lustro siły  $F$ , skierowanej przeciwnie do początkowego kierunku padania światła, wynosi zatem

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2 \frac{NE}{c\Delta t}.$$



### Rozwiązanie zadania M 1633.

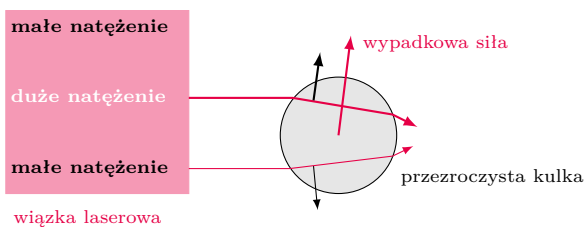
Rozważmy dowolną spośród danych  $n$  przekątnych. Ponieważ pozostałych  $n - 1$  przekątnych ją przecina, więc po obu stronach rozważanej przekątnej znajduje się po  $n - 1$  wierzchołków wielokąta. Stąd wniosek, że ta przekątna łączy przeciwległe wierzchołki  $2n$ -kąta foremnego, więc przechodzi przez jego środek.

Ułamek  $\frac{NE}{\Delta t}$  to wartość energii przenoszonej przez światło w czasie  $\Delta t$ , a więc jego moc  $P$ . Ostatecznie więc wartość siły wywierana na lustro przez wiązkę światła o mocy  $P$  jest równa

$$F = 2 \frac{P}{c}.$$

Wartość tej siły dla wiązki światła o mocy 1 W to zaledwie  $0,7 \cdot 10^{-8}$  N, bardzo niewiele w porównaniu z siłami, z którymi mamy do czynienia w świecie makroskopowym. Z tego względu na co dzień nie widzimy żadnych efektów związanych z siłami wywieranymi przez światło (tzw. ciśnieniem światła). Jednak siła przyciągania ziemskiego działająca na szklaną kulkę o promieniu  $1 \mu\text{m}$  jest rzędu zaledwie  $10^{-13}$  N. To oznacza, że siły związane ze zmianą kierunku propagacji światła są rzędu innych sił występujących w „mikroświecie”. Za pomocą wiązki światła o mocy rzędu miliwatów (moc wiązki ze wskaźnika laserowego jest rzędu 1 mW) powinno więc dać się z łatwością popchnąć lub podnieść mikrokulkę o średnicy rzędu mikrometrów.

Pęseta optyczna pozwala jednak na więcej. Za jej pomocą można „złapać” niewielkie obiekty w ognisku wiązki laserowej. Najłatwiej opisać to zjawisko w języku optyki geometrycznej, w którym bieg światła możemy przedstawić jako nieskończenie cienkie promienie, a wiązkę światła jako zbiór takich promieni. Język ten jest słuszny dla opisu oddziaływania światła z obiektami o rozmiarach znacznie większych niż długość fali światła, zajmmy się więc najpierw takim przypadkiem. Pułapkowanie optyczne wymaga wykorzystania silnie zogniskowanych wiązek światła o relatywnie dużym natężeniu, co w praktyce oznacza wykorzystywanie wyłącznie wiązek światła laserowego. Rozkład natężenia światła w typowej wiązce laserowej ma kształt dzwonowy – natężenie jest największe na osi wiązki i maleje w miarę wzrostu odległości od osi.



Wyobraźmy sobie przezroczystą kulkę umieszczoną w wiązce laserowej, w pewnej odległości od jej osi, i prześledźmy bieg dwóch promieni, jednego znajdującego się blisko osi wiązki, drugiego w pewnej odległości od niej.

Jeśli kulka znajduje się w ośrodku o mniejszym współczynniku załamania niż współczynnik załamania materiału, z którego jest wykonana, to promienie załamują się na jej powierzchni w kierunku środka kulki. Z załamaniem tym związana jest siła działająca na kulkę, skierowana przeciwnie do kierunku, w którym załamuje się światło. Jest ona większa dla promienia pochodzącego z osi wiązki, a więc wypadkowa siła działająca na kulkę jest skierowana w kierunku osi wiązki. Taki sam wynik uzyskamy po zsumowaniu sił działających od wszystkich promieni tworzących wiązkę – wypadkowa siła działająca na kulkę ma składową „wciągającą” kulkę w centrum wiązki laserowej. Jeśli wiązka przesunie się, pojawi się siła „ciągnąca kulkę” tak, by podążyła ona za ruchem wiązki.

Wykorzystując ten mechanizm, można manipulować nie tylko kulkami ze szkła czy tworzyw sztucznych, ale także np. pojedynczymi komórkami umieszczonymi pod mikroskopem optycznym. Pozwala to łatwo segregować komórki, kierując je w odpowiednie miejsce na podstawie ich charakterystycznych cech. Można też złapać komórkę swobodnie pływającą w cieczy, by unieruchomić ją na czas analizy jej własności optycznych. Wykorzystując dwie wiązki pułapkujące, można złapać komórkę w dwóch punktach i deformować ją, badając jej własności mechaniczne. Można też stworzyć „mikronarzędzia”, działające podobnie do skalpela lub nożyczek z uchwytami. Po unieruchomieniu komórki za pomocą dwóch lub więcej wiązek laserowych można wykonywać „operacje” na pojedynczej komórce poprzez odpowiednie ruchy wiązek laserowych, spełniających rolę odpowiednich mikronarzędzi.

Poza zastosowaniami biologicznymi pęsety optyczne stosowane są w nanotechnologii, gdzie za ich pomocą można układać elementy składowe mikrorządzeń lub też je napędzać. Mimo że od ukazania się pierwszej pracy Arthura Ashkina minęło już ponad 50 lat, to zakres zastosowań pęsety optycznej powiększa się coraz dynamiczniej, głównie dzięki równoległemu rozwojowi nano- i mikrotechnologii oraz nauk biologicznych.



### Rozwiązanie zadania M 1634.

Przypiszmy kolejnym wierzchołkom danego wielokąta foremnego kolejne reszty z dzielenia przez  $2n$  oraz oznaczmy przez  $p_i$  resztę przyporządkowaną wierzchołkowi  $P_i$ .

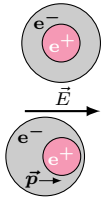
Zauważmy, że  $P_i P_j \parallel P_k P_l$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p_i + p_j \equiv p_k + p_l \pmod{2n}$ . Przypuśćmy nie wprost, że liczby  $p_1 + p_2, p_2 + p_3, \dots, p_{2n} + p_1$  dają parami różne reszty przy dzieleniu przez  $2n$ . Wówczas ich suma daje resztę

$$\sum_{i=0}^{2n-1} i = n(2n-1) \equiv n \pmod{2n}.$$

Z drugiej strony, rozważana suma jest równa

$$2 \sum_{i=1}^{2n} p_i = 2 \sum_{i=0}^{2n-1} i = 2n(2n-1) \equiv 0 \pmod{2n}.$$

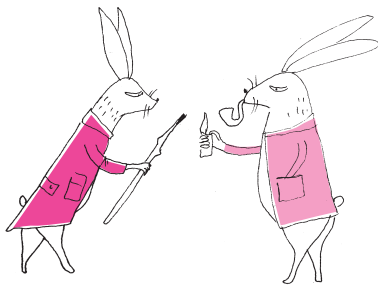
Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie.



Zajmijmy się jeszcze oddziaływaniem światła z obiektami mniejszymi niż długość fali. W takim przypadku nie można zastosować przybliżeń optyki geometrycznej i trzeba odwołać się do opisu oddziaływania światła z materią na poziomie mikroskopowym. Do zrozumienia działania pęsety optycznej wystarczy ograniczenie się do klasycznego modelu materii, w którym atomy reprezentowane są przez punktowe, dodatnio naładowane jądra, otoczone sferyczną chmurą ładunku ujemnego. Jeśli taka chmura zostanie wychylona z położenia równowagi, to środek rozkładu ładunku ujemnego przesunie się względem jądra atomu i na chmurę zacznie działać przyciągająca siła oddziaływania elektrostatycznego jądra, przywracająca ją do położenia równowagi. Ze względu na skończoną masę elektronu, po powrocie do położenia równowagi rozpędzona chmura będzie kontynuować ruch w przeciwnym kierunku, zatrzymując się po osiągnięciu maksymalnego wychylenia, po którym rozpocznie powrotny ruch w kierunku jądra. W tym modelu atomy tworzą więc oscylatory, w których wychylone z położenia równowagi chmury elektronowe oscylują wokół jąder. Jednocześnie, wychylone z położenia równowagi oscylatory mają moment dipolowy, ze względu na przesunięcie środków rozkładu ładunków dodatnich i ujemnych. Czynnikiem pobudzającym takie oscylatory do drgań może być pole elektryczne fali elektromagnetycznej, które spowoduje pojawienie się (mówimy *wyindukowanie*) w ośrodku oscylujących dipoli elektrycznych. Energia ich oddziaływania z falą elektromagnetyczną będzie zależeć od tego, jaka jest relacja pomiędzy chwilowymi zwrotami pola elektrycznego fali i momentów dipolowych. Jeśli częstość fali jest mniejsza niż częstość rezonansowa drgań oscylatora, to dipol „nadaża” za zmianami zwrotu pola elektrycznego i jego moment dipolowy jest skierowany zgodnie ze zwrotem wektora pola elektrycznego. Gdy częstość fali jest większa niż częstość rezonansowa oscylatora, dipol „nie nadaża” i zmienia zwrot z opóźnieniem w stosunku do zmian pola elektrycznego. W efekcie zwrot wytworzonego momentu dipolowego jest zawsze przeciwny do zwrotu wektora pola elektrycznego. Energia  $U$  oddziaływania dipola z polem elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  wyraża się wzorem:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E},$$

czyli jest równa  $-pE$ , gdy zwroty momentu dipolowego i pola są zgodne (częstość fali mniejsza od częstości rezonansowej) i  $+pE$ , gdy są przeciwne (częstość fali większa od częstości rezonansowej). Jeśli założymy, że wartość wytworzonego momentu dipolowego jest wprost proporcjonalna do natężenia wytwarzającego go pola elektrycznego,  $p \sim E$ , to okaże się, że energia oddziaływania indukowanego dipola jest proporcjonalna do kwadratu natężenia pola elektrycznego (ze znakiem  $+$  lub  $-$ ) w miejscu, gdzie się on znajduje,  $U \sim \pm E^2$ . Z kolei natężenie światła  $I$  jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy drgań pola elektrycznego i ostatecznie otrzymujemy wynik, zgodnie z którym energia indukowanego dipola jest proporcjonalna do natężenia światła,  $U \sim \pm I$ , ze znakiem zależnym od częstości fali świetlnej.



Z powyższych rozważań wynika, że obiekt umieszczony w zogniskowanej wiązce laserowej będzie miał najmniejszą energię oddziaływania z polem elektrycznym fali, gdy znajdzie się w jej ognisku, o ile częstość fali będzie mniejsza niż częstość rezonansowa oscylatorów tworzących materię, z której składa się ten obiekt (czyli częstość fali pułapkującej musi być mniejsza niż częstości fal, które mogą być absorbowane przez ten obiekt, co oznacza użycie fali z zakresu widma, dla którego obiekt jest przezroczysty, jeśli mówimy o obiektach makroskopowych). Obiekt ten będzie więc dążył do znalezienia się i pozostania w ognisku wiązki – doszliśmy w ten sposób do zasady działania pęsety optycznej, nie posługując się przybliżeniami optyki geometrycznej. Opisany mechanizm oddziaływania indukowanych dipoli z polem fali świetlnej jest słuszny nawet dla pojedynczych atomów, co oznacza, że w pęsetce optycznej można pułapkować nie tylko kulki mikroskopowych rozmiarów, ale również pojedyncze atomy – w tym kontekście

mówimy zazwyczaj o optycznej pułapce dipolowej, choć z fundamentalnego punktu widzenia nie różni się ona niczym od pęsety. Co ciekawe, Nagrodę Nobla za, między innymi, wykorzystanie optycznej pułapki dipolowej (ale nie tylko) do pułapkowania atomów otrzymał już w 1997 roku Stephen Chu, choć jego prace powstały kilkanaście lat później niż pierwsze prace Ashkina dotyczące pęsety optycznej.

Analizując zasadę działania pęsety optycznej, dla uproszczenia pominęliśmy siły związane z rozpraszaniem i odbiciem światła na granicy ośrodków. Wskutek tego w powyższym modelu pęsety opisywanej językiem optyki geometrycznej kulka jest utrzymywana w osi wiązki laserowej, ale jednocześnie popychana w kierunku propagacji światła. Tak jest, istotnie, w przypadku wiązki niezogniskowanej. Uwzględnienie wszystkich działających na kulkę sił pozwoliłoby zobaczyć, że jeśli wiązka światła jest zogniskowana, to również makroskopowa kulka zostanie złapana w okolicy jej ogniska.

## Równania napisów

Artur JEŹ\*

Przyjrzyjmy się problemowi równań napisów<sup>1</sup>: dla ustalonego alfabetu,  
np.  $a, b, c, \dots$ , piszemy równania używające liter z tegoż alfabetu oraz zmiennych,  
które będziemy oznaczać przez  $X, Y, Z, \dots$ . Dla uproszczenia pomyślmy o jednym  
równaniu, np.  $aXXXX = XaYY$ . Rozwiązaniem będą takie napisy, złożone  
z liter alfabetu, że po podstawieniu pod zmienne uzyskamy takie same napisy.  
W naszym przykładzie podstawienie  $X = aa, Y = aaa$  jest rozwiązaniem.<sup>2</sup> Innym  
przykładem jest równanie  $XbaYb = baaababbab$ , którego rozwiązaniem jest  
np.  $X = baaa, Y = bba$ .

<sup>3</sup> Równania tego typu rozważane były od lat 60. XX wieku, z jednej strony  
ze względu na związki z 10. problemem Hilberta, z drugiej ze względu na związki  
z teorią grup... Ale obie te historie to tematy na osobne artykuły.

Pierwszy sposób rozwiązywania tego typu równań podał G. Makanin w 1977 roku,  
w roku 1999 inne, dużo prostsze podejście zaproponował W. Plandowski. My  
przyjrzymy się dziś rozwiązaniu upraszczającemu drugie z nich, na podstawie  
mojego artykułu *Recompression: A Simple and Powerful Technique for Word  
Equations*, (Journal of the ACM, 2016 63:1, art. 4).

Zanim przystąpimy do prezentacji sposobu rozwiązywania takich równań,  
należałoby ustalić, do czego będziemy dążyć: chcemy podać algorytm, czyli  
systematyczny przepis pokazujący, jak uzyskać rozwiązanie (lub stwierdzić, że go  
nie ma). Przykładem algorytmu dla układu równań liniowych jest: „Powtarzaj:  
weź pierwsze równanie, jeśli jest niesprzeczne i zawiera zmienną, to wylicz  
jedną zmienną w oparciu o inne i podstaw do pozostałych równań, usuń równanie”.  
Przykładem algorytmu dla równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$  jest: „Wylicz  
 $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$ , jeśli  $\Delta < 0$ , to nie ma rozwiązań, w przeciwnym przypadku  
rozwiązania to  $(-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$ ”. Podamy tego typu algorytm, choć dłuższy  
i bardziej skomplikowany, dla równań napisów.

Nasz algorytm będzie wielokrotnie sprawdzał niezależnie kilka możliwości,  
np. osobno sprawdzi możliwości, że pierwsza litera podstawienia pod  $X$  to  
 $a$  lub  $b$ , a potem osobno, czy poza tą jedną literą coś jeszcze w podstawieniu  
jest, czy nie, itd. Jeśli istnieje rozwiązanie, to algorytm znajdzie je dla którejś  
sekwencji możliwości, dla innych być może nie znajdzie.<sup>4</sup> Nie brzmi to jak  
dobry pomysł – w takim razie algorytm mógłby po prostu przejrzeć wszystkie  
możliwe podstawienia, litera po literze... Dlatego też zagwarantujemy coś  
jeszcze – algorytm będzie przekształcał równanie w taki sposób, że dla  
którejsz z możliwości wiodących do rozwiązania rozważane równanie zawsze będzie  
miało najwyżej  $8n^2$  liter i  $n$  zmiennych, gdzie  $n$  to długość równania wejściowego.<sup>5</sup>  
W szczególności dla niektórych możliwości nie znajdziemy rozwiązania (trudno!),  
a inne doprowadzą nas do równania dłuższego niż  $8n^2 + n$  – wtedy algorytm  
przestaje dalej liczyć.<sup>6</sup> Takie podejście można też zrealizować inaczej, bez  
odwoływania się do sprawdzania wszystkich możliwości: możemy wypisać  
wszystkie równania długości najwyżej  $8n^2 + n$ , zaznaczyć, które równania możemy  
przekształcić w które, i sprawdzić, czy potrafimy przekształcić wejściowe równanie  
w jakieś bardzo proste niesprzeczne równanie, np.  $a = a$  albo  $X = X$ .

Od teraz skupimy się na wykazaniu, że algorytm zawsze ma „dobry wybór”,  
tj. potrafi przekształcić niesprzeczne równanie długości nie większej niż  $8n^2 + n$   
w niesprzeczne równanie długości również nie większej niż  $8n^2 + n$ . Ważne jest też,  
że niezależnie od wyboru nie przekształcimy równania sprzecznego w niesprzeczne.

<sup>7</sup>Równanie napisów może mieć wiele rozwiązań i algorytm jest w stanie podać  
reprezentację wszystkich; dla uproszczenia będziemy wymagać jedynie, o ile  
istnieje, aby podał dowolne. W szczególności: jeśli istnieje rozwiązanie, to istnieje  
też takie, które używa tylko liter występujących w równaniu, choć sam alfabet  
może być większy – wszystkie inne litery w rozwiązaniu można zastąpić przez  
ustaloną literę; nowe podstawienie dalej jest rozwiązaniem.<sup>8</sup> Będziemy też  
zakładać, że podstawienie pod zmienną jest *niepuste*, tj. w podstawieniu  $X = w$   
słowo  $w$  ma dodatnią długość.

Aby rozwiązać równanie napisów, będziemy *skracać* jego krótkie fragmenty:  
popatrzmy jeszcze raz na równanie  $XbaYb = baaababbab$  (które ma rozwiązanie  
 $X = baaa, Y = bba$ ): jeśli zastąpimy  $ba$  przez „świeżą”, tj. nieużywaną w równaniu,

literę  $c$ , to otrzymane równanie  $XcYb = caacbc$  ma rozwiązanie  $X = caa$ ,  $Y = bc$ . Łatwo też sprawdzić, że jeśli nowe równanie ma rozwiązanie, to stare też ma – wystarczy zamienić w podstawieniu każde  $c$  przez  $ba$ . Niestety, ten pomysł nie działa, jeśli w oryginalnym równaniu spróbujemy zastąpić  $ab$  przez  $d$ : po lewej stronie równania nie ma żadnego  $ab$ , w podstawieniu  $X = baaa$ ,  $Y = bba$  również nie ma, jest za to po prawej stronie równania. Problemem jest to, że  $ab$  jest częściowo w podstawieniu i częściowo poza. Parę  $ab$ , gdzie  $a \neq b$ , nazwiemy *złą* (dla ustalonego rozwiązania), jeśli  $b$  jest pierwszą literą podstawienia pod  $X$  oraz  $aX$  występuje w równaniu lub  $a$  jest ostatnią literą podstawienia pod  $Y$  oraz  $Yb$  występuje w równaniu (lub dla powyższych założeń  $XY$  występuje w równaniu). Parę, która nie jest zła, nazwiemy *dobrą*.<sup>9</sup> Jeśli para  $ab$ , gdzie  $a \neq b$ , jest dobra, to skrócenie  $ab$  daje równanie, które ma odpowiadające, krótsze rozwiązanie.<sup>10</sup> Jednocześnie, jeśli nowe równanie ma rozwiązanie, to stare też miało: wystarczy każde  $c$  zastąpić przez  $ab$ .

<sup>9</sup>Tu przydaje się informacja, że podstawienia pod zmienne są niepuste.

<sup>10</sup>Czyli przez kontrapozycję: jeśli stare równanie nie miało rozwiązania, to nowe też nie ma.

<sup>11</sup>Tu znów istotne jest, że podstawienia pod zmienne są niepuste.

<sup>12</sup>A skąd wiadomo, że jest zła? Trzeba osobno sprawdzić wszystkie możliwości...

<sup>13</sup>Ponownie, wszystkie możliwości trzeba osobno sprawdzić.

Co do złych par, to łatwo zauważyć, że jeśli równanie ma  $n$  wystąpień zmiennych, to jest najwyżej  $2n$  różnych złych par: po jednej na każdą stronę zmiennej.<sup>11</sup> Co więcej, ustaloną złą parę łatwo udobruchać (czyli uczynić dobrą): jeśli  $ab$  jest zła,<sup>12</sup> to dla każdej zmiennej sprawdzamy: jeśli jej podstawienie zaczyna się na  $b$ , czyli  $X = bw$ , to zastępujemy  $X$  przez  $bX$  (a podstawienie przez  $X = w$ ), analogicznie, jeśli podstawienie kończy się na  $a$ , to zastępujemy  $X$  przez  $Xa$ . Jeśli w ten sposób podstawienie za  $X$  stało się puste, to usuwamy  $X$  z równania.<sup>13</sup> Łatwo sprawdzić, że nowe równanie ma rozwiązanie oraz para  $ab$  jest dobra; jeśli zaś nowe równanie ma rozwiązanie, to miało je też stare równanie: wystarczy dokleić litery, które „wypchnęliśmy” ze zmiennych. W nowym równaniu możemy skrócić  $ab$ .

Złe pary to nie jedyny problem: skoro zakładamy, że w parze  $ab$  litery  $a$  i  $b$  są różne, to nie potrafimy skrócić długich powtórzeń jednej litery, np. nie wiemy, co zrobić z równaniem  $aXXX = XaYY$  z pierwszego przykładu. Zamiast skracać pary, będziemy skracać *maksymalne powtórzenia*:  $a^\ell$  jest *maksymalnym powtórzeniem*  $a$ ,<sup>14</sup> jeśli na lewo i prawo nie ma litery  $a$ .<sup>15</sup> Podobnie jak w przypadku par, możemy zdefiniować, co to znaczy, że litera  $a$  jest *zła* (jest zmienna  $X$  zaczynająca się na  $a$  i  $aX$  występuje w równaniu lub...) i *dobra*. Jeśli  $a$  jest dobre, to możemy równocześnie zastąpić wszystkie maksymalne wystąpienia  $a$ , powiedzmy dla każdego  $\ell$  zastępujemy maksymalne  $a^\ell$  przez  $a_\ell$ ; przy czym  $a_\ell$  to tylko wygodna nazwa dla nas, algorytm nie musi potem pamiętać, że ta litera powstała z  $a^\ell$ . Jeśli  $a$  jest zła, to chcemy ją „udobruchać”, ale zastąpienie  $X$  przez  $aX$  może nie wystarczyć, gdyż podstawienie pod  $X$  może dalej zaczynać się na  $a$ . Zamiast tego, jeśli  $X = a^\ell w a^r$ , gdzie  $w$  nie zaczyna się ani nie kończy na  $a$ , to zastępujemy  $X$  przez  $a^\ell X a^r$ ,<sup>16</sup> odpowiednio zmieniając podstawienie pod  $X$  (teraz  $X = w$ ). Wszystkie możliwe  $\ell, r$  chcemy sprawdzić osobno i tu pojawia się problem:  $\ell$  i  $r$  mogą być dowolnie duże. Wiadomo jednak, że jeśli istnieje rozwiązanie równania, to istnieje też rozwiązanie, w którym wszystkie takie  $\ell, r$  mają najwyżej wykładniczą długość.<sup>17</sup> To wciąż dużo, ale zamiast pisać  $\ell$  razy  $a$ , możemy zapisać  $(a, \ell)$ , a zapis pozycyjny  $\ell$  ma wielomianowo wiele cyfr. I tak zaraz skrócimy wszystkie maksymalne powtórzenia  $a$ . Tak samo jak dla par możemy wykazać, że jest najwyżej  $2n$  złych liter, a jeśli rozpatrzmy jednocześnie złe pary i litery, to podobnie stwierdzamy, że w sumie złych par i liter jest najwyżej  $2n$ .

<sup>14</sup>Oznaczamy  $a^\ell = \overbrace{a \cdots a}^{\ell \text{ razy}}$ , czyli  $\ell$  razy powtórzone  $a$ .

<sup>15</sup>To uwzględnia przypadek, że na lewo lub prawo nie ma żadnej litery.

<sup>16</sup>Jeśli  $X = a^\ell$ , to zastępujemy  $X$  przez  $a^\ell$ , usuwając przy okazji  $X$ .

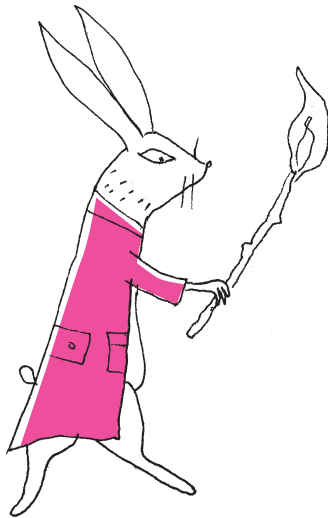
<sup>17</sup>Ten problem sprowadza się do układu liniowych równań diofantycznych. Wiadomo, że jeśli ma on rozwiązanie, to jest ono najwyżej wykładnicze. Ponownie, jest to temat na osobny artykuł...

<sup>18</sup>Znów, sprawdzamy wszystkie wybory, ale interesuje nas tylko ten dobry.

<sup>19</sup>Plus nie więcej niż  $n$  zmiennych.

Teraz możemy już podać wybory algorytmu, które prowadzą do rozwiązania, a równanie ma niezmiennie co najwyżej  $8n^2$  liter (i najwyżej  $n$  zmiennych): dla danego równania, jeśli istnieje dobra para lub litera, to skraccamy ją. Jeśli są tylko złe pary i litery, to wybieramy taką, że po jej udobruchaniu oraz skróceniu otrzymane równanie jest najkrótsze.<sup>18</sup>

Przeanalizujemy algorytm dla tych możliwości: zauważmy najpierw, że jeśli równanie nie ma rozwiązania, to nieważne, co zrobimy, nowe równanie również nie będzie miało rozwiązania. Twierdzimy też, że przy właściwych wyborach równanie nigdy nie będzie miało więcej niż  $8n^2$  liter,<sup>19</sup> gdzie  $n$  to długość równania danego na wejściu: Jeśli istnieje dobra para lub litera, to po jej skróceniu nowe równanie jest krótsze niż stare. A co, jeśli są tylko złe pary i litery? Niech równanie ma  $m$  liter, nie licząc zmiennych. Różnych złych par i liter jest w sumie najwyżej  $2n$ . Dla każdej litery rozpatrzmy literę na prawo (lub lewo, dla ostatniej); ta sąsiednia



litera może pochodzić z podstawienia pod zmienną. Razem tworzą parę albo są częścią maksymalnego bloku. Czyli dla każdego wystąpienia litery  $a$  w równaniu istnieje zła para lub litera, której wystąpienie zawiera to ustalone wystąpienie  $a$ . Skrócenie tej pary/litery usunie to ustalone wystąpienie  $a$ . Jako że jest  $2n$  złych par i liter, „średnio” skrócenie usunie przynajmniej  $\frac{m}{2n}$  liter oraz wprowadzi co najwyżej połowę z tej liczby (skrócenie pary usuwa dwie litery i dodaje jedną, a skrócenie bloku liter usuwa wiele liter i dodaje jedną). Tak więc istnieje takie skrócenie, które w sumie skróci równanie o przynajmniej  $\frac{m}{4n}$  liter. Musimy też wykonać jedno udobruchanie, które wprowadza do równania najwyżej  $2n$  liter: udobruchanie litery wprowadza długie powtórzenia tej litery, ale zaraz każde takie powtórzenie zostanie zastąpione przez jedną literę. Tak więc nowe równanie ma najwyżej  $m$  (stare litery)  $- m/4n$  (usunięte przez skrócenie)  $+ 2n$  (udobruchanie) liter. Oszacujmy:

$$m - m/4n + 2n = m(1 - 1/4n) + 2n \leq 8n^2(1 - 1/4n) + 2n = 8n^2,$$

jedyna nierówność wynika z ograniczenia  $m \leq 8n^2$ . I to jest koniec: dla podanych wyżej wyborów równanie znajdzie rozwiązanie i równania, które rozważa, mają najwyżej  $8n^2$  liter (i najwyżej  $n$  zmiennych).

A czego nie wiemy o równaniach napisów? Dokładniejsza analiza algorytmu pokazuje, że jeśli istnieje rozwiązanie, to istnieje też rozwiązanie podwójnie wykładnicze. Nie jest jednak znane równanie, którego najkrótsze rozwiązanie jest ponad wykładnicze; popularna jest hipoteza, że jeśli istnieje rozwiązanie, to istnieje też rozwiązanie wykładnicze. Do równań napisów można też dodać dodatkowe warunki na rozwiązanie, np. żądać, by suma długości podstawień pod  $X$  i  $Y$  była równa długości podstawienia pod  $Z$ . Nie wiadomo, czy równania napisów z liniowymi warunkami na długości podstawień można rozwiązać.



## Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

**M 1633.** Pewne  $n$  przekątnych  $2n$ -kąta foremnego przecina się w jednym punkcie, który nie jest wierzchołkiem tego wielokąta. Wykazać, że jest jego środkiem.  
Rozwiązanie na str. 2

**M 1634.** Wierzchołki  $2n$ -kąta foremnego oznaczono przez  $P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ , niekoniecznie w tej kolejności. Udowodnić, że łamana zamknięta  $P_1P_2 \dots P_{2n}$  zawiera parę odcinków równoległych.  
Rozwiązanie na str. 2

**M 1635.** Prostokąt nazwiemy *parzystym*, jeśli każdy z jego wymiarów jest parzystą liczbą całkowitą. Kwadrat  $n \times n$ , gdzie  $n$  jest liczbą nieparzystą, podzielono na części, z których każda jest parzystym prostokątem lub kwadratem  $1 \times 1$ . Znaleźć najmniejszą możliwą liczbę kwadratów  $1 \times 1$  uzyskanych w takim podziale.  
Rozwiązanie na str. 15

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 997.** Jądro  $^{238}\text{U}$  może ulec rozpadowi  $\alpha$  lub samorzutnemu rozszczepieniu na dwa mniejsze jądra. W czasie  $t = 1$  godzina zaobserwowano  $N_f = 25$  reakcji rozszczepienia zachodzących w próbce 1 g czystego  $^{238}\text{U}$ . Oszacuj, ile wynosi czas połowicznego zaniku dla  $^{238}\text{U}$  ze względu na rozszczepienie? Stała Avogadro  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ . (Dla porównania: czas połowicznego zaniku ze względu na rozpad  $\alpha$  wynosi  $4,47 \cdot 10^9$  lat).  
Rozwiązanie na str. 9

**F 998.** Podczas ruchu ciała w powietrzu siła oporu jest proporcjonalna do iloczynu kwadratu prędkości  $v$  ciała i pola  $S$  jego przekroju poprzecznego, prostopadłego do kierunku ruchu:  $F_{\text{op}} = -kSv^2$ . Wartość stałej  $k$  zależy od kształtu ciała. Siła oporu powoduje, że spadające swobodnie ciała po pewnym czasie spadania osiągają stałą prędkość spadku – prędkość graniczną. Jaki jest stosunek prędkości granicznych osiąganych przez kulki

- z tego samego materiału o masach  $m$  i  $8m$ ?
- o tych samych rozmiarach, ale o gęstości  $\rho$  i  $8\rho$ ?

Rozwiązanie na str. 16



## Malutkie i sprytnie

Louis Pasteur w 1885 roku wykrył, że czynnik zakaźny wścieklizny przechodzi przez otwory w filtrach zatrzymujących bakterie. Po tej właściwości Pasteur rozpoznawał jego istnienie, choć nigdy go nie zobaczył. Przez filtry przechodził również czynnik zakaźny (Martinus Beijerinck, 1889 r.) nazwany wirusem mozaiki tytoniowej (TMV), który został wykryty w 1935 roku. Brzmi jak oksymoron: żywa istota nie może być kryształem! Wielu badaczy po raz pierwszy zaczęło się wtedy zastanawiać nad definicją słowa „żywy”, do dziś opisywaną długimi zdaniami. Życie jest złożone i prosto zdefiniować się nie da.

Tym niemniej TMV mógł występować w formie krystalicznej i powtórnie wracać do życia, zakażać tytoniowe komórki, powielać się. Wirusa poddano analizie chemicznej, a formę krystaliczną – rentgenowskiej. Jego informację genetyczną stanowi jednoniciowy RNA, który koduje jedno białko strukturalne łączące się w regularną, wielocząsteczkową, rurkowatą „skorupę” (płaszcz), otaczającą RNA.

Heinz Fraenkel-Conrat urodzony w 1910 r. we Wrocławiu, tam też ukończył studia, od 1933 r. – emigrant, obywatel amerykański. [Przepraszam za śmiałość – ja bym Mu dała Nagrodę Nobla.]

Biochemik Heinz Fraenkel-Conrat w 1955 roku zrekonstruował TMV z białka płaszczka i RNA osobno oczyszczonych, a w roku 1960 ogłosił pełną sekwencję 158 aminokwasów białka płaszczka.

Od czasu pionierskich molekularnych prac nad TMV minęło ponad pół wieku. Odkryto i zbadano tysiące wirusów, w oceanach i wodach śródlądowych, we wszystkich środowiskach lądowych, od arktycznych do równikowych. Wirusy to paczki informacji o znacznej sile rozprzestrzeniania, muszą mieć gospodarza: bakterie, zwierzęta, rośliny. Muszą, ponieważ ich namnażanie wiąże się z wykorzystaniem aparatu metabolicznego komórki – działania cząsteczek i zużywania energii wytworzonej przez komórkę. Zabijają, ale potrafią też przetrwać wiele cykli podziałów komórkowych, ukryte i uśpione w genomie komórki (bakteryjny wirus lambda, ludzki – HIV). Nie wiemy, jak powstały. W ludzkim genomie znajduje się wiele sekwencji DNA, molekularnych wykopalisk, „śladów” niegdysiejszej obecności wirusów, dziś już nieaktywnych. Wywołują choroby wielu narządów, także nowotwory. Mutują szybko, zmieniają się wówczas ich sposób zakażenia, często gatunek gospodarza, epidemia przechodzi w ogólnoswiatową pandemię. Przekształcając swój materiał genetyczny z RNA na DNA i odwrotnie. Wyleczenie z obecności wirusa bez uszkodzenia gospodarza jest prawie niemożliwe, stąd tak trudno znaleźć leki przeciwwirusowe. Można wypracować szczepionkę, ale czasem jest to problematyczne, o czym świadczy ponad 100 lat prób uzyskania bezpiecznej szczepionki przeciw wściekliźnie.

Warto o tym pamiętać i nie lekceważyć możliwości szczepień ochronnych przeciw grypie; rocznie na świecie 3–5 mln zachorowań, 300–650 tys. zgonów, w Polsce szczepi się co roku około 5% ludności.

Dziś każdy nowy, potencjalnie groźny wirus badany jest błyskawicznie. Pierwsze sekwencje RNA koronawirusa 2019-nCoV, wyizolowanych od 9 pacjentów, oznaczono w Centrum Kontroli i Prewencji Chorób w Chinach kilka tygodni po wybuchu epidemii. Stwierdzono, że różni się od innych już znanych z tej grupy: SARS (2002) i MERS (2012). Badane genomy były w 99,98% identyczne, co zważywszy na częste mutacje takich wirusów oznacza, że wyjściowy „ludzki przodek” powstał bardzo niedawno. Pozostaje wiele szczegółów do wyjaśnienia: kim był pierwotny, prawdopodobnie zwierzęcy, gospodarz, jak rozprzestrzenia się zakażenie (poza drogą kropelkową), szybkość mutacji, wrażliwość na różne sposoby inaktywacji, potencjał kodowania. Pytani o możliwość opracowania szczepionki badacze chińscy szacują, że zajmie to przynajmniej 1,5 roku.

SARS: ponad 8000 przypadków zakażenia, 774 zmarłych w 47 krajach.  
MERS: w Arabii Saudyjskiej zakażonych 2494 osób, zmarło 858.

Dane o tym wirusie i przebiegu epidemii (pandemii?) zmieniają się codziennie. W dniu, w którym piszę ten tekst (luty 2020), liczbę zakażonych w Chinach określa się na 60 tysięcy. Czytelnik *Delty* bieżące wiadomości znajdzie w Internecie w dniu lektury. Jest pewne, że jesteśmy świadkami niebywałej otwartości i gotowości do współpracy międzynarodowej wśród uczonych, lekarzy i służb państwowych. Liczność przemieszczających się mas ludzkich, łatwość zakażenia i agresywny, szybki rozwój choroby zmuszają do takiej postawy.

Małe i nieuchwytnie twory wobec dużego, mądrego człowieka...

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

# O wieżach potęgowych (II)

Karol GRYSZKA\*

\* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Spróbujmy rozwiązać następujące zadanie: znaleźć takie  $b$ , dla którego

$$b^{b^{b^{\dots}}} = 4.$$

Zauważmy, że wykładnik  $b^{b^{\dots}}$  liczby  $b$  w równaniu jest równy całemu wyrażeniu (które jest równe 4). Wynika z tego równość  $b^4 = 4$ , a więc  $b = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ . Gotowe. Czytelników Zaniepokojonych tak prostym rozwiązaniem prosimy o cierpliwość. Teraz drugie zadanie: rozwiązać równanie

$$a^{a^{a^{\dots}}} = 2.$$

Postępując podobnie jak wyżej, otrzymujemy  $a = \sqrt{2}$ . Ale w takim razie  $a = b$  oraz

$$2 = a^{a^{a^{\dots}}} = b^{b^{b^{\dots}}} = 4.$$

Zachęcamy Czytelnika do próby wyjaśnienia tego paradoksu przed lekturą kolejnych akapitów.

Wprowadźmy następującą notację:

$$[a_1, a_2, a_3, \dots] := a_1^{a_2^{a_3^{\dots}}},$$

gdzie  $a_i$  dla  $i \in \mathbb{N}$  to dowolna dodatnia liczba rzeczywista. Jak należy rozumieć nieskończone wieże potęgowe? Formalnie jest to granica ciągu liczbowego

$$[a_1, a_2, \dots] := \lim_{n \rightarrow +\infty} [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Zatem albo wieża definiuje pewną liczbę, albo jest rozbieżna. Dla uproszczenia notacji, jeżeli  $a_i = a$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , to będziemy zapisywać  $[a, a, \dots] = [a \times \infty]$ .

Przykładem wieży rozbieżnej jest  $[2 \times \infty] = +\infty$ , natomiast  $[1 \times \infty] = 1$ . Czy w takim razie w ogóle ma sens rozważać  $a > 1$ ?

**Które wieże zatem są zbieżne?** W ogólnym przypadku, gdy składniki wieży są dowolne, trudno jest odpowiedzieć na to pytanie. My zajmiemy się prostszą sytuacją, gdy wieża ma postać  $[a \times \infty]$ . Wtedy łatwo można wyznaczyć jej granicę. Istotnie, jeśli istnieje granica  $[a \times \infty]$  i wynosi ona  $x$ , to zachodzi

$$x = a^x.$$

To prowadzi do wniosku, że  $a = \sqrt[x]{x}$ . Ta równość wiąże w sposób istotny granicę wieży oraz jej składniki. W szczególności można ją traktować jak funkcję. Przyjrzyjmy się teraz następującemu twierdzeniu.

**Twierdzenie 1.** Niech  $f(x) = \sqrt[x]{x}$  dla  $x \geq 1$ . Wtedy:

1.  $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, \sqrt[e]{e}]$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(1) = 1$ ;
3. Jeśli  $a \in (1, \sqrt[e]{e})$ , to równanie  $f(x) = a$  ma takie dwa rozwiązania  $x_1$  i  $x_2$ , że  $x_1 < e$  oraz  $x_2 > e$ ;
4. Jeśli  $a = e$  lub  $a = 1$ , to równanie  $f(x) = a$  ma dokładnie jedno rozwiązanie;
5. Jeśli  $a > e$ , to równanie  $f(x) = a$  nie ma rozwiązań.

Z twierdzenia 1 możemy wyciągnąć wniosek, że jeśli  $a > \sqrt[e]{e}$ , to  $[a \times \infty]$  nie istnieje. Dodatkowo, jeżeli  $a \in [1, \sqrt[e]{e}]$ , to wtedy wieża  $[a \times \infty]$  ma szansę być zbieżna. W szczególności, ponieważ  $f(e) = \sqrt[e]{e}$ , to  $[\sqrt[e]{e} \times \infty] = e$ . Robert Arthur Knoebel dowodzi, że  $[a \times \infty]$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy  $a \in [e^{-e}, \sqrt[e]{e}]$ . My zaś wykazemy zbieżność w przypadku  $a \in (1, \sqrt[e]{e})$ .

**Twierdzenie 1'.** Jeśli  $a \in (1, \sqrt[e]{e})$ , to  $[a \times \infty]$  jest dobrze określona.

**Dowód.** Wykażemy, że ciąg  $([a \times n])_{n>0}$  jest ciągiem rosnącym i ograniczonym, z tego będzie wynikała zbieżność<sup>1</sup>.

Najpierw wykażemy, że wartość wieży potęgowej  $[a \times n]$  jest mniejsza niż  $e$  dla każdego  $n$ . Zauważmy, że  $a < e$ . Załóżmy teraz, że  $[a \times n] < e$  dla  $n > 0$ . Wtedy

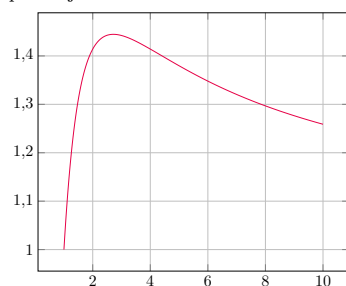
$$[a \times (n+1)] = [a, a \times n] < [a, e] < [\sqrt[e]{e}, e] = e.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej ciąg jest więc ograniczony. Teraz wykażemy, że jest rosnący. Po pierwsze zauważmy, że gdy  $a$  należy do rozważanego przedziału, to zachodzi nierówność  $a < a^a$ . Załóżmy, że  $[a \times (n-1)] > [a \times (n-2)]$  i wywnioskujemy z tego, że  $[a \times n] > [a \times (n-1)]$ . Zachodzi

$$[a \times n] = [a, a \times (n-1)] > [a, a \times (n-2)] = [a \times (n-1)].$$

W artykule *Porównywanie wież potęgowych* ( $\Delta_{19}^2$ ) rozważane były wieże postaci  $a_1^{a_2^{\dots^{a_n}}}$ , co zapisywane było  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ .

Wykres funkcji  $f(x) = \sqrt[x]{x}$  dla  $x$  w zakresie  $[1, 10]$  przedstawiony jest poniżej.



Zachodzi szacowanie:

$$\sqrt[x]{x} \leq \sqrt[e]{e}.$$

<sup>1</sup>Dowód zbieżności można znaleźć na przykład w pracy: R. Arthur Knoebel, *Exponentials Reiterated*, która ukazała się w 1981 roku w *The American Mathematical Monthly*.

Z zasady indukcji mamy, że ciąg  $([a \times n])_{n>0}$  jest rosnący. Z faktu, że ciąg jest rosnący oraz ograniczony, wynika jego zbieżność.  $\square$

Powyższe rozważania możemy wykorzystać do sformułowania następujących równości:

$$[\sqrt{2} \times \infty] = [\sqrt[4]{4} \times \infty] = 2.$$

Ciekawostką jest, że jeżeli  $a$  jest dodatnią liczbą naturalną, to tylko dla  $a = 1, 2, 4$  wartości wieże są liczbami wymiernymi – wszystkie pozostałe przypadki generują nie tylko liczby niewymierne, ale i przestępne<sup>2</sup>! Ta i inne teorioliczne własności wież potęgowych zostały skumulowane w poniższym twierdzeniu.

<sup>2</sup>Liczba przestępna to liczba, która nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych.

<sup>3</sup>Liczba algebraiczna to liczba, która jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych.

**Twierdzenie 2.** Niech  $a \in (1, \sqrt[e]{e})$  będzie liczbą algebraiczną<sup>3</sup>. Wtedy:

1. Jeśli  $a \neq \sqrt[b]{b}$  dla wszystkich wymiernych  $b > 1$ , to  $[a \times \infty]$  jest liczbą przestępną;
2. Jeśli  $a = \sqrt[b]{b}$  dla pewnej liczby wymiernej  $b > 1$ , to:
  - (a) jeśli  $b \in (1, e)$ , to  $[a \times \infty] = b$ ,
  - (b) (przypadek przejściowy) jeśli  $b = e$ , to  $[\sqrt[e]{e} \times \infty] = e$  jest liczbą przestępną,
  - (c) jeśli  $b > e$ , to:
    - (i) jeśli  $b = (1 + \frac{1}{s})^{s+1}$  dla pewnej liczby całkowitej  $s > 1$ , to  $[a \times \infty] = (1 + \frac{1}{s})^s$ ,<sup>4</sup>
    - (ii) jeśli  $b$  nie jest postaci  $b = (1 + \frac{1}{s})^{s+1}$  dla pewnej liczby całkowitej  $s > 1$ , to  $[a \times \infty]$  jest liczbą przestępną.<sup>5</sup>

<sup>4</sup>Dla  $s = 1$  otrzymujemy  $b = 4$  oraz  $a = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$  i  $[\sqrt{2} \times \infty] = 2$ .

<sup>5</sup>Dowód Twierdzenia 2 można znaleźć w pracy: M. Vassilev-Missana, *Some Results on Infinite Power Towers* z 2010 roku.

Punkt 2(c)(i) powyższego twierdzenia można wykorzystać do rozwiązania w liczbach wymiernych równania

$$\sqrt[x]{x} = \sqrt[y]{y},$$

przy założeniach  $1 < x < e$  oraz  $y > e$ . Wtedy

$$x = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s, \quad y = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1}, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

W szczególności, dla  $s = 1$  otrzymujemy  $x = 2$  i  $y = 4$  oraz równość  $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$ .

Dla  $s = 2$  zaś otrzymujemy  $x = \frac{9}{4}$  i  $y = \frac{27}{8}$  oraz równość  $(\frac{9}{4})^{\frac{4}{3}} = (\frac{27}{8})^{\frac{8}{3}}$ . Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić słuszność powyższych równości.

Wróćmy teraz do paradoksalnego rozumowania przedstawionego na początku artykułu. Przypomnijmy: wynika z niego, że  $a = \sqrt{2}$  jest rozwiązaniem, ale samo rozumowanie prowadzące do tego wyniku nie jest satysfakcjonujące – dokonujemy pewnego podstawienia bez uprzedniej wiedzy na temat tego, czy  $[a \times \infty]$  jest zbieżne. Dla  $a = \sqrt{2}$  zdefiniujmy zatem  $a_n = [a \times n]$ . Łatwo można wykazać zbieżność  $a_n$  bez odwoływania się do trudnych twierdzeń. Mamy wszak  $a_1 \leq 2$  oraz

$$a_n = \sqrt{2^{a_{n-1}}} \leq \sqrt{2^2} = 2,$$

zatem na mocy zasady indukcji matematycznej  $a_n \leq 2$ . Ponadto oczywiście  $a_n > a_{n-1}$ , więc ciąg  $a_n$  jest zbieżny. Niech  $d$  będzie jego granicą, wtedy  $d = a^d$  i skoro  $a = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ , to  $d = 2$  lub  $d = 4$ . Jednak rozwiązanie  $d = 4$  odrzucamy, gdyż  $a_n \leq 2$  implikuje  $d \leq 2$ . W takim razie  $[\sqrt{2} \times \infty] = 2$ , ale zdecydowanie nie  $[\sqrt[4]{4} \times \infty] = 4$ .

Dla jakich  $x$  równanie

$$a^{a^{a^{\dots}}} = x$$

ma zatem rozwiązanie? Skoro  $[a \times \infty]$  jest zbieżna (wtedy równanie ma sens) i  $a \in [e^{-e}, \sqrt[e]{e}]$  oraz funkcja

$$g: [e^{-e}, \sqrt[e]{e}] \ni a \mapsto [a \times \infty]$$

jest rosnąca, to wystarczy obliczyć  $g(e^{-e})$  oraz  $g(\sqrt[e]{e})$ . Ale to zadanie jest proste, gdyż jeśli  $x = [a \times \infty]$ , to  $a = \sqrt[x]{x}$ . Zatem

$$\sqrt[x]{x} = \sqrt[e]{e} \implies x = e \implies g(\sqrt[e]{e}) = e,$$

$$\sqrt[x]{x} = e^{-e} \implies x = \frac{1}{e} \implies g(e^{-e}) = \frac{1}{e}.$$

Tym samym  $x \in [e^{-1}, e]$ . W szczególności rozważane wcześniej równanie  $[y \times \infty] = 4$  nie ma rozwiązania.



#### Rozwiązanie zadania F 997.

Liczba rozpadów jądra, jak każdy typ rozpadu, opisywana jest równaniem zawierającym wszystkie rodzaje procesów rozpadu. W przypadku <sup>238</sup>U:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda_f N - \lambda_\alpha N,$$

gdzie  $N$  oznacza liczbę jąder atomowych w próbce, a stałe  $\lambda_f$  i  $\lambda_\alpha$  dotyczą, odpowiednio, rozszczepienia i rozpadu  $\alpha$ . Dla każdego z procesów wartość odpowiadającej mu stałej  $\lambda$  jest odwrotnością czasu połowicznego zaniku pomnożoną przez  $\ln 2$ . Z uwagi na ogromną wartość liczby Avogadro i niewielką liczbę zaobserwowanych rozpadów – co oznacza bardzo duży czas zaniku – możemy przyjąć, że liczba rozpadów  $N_f \approx \lambda_f t N$ . Otrzymujemy dla rozszczepienia:

$$t_{1/2f} = \frac{t N \ln 2}{N_f}.$$

Podstawiając  $N = N_A/238$  oraz 1 godzina to 1 rok/(24 · 365,25), otrzymujemy  $t_{1/2f} = 8 \cdot 10^{15}$  lat. W tym samym czasie 1 godziny w próbce zajdzie około  $4,5 \cdot 10^7$  rozpadów  $\alpha$ .

# Dawno, dawno temu w odległej galaktyce...

## Obserwacje Wszechświata sprzed 10 miliardów lat

Anna DURKALEC

Jak przenieść się w przeszłość? To bardzo łatwe! Po prostu spojrzysz w niebo. Każdego dnia oglądasz Słońce sprzed 8 minut. W nocy, gdy popatrzysz na Gwiazdę Polarną, widzisz ją taką, jaka była za panowania króla Jana III Sobieskiego (ok. 325 lat temu). A mając dobry wzrok (albo lornetkę), możesz zobaczyć, jak wyglądała galaktyka Andromedy w czasach, gdy na Ziemi zaczynała się epoka lodowcowa – 2,5 miliona lat temu.

Ale to jeszcze nic! Możemy obserwować Wszechświat, jaki był na długo przed powstaniem naszej planety. Potrzebny jest do tego tylko odpowiednio duży teleskop.

Na przykład europejski bardzo duży teleskop VLT (*Very Large Telescope*). Za jego pomocą VLT zaobserwowano tysiące galaktyk takimi, jakie były 10 miliardów (!) lat temu (dla porównania Ziemia istnieje od około 4,5 mld lat). Obserwacje te zostały przeprowadzone w ramach przeglądu *VIMOS Ultra Deep Survey* (VUDS) – największego jak do tej pory spektroskopowego przeglądu galaktyk we wczesnych etapach istnienia Wszechświata. Chcesz zobaczyć te galaktyki? Proszę bardzo. Duża część obserwacji jest dostępna dla każdego. Za darmo. Wystarczy przeglądarka i dostęp do Internetu.

Dane przeglądu VUDS dostępne są na stronie [cesam.lam.fr/vuds/DR1/](http://cesam.lam.fr/vuds/DR1/).

Odległości pomiędzy galaktykami są ogromne! Dla przykładu: Andromeda znajduje się  $2,4 \cdot 10^{19}$  km od nas.

### Kosmiczny wehikuł czasu

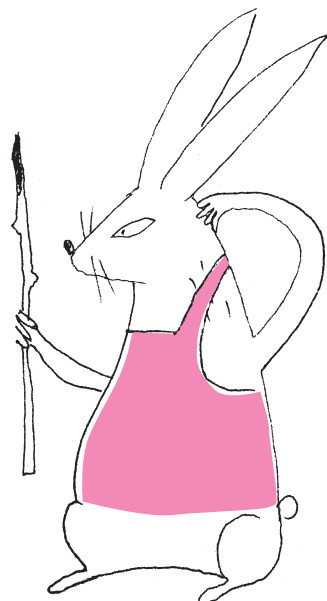
Ale zacznijmy od początku. Jak obserwacje przeszłości są w ogóle możliwe? Za wszystko odpowiedzialne są: ogrom Wszechświata i ograniczona prędkość światła. Odległości pomiędzy galaktykami są naprawdę niewyobrażalnie duże. Oznacza to, że nawet światło, absolutny rekordzista prędkości, potrzebuje dużo czasu, aby te odległości pokonać. W rezultacie im *dalej* patrzymy przez nasze teleskopy, tym coraz *starsze* galaktyki obserwujemy.

Zjawisko to można porównać do działania poczty. Załóżmy, że mamy przyjaciela, który napisał do nas list (taki na papierze, bo nasz przyjaciel to tradycjonalista) opisujący aktualne wydarzenia ze swojego życia. Dodał też zdjęcie, które zrobił na moment przed wysłaniem listu. Im dalej nasz przyjaciel mieszka, tym dłużej przyjdzie nam czekać na przesyłkę. Jednocześnie tym starsze będą informacje zawarte w liście i bardziej zdezaktualizowane zdjęcie w momencie, gdy otworzymy kopertę. Podobnie jest z informacją o innych galaktykach, z tą różnicą, że zamiast listów odbieramy fale elektromagnetyczne (światło). Rejestrując te fale, gromadzimy informacje o galaktykach w różnych momentach czasu – takich, jakimi były 3, 5 czy 10 miliardów lat temu.

### Szukamy odpowiedzi na wielkie pytania

Tylko właściwie dlaczego obserwacje starych galaktyk mają nas interesować? Po pierwsze, bo możliwość zobaczenia czegoś, co istniało miliardy lat temu, jest sama w sobie niesamowita. Po drugie, ponieważ mamy całą masę pytań dotyczących natury Wszechświata i bardzo chcielibyśmy poznać odpowiedzi na nie. Na przykład wiemy, że Wszechświat od początku swojego istnienia zmieniał się – ewoluował. Zmiany te zachodziły jednocześnie w całym Wszechświecie i były bardzo powolne. Jednak ostatecznie spodziewamy się, że młody Wszechświat był zasadniczo różny od jego starszej wersji – tej, w której żyjemy *teraz*. Ale jak bardzo był różny? W którym momencie istnienia Wszechświata pojawiły się pierwsze gwiazdy? Kiedy uformowały się pierwsze galaktyki? Czy wyglądały inaczej niż nasza Droga Mleczna? Czy były mniejsze, czy większe? Jaki miały kolor? Dlaczego w niektórych z tych galaktyk nagle przestały się tworzyć gwiazdy? Jakie procesy fizyczne mają największy wpływ na ewolucję galaktyk? Jak często zdarzały się kolizje galaktyk? W końcu, jak uformowały się skomplikowane struktury wielu galaktyk – gromady, supergromady, filamenty? Słowem, jak cały Wszechświat zmieniał się z czasem – do stanu, w jakim obserwujemy go współcześnie?

Oczywiście istnieją już dobrze sformułowane teorie dostarczające odpowiedzi na te pytania. Nasze aktualne wyobrażenie o tym, jak powstał i rozwijał się Wszechświat, zawarte jest w ramach modeli kosmologicznych. Współczesny, aktualnie najlepiej odzwierciedlający obserwacje, model kosmologiczny nosi nazwę modelu  $\Lambda$ -CDM ( $\Lambda$  *Cold Dark Matter*). Ale, bądźmy szczerzy, tylko astrofizycy używają tej nazwy. Cała reszta świata mówi po prostu „Teoria



Niektóre źródła podają odpowiedź na wielkie pytanie o życie, Wszechświat i całą resztę: to 42!

Wielkiego Wybuchu”. Jak każda dobra teoria, i ta została już wielokrotnie potwierdzona przez liczne obserwacje astronomiczne. Czy to oznacza, że znaleźliśmy ostateczną odpowiedź na wielkie pytanie o życie, Wszechświat i całą resztę? Oczywiście, że nie! Szczegóły teorii Wielkiego Wybuchu są wciąż dopracowywane. Potrzebne są jednak do tego nowe obserwacje, takie jak te przeprowadzone w ramach przeglądu VUDS. Szczególnie, że ukazują bardzo stary Wszechświat, którego obserwacje były w przeszłości mocno ograniczone lub wręcz niemożliwe z powodu braku odpowiednich technologii.

### Szalona młodość Wszechświata

To jak wyglądał Wszechświat 10 miliardów lat temu? Przechodził okres młodzieńczego buntu. Był niespokojny i burzliwy. To na ten okres przypadało maksimum produkcji gwiazd. Nowe gwiazdy rodziły się i umierały w zawrotnym tempie. Aktywne galaktyki, podobne do naszej Drogi Mlecznej, tworzyły gwiazdy 30–40 razy szybciej, niż ma to miejsce teraz.

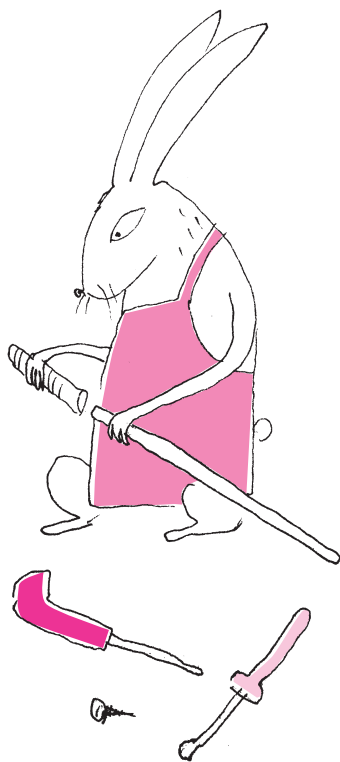
Ponadto galaktyki były wtedy zasadniczo mniejsze (oraz łżejsze) niż współcześnie. Tylko niektóre mogły się poszczycić pięknymi spiralnymi ramionami. Przez kilka pierwszych miliardów lat po Wielkim Wybuchu większość galaktyk była zdecydowanie nieregularna. Na to, co nazywamy galaktykami, składała się chaotyczna mieszanina pyłu, gazu oraz zagęszczonych obszarów, w których powstawały gwiazdy. We Wszechświecie 10 miliardów lat temu galaktyki były też zróżnicowane wiekowo. Obserwujemy dużo młodych, dopiero formujących się galaktyk, mających wówczas tylko po kilka milionów lat, ale też bardzo stare, rozwinięte galaktyki, które mogły powstać nawet niecałe 300 milionów lat po Wielkim Wybuchu.

Skoro w początkach istnienia Wszechświata galaktyki były małe i nieregularne, to jak urosły do rozmiarów i kształtów obserwowanych teraz? Powszechnie uznaje się, że kluczową rolę odgrywały tutaj dwa zjawiska: napływ gazu ze środowiska międzygalaktycznego oraz... galaktyczny kanibalizm. Aby rozwijać się i aktywnie produkować gwiazdy, galaktyka potrzebuje stałych dostaw świeżego gazu. Może on spokojnie napływać do galaktyk pod wpływem siły grawitacji wzdłuż tzw. filamentów. Dużym galaktykom często to nie wystarcza. Wówczas uzupełniają one niedobory paliwa, pochłaniając swoje mniejsze sąsiadki (*minor mergers*). Czasami dochodzi też do zderzenia dwóch galaktyk o podobnych rozmiarach. Po kolizji tworzą one masywną galaktykę eliptyczną. Na podstawie obserwacji w ramach przeglądu VUDS oszacowano, że 10 miliardów lat temu takich dużych kolizji doświadczało ok. 17% wszystkich galaktyk w ówczesnym Wszechświecie. Wciąż jednak trwa debata, jak znacząca była ich rola w ewolucji galaktyk. Możliwe, że odpowiedź zależy od gęstości środowiska, w jakim istnieje dana galaktyka, czyli od tego, jak dużo galaktyk znajduje się w jej bezpośrednim otoczeniu.

A gdy już mowa o otoczeniu galaktyk. Obserwujemy, że 10 miliardów lat temu galaktyki tworzyły skomplikowane wielkoskalowe struktury. Pod wpływem siły grawitacji łączyły się w gromady i supergromady, tworząc coś w rodzaju ogromnej sieci rozciągającej się na cały Wszechświat (dosłownie). Okazuje się, że położenie galaktyk w tych strukturach miało kluczowy wpływ na ich cechy charakterystyczne, takie jak jasność i masa gwiazdowa. W obszarach o dużym zagęszczeniu obserwujemy jaśniejsze i bardziej masywne galaktyki, podczas gdy samotne galaktyki są mniej jasne i mniej masywne. Podobną zależność obserwujemy we współczesnym Wszechświecie, kiedy więc ten proces się rozpoczął?

**Aby poznać odpowiedź** na to i inne podobne pytania, konieczne są dalsze obserwacje odległych galaktyk, sięgające jeszcze głębiej w przeszłość Wszechświata. Na szczęście nie musimy na nie długo czekać! W ciągu najbliższych lat na orbitę zostaną wysłane dwa teleskopy: amerykański następca teleskopu Hubble’a – JWST (*James Webb Space Telescope*) oraz europejski Euclid. Oba urządzenia dostarczą bezprecedensowych obserwacji młodego Wszechświata i przybliżą do odpowiedzi na niektóre z bardzo wielu pytań o jego naturę.

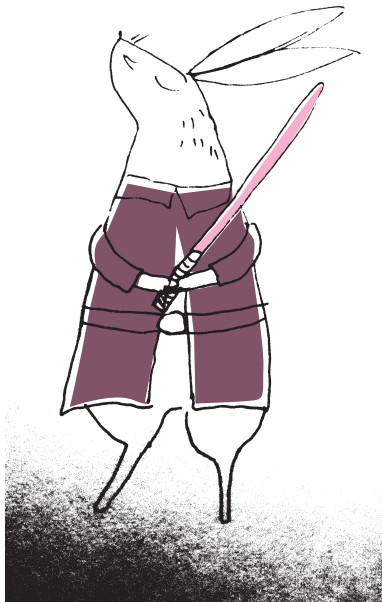
Ciekawostka: Nasza Droga Mleczna ma na sumieniu pochłonięcie przynajmniej trzech takich małych galaktyk.



# Gwiezdne przedszkola – obszary HII w Galaktyce

\*Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Miguel FIGUEIRA\*



Seria Lymana odpowiada liniom widmowym powstałym w wyniku emisji fotonów wywołanej przez elektron przechodzący z poziomu wzbudzonego ( $n > 1$ ) do poziomu podstawowego. Energia tak wyemitowanego fotonu wzrasta wraz z liczbą  $n$  i dla wodoru osiąga maksymalną wartość 13,6 eV (granica Laymana). Fotony o energii większej niż ten limit, nazywane fotonami kontinuum Laymana, są w stanie wytrącić elektron z wodoru (jonizacja).

W nocy niektóre gwiazdy i planety można obserwować gołym okiem. Przy dobrych warunkach pogodowych i w miejscach niezanieczyszczonych sztucznym światłem widoczny jest również dysk naszej Galaktyki, Drogi Mlecznej, przyjmujący postać gęstego strumienia gwiazd przecinającego sferę niebieską. Z naszego punktu widzenia dysk ten wydaje się prawie jednolitym zbiorem gwiazd, jednak w rzeczywistości zbudowany jest on również z chmur pyłu i gazu, które mogą mieć rozmiary nawet setek parseków ( $1 \text{ pc} \sim 3,8 \cdot 10^{16} \text{ m}$ ) i temperaturę bliską 20 K. Takie niewidoczne w świetle widzialnym zagęszczenia pyłu i gazu stanowią swego rodzaju gwiazdne przedszkola – rodzą się w nich nowe gwiazdy. Promieniowanie tych gwiazd jest jednak niewidoczne, ponieważ jest tłumione przez otaczający je gęsty materiał molekularny.

Ewolucja gwiazd jest ściśle związana z ich masą początkową – ogólnie rzecz ujmując, masywniejsze gwiazdy ewoluują szybciej niż ich mniej masywne odpowiedniki. Dlatego często klasyfikujemy gwiazdy ze względu na ich masę (wyrażaną w jednostkach mas Słońca,  $M_{\odot}$ ). Te o masie poniżej  $8M_{\odot}$  określa się jako mało masywne (*low-mass*), podczas gdy o gwiazdach o masie powyżej tej umownej granicy mówi się, że są masywne (*high-mass*). Główna różnica między nimi polega na tym, że gwiazdy z pierwszej grupy zakończą swoje życie mniej spektakularnie, jako białe karły (otoczone mgławicą planetarną), a te z drugiej grupy eksplodują jako supernowe, pozostawiając po sobie gwiazdy neutronowe albo czarne dziury.

Masywne gwiazdy są szczególnie interesujące ze względu na ich wpływ na otaczające je środowisko międzygwiazdowe (tzw. *feedback*). Generowane przez nie wiatry słoneczne, promieniowanie gwiazdowe i jonizujące, a w końcu ich „śmierć” w wyniku wybuchu supernowej uwalniają ogromne ilości energii i pędu do otaczającego je ośrodka międzygwiazdowego. Ten swego rodzaju „pakiet energetyczny” znacząco modyfikuje strukturę chmur pyłu i gazu otaczających masywną gwiazdę, co z kolei ma istotny wpływ na powstawanie nowej generacji gwiazd. Jak to się dzieje? We wczesnych etapach powstawania gwiazd o wysokiej masie emisja fotonów kontinuum Lymana ( $E \geq 13,6 \text{ eV}$ ) jonizuje atomy wodoru (gazu występującego najobficiej we Wszechświecie) i tworzy zjonizowany obszar (potocznie zwany HII), obserwowalny z Ziemi dzięki emisji  $H\alpha$  ( $\lambda = 656,3 \text{ nm}$ ) zachodzącej podczas rekombinacji wodoru od drugiego do pierwszego wzbudzonego poziomu. Jeżeli założymy, że mamy do czynienia z doskonale jednorodnym ośrodkiem międzygwiazdowym, obszar HII przyjmuje kształt kuli i jest znany jako sfera Strömghrena. Wewnątrz tej sfery poziom jonizacji jest równy poziomowi rekombinacji, a jej promień jest określony wzorem:

$$R_S = \left( \frac{3N_{Ly}}{4\pi n_0^2 \alpha_{\beta}} \right)^{1/3},$$

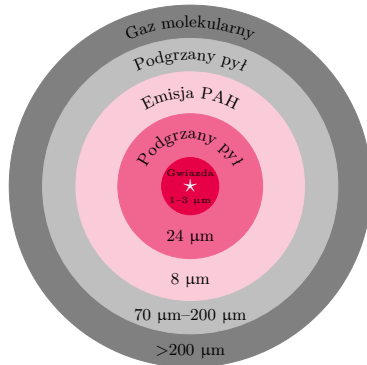
gdzie  $N_{Ly}$  to liczba fotonów o energiach powyżej granicy Lymana, emitowanych np. z masywnej gwiazdy,  $n_0$  to gęstość atomów wodoru w środowisku międzygwiazdowym, a  $\alpha_{\beta}$  to współczynnik rekombinacji wodoru do wszystkich poziomów z wyjątkiem stanu podstawowego. Z powyższego równania widzimy, że jeśli liczba fotonów Lymana rośnie, to wzrasta też liczba zjonizowanych atomów, przez co zwiększa się promień sfery  $R_S$ . Z drugiej strony, jeśli gęstość wodoru wzrośnie, to  $R_S$  zmniejszy się, ponieważ fotony będą absorbowane na krótszej odległości.

Ze względu na różnicę temperatur pomiędzy regionem HII ( $\sim 10^4 \text{ K}$ ) a obszarem go otaczającym ( $\sim 10 \text{ K}$ ) region HII poszerza się. Jest to proces zachodzący przy prędkości naddźwiękowej i dlatego front jonizacyjny jest poprzedzony frontem uderzeniowym. Podczas ekspansji materiał otaczający region HII, składający się głównie z pyłu i gazu ( $\text{H}$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{CO}$ ), jest uwięziony pomiędzy tymi dwoma frontami, tworząc pierścień wokół gwiazdy. Cała taka struktura (obszar zjonizowanego gazu i otaczający go pierścień) jest często nazywana

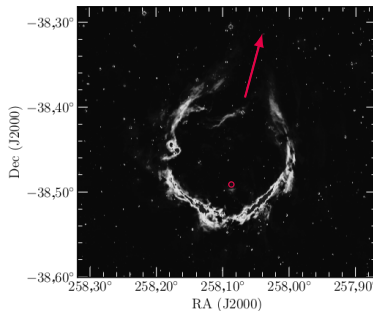
bańką (*bubble*). Rozszerzanie się takiej „bańki” zatrzymuje się dopiero wtedy, gdy pierścień pyłu i gazu staje się na tyle gęsty, że ciśnienie materii równoważy ciśnienie jonizacyjne gwiazdy.

Obserwacje baniek HII w różnych długościach fal pozwalają odkryć ich różne komponenty, co zaprezentowane jest na rysunku 1. Przedstawione są na nim obszary bańki HII wraz z długościami fal, w których mogą być one obserwowane. I tak, rozpoczynając od najkrótszych fal – w bliskiej podczerwieni (1–3  $\mu\text{m}$ ) widoczny jest neutralny gaz i pył, przyjmujące postać ciemnej plamy kontrastującej z jasnym tłem wypełnionym gwiazdami. Następnie, idąc w kierunku większych długości fali, a co za tym idzie, niższych temperatur, możemy zaobserwować wspomniany wcześniej pierścień bańki. Jest on bardzo dobrze widoczny na długościach fal rzędu 8  $\mu\text{m}$  z powodu emisji wielopierścieniowych węglowodorów aromatycznych (PAH). Dalej widzimy obszar fali uderzeniowej, w którym promieniowanie gwiazdy jonizującej podgrzewa pył, przez co emituje on promieniowanie od długości fali 20  $\mu\text{m}$ . Z kolei emisja zimnego pyłu, który został wyrzucony podczas ekspansji poza bańkę, jest obserwowana od 70  $\mu\text{m}$  do milimetrowych długości fali. Przy długości fali centymetrowej region HII może być również obserwowany dzięki procesowi zwanemu *bremstrahlung*, zachodzącemu wówczas, gdy elektron przemieszcza się blisko protonu, ale nie na tyle, aby zjonizowany wodór mógł ulec rekombinacji. Odchylenie spowodowane przyciąganiem protonu powoduje wówczas utratę energii kinetycznej elektronu. Energia ta jest przekształcana w foton, obserwowalny przy długości fali radiowej.

Zjawisko „zakrycia” gwiazdy przez pył nazywane jest wygaszaniem, ponieważ fotony pochodzące z tła są blokowane przez gęsty ośrodek bańki.



Rys. 1. Schemat obszaru HII i długości fali, w których obserwowane są jego poszczególne regiony. Dwa obszary najbliższe środka są również widoczne dla długości fali  $H\alpha$  oraz w promieniowaniu centymetrowym



Rys. 2. RCW 120 obserwowana na długości fali 8  $\mu\text{m}$  (emisja PAH), w której widoczny jest pierścień otaczający obszar zjonizowanego gazu. Okrąg zaznacza miejsce, w którym znajduje się masywna gwiazda odpowiedzialna za stworzenie bańki HII. Strzałka wskazuje kierunek, w którym obserwowane jest „wyciekanie” promieniowania  $H\alpha$

Jeden z najbardziej reprezentatywnych obszarów HII naszej galaktyki, ze względu na swój prawie idealny (ale nie całkiem, co widać na rysunku 2) sferyczny kształt nosi nazwę RCW-120. Znajduje się stosunkowo niedaleko (tylko 1,3 kpc), przez co jest łatwy do obserwacji. Niewielkie odchylenia od sferyczności, widoczne na zdjęciu, są spowodowane niejednorodnym początkowym rozkładem materiału, z którego później powstała bańka. Na przykład górna część RCW-120 nie jest wystarczająco gęsta, przez co promieniowanie  $H\alpha$  „przecieka” poza bańkę. To zjawisko zwane jest *champain flow*. Jeżeli gwiazda jonizująca znajduje się w stosunkowo rzadkim środowisku gazu i pyłu, to takie wypływy mogą powstać w różnych miejscach bańki, tworząc tak zwany dwubiegunowy obszar HII. Często również kilka masywnych gwiazd umiejscowionych jest w stosunkowo niewielkiej odległości (powstały z tej samej chmury pyłu i gazu) i ich obszary HII nakładają się na siebie, tworząc skomplikowane struktury dalekie od sferycznych baniek.

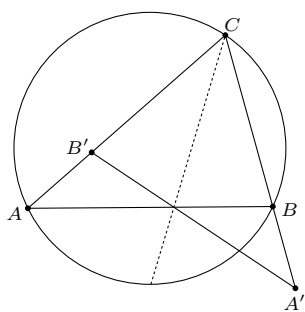
Dzięki obserwacjom prowadzonym w dalekiej i bliskiej podczerwieni w naszej Galaktyce zaobserwowano około 8000 regionów HII. Co interesujące, na obrzeżach tych odkrytych obszarów HII znajduje się około 30% wszystkich masywnych gwiazd naszej Galaktyki. Dlaczego to takie ważne? Masywne gwiazdy są bardzo rzadko spotykanymi obiektami, ponieważ długość ich „życia” jest bardzo krótka (oczywiście w skali Wszechświata). Dlatego odkrywanie obszarów HII, wokół których najwyraźniej znajduje się ich najwięcej, może przyczynić się do lepszego poznania mechanizmów powstawania gwiazd o masach większych niż  $8M_{\odot}$ . Uważa się, że rozszerzanie się obszarów HII powoduje tworzenie się gęstych obszarów pyłu i gazu, dostarczając w ten sposób materiału i kreując warunki do powstawania masywnych gwiazd. Proces tworzenia się gwiazd wywołany rozszerzaniem się obszarów HII nazywany jest z języka angielskiego *triggering* (niestety wiele pojęć związanych z astronomią nie ma jeszcze polskich odpowiedników). Obecność obszaru HII może przyspieszyć tempo (zwiększyć efektywność) tworzenia się gwiazd w środowisku, w którym wcześniej powstawały, lub spowodować zwiększenie się średniej masy nowo powstających gwiazd (tzw. *weak triggering*). Może też wywołać procesy tworzenia się gwiazd w obszarach, w których wcześniej nie było do tego warunków (tzw. *hard triggering*). Tak przedstawia się ogólny opis procesów odpowiedzialnych za tworzenie się gwiazd na obrzeżach regionów HII. Szczegóły wciąż jednak pozostają w strefie dyskusji.

# Składanie inwersji z symetrią

Michał KIEZA

Inwersja jest bardzo pożytecznym przekształceniem, które ma szerokie zastosowanie w zadaniach związanych z okręgami. W wielu z nich oplaca się stosować ją w taki sposób, aby nie mnożyć punktów – innymi słowy tak dobrać promień inwersji, aby obrazy interesujących nas punktów wypadały w innych punktach rozważanej konfiguracji. Zdarza się jednak, że do uzyskania tego efektu potrzebujemy dodatkowo złożyć inwersję z symetrią.

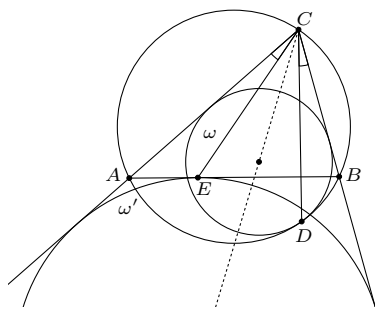
Rozważmy mianowicie trójkąt  $ABC$  wpisany w okrąg  $o$ . Jeśli zastosujemy inwersję o środku w punkcie  $C$  (i przez  $A'$  i  $B'$  oznaczymy obrazy, odpowiednio, punktów  $A$  i  $B$ ), to otrzymamy trójkąt  $A'B'C$ , który będzie podobny do trójkąta  $BAC$ . Jeśli promień inwersji będzie równy  $\sqrt{CA \cdot CB}$ , to trójkąt  $A'B'C$  będzie przystający do trójkąta  $ABC$  (rys. 1). Znacznie lepszym podejściem jest rozważenie złożenia inwersji o środku  $C$  i promieniu  $\sqrt{CA \cdot CB}$  z symetrią względem dwusiecznej kąta  $ACB$ . Przekształcenie to, podobnie jak inwersja, jest involucją, czyli złożone same z sobą daje identyczność. W takim razie zamienia ono każdy obiekt z jego obrazem. W szczególności przekształcenie to zamienia punkty  $A$  i  $B$ , półproste  $CA^{\rightarrow}$  i  $CB^{\rightarrow}$  oraz wymienia prostą  $AB$  z okręgiem opisanym na trójkącie  $ABC$ . Ponadto posiada ono wszystkie własności inwersji – np. zachowuje kąty. Przekonajmy się o jego przydatności na kilku przykładach.



Rys. 1

**Zadanie 1.** Dany jest trójkąt  $ABC$  wpisany w okrąg  $o$ . Okrąg  $\omega$  jest styczny do odcinków  $AC$  i  $BC$  oraz do okręgu  $o$  w punkcie  $D$ . Okrąg  $\omega'$  zaś jest dopisany do trójkąta  $ABC$  i styczny do boku  $AB$  w punkcie  $E$ . Wykazać, że  $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCD$ .

*Rozwiązanie.* Rozważmy przekształcenie będące złożeniem inwersji o środku  $C$  i promieniu  $\sqrt{CA \cdot CB}$  z symetrią względem dwusiecznej kąta  $ACB$  (rys. 2). Przekształcenie to zamienia półproste  $CA^{\rightarrow}$  i  $CB^{\rightarrow}$  oraz prostą  $AB$  z okręgiem  $o$ . W takim razie okrąg  $\omega$  przejdzie na okrąg styczny do prostej  $AB$  i półprostych  $CA^{\rightarrow}$  i  $CB^{\rightarrow}$ , czyli na okrąg  $\omega'$ . Stąd wniosek, że obrazem punktu  $D$  jest punkt  $E$ . Półprosta  $CD^{\rightarrow}$  przejdzie więc na półprostą  $CE^{\rightarrow}$ , a skoro inwersja zachowuje kąty, to  $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACE$ .



Rys. 2

**Zadanie 2.** Punkt  $I$  jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ , zaś  $o$  jest okręgiem opisanym na tym trójkącie. Okrąg  $\omega$  styczny do odcinków  $AC$ ,  $BC$  jest styczny do okręgu  $o$  w punkcie  $P$ , a  $S$  jest środkiem tego łuku  $AB$  okręgu  $o$ , na którym leży punkt  $C$ . Wykazać, że punkty  $P$ ,  $I$ ,  $S$  są współliniowe.

*Rozwiązanie.* Jeśli  $AC = BC$ , to punkty  $C$  i  $S$  pokrywają się i punkty  $P$ ,  $I$ ,  $S$  leżą na dwusiecznej  $CI$ . Dalej zakładamy, że  $AC \neq BC$ . Wówczas punkty  $C$  i  $S$  są różne, zaś proste  $CS$  i  $AB$  nie są równoległe. Rozważmy złożenie inwersji o środku  $C$  i promieniu  $\sqrt{CA \cdot CB}$  z symetrią względem dwusiecznej kąta  $ACB$  (rys. 3). Przekształcenie to zamienia półproste  $CA^{\rightarrow}$  i  $CB^{\rightarrow}$  oraz prostą  $AB$  z okręgiem  $o$ . Tak jak w poprzednim zadaniu uzasadniamy, że obrazem okręgu  $\omega$  jest okrąg dopisany do trójkąta  $ABC$  styczny do boku  $AB$  w punkcie  $P'$ , który jest obrazem punktu  $P$  w tym przekształceniu. Ponieważ  $CS$  jest dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku  $C$  trójkąta  $ABC$ , to proste  $CS$  i  $CI$  są prostopadłe. W takim razie obrazem punktu  $S$  jest punkt  $S'$  przecięcia prostej  $CS$  (która jest swoim własnym obrazem) z prostą  $AB$  (która jest obrazem okręgu  $o$ ). Niech  $I'$  będzie obrazem punktu  $I$ . Wtedy z definicji inwersji mamy

$$CI \cdot CI' = CA \cdot CB,$$

czyli

$$\frac{CI}{CA} = \frac{CB}{CI'}.$$

Z powyższego i z równości  $\sphericalangle ACI = \sphericalangle I'CB$  (bo inwersja zachowuje kąty) otrzymujemy, że trójkąty  $ACI$  i  $I'CB$  są podobne. W takim razie





**Rozwiązanie zadania M 1635.**

Odpowiedź:  $2n - 1$ .

Podzielmy dany kwadrat  $n \times n$  na  $n^2$  kwadratów jednostkowych, zwanych dalej *polami*, i wyróżnimy pola znajdujące się na przecięciach wierszy i kolumn o parzystych numerach. Takich pól jest  $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ .

Zauważmy, że każdy parzysty prostokąt o wymiarach  $2a \times 2b$ , a więc o polu  $4ab$ , zawiera dokładnie  $ab$  wyróżnionych pól. Wobec tego łączne pole części podziału będących parzystymi prostokątami jest równe co najwyżej  $4 \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = (n-1)^2$ . Łączne pole kwadratów jednostkowych jest zatem równe co najmniej  $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$ , skąd wniosek, że jest co najmniej tyle takich kwadratów.

Wystarczy zauważyć, że podział, w którym otrzymujemy  $2n - 1$  kwadratów jednostkowych, jest możliwy – wystarczy wyciąć kwadrat o boku  $n - 1$ , a pozostałą część podzielić na kwadraty jednostkowe.

$\sphericalangle AIC = \sphericalangle I'BC$ . Ponieważ  $\sphericalangle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$ , to mamy

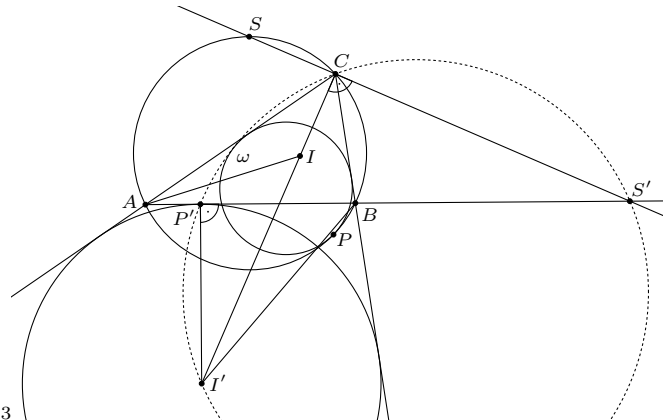
$$90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABI',$$

skąd

$$\sphericalangle ABI' = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC.$$

Zatem  $BI'$  jest dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku  $B$  trójkąta  $ABC$ , więc  $I'$  jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta  $ABC$ .

W takim razie  $\sphericalangle S'P'I' = 90^\circ$ , co wraz z równością  $\sphericalangle S'CI' = 90^\circ$  (bo  $CS \perp CI'$ ) oznacza, że punkty  $P', I', S'$  i  $C$  leżą na jednym okręgu. To zaś jest równoważne z tym, że punkty  $P, I, S$  są współliniowe.



Rys. 3

**Zadanie 3.** Okrąg o środku  $I$  jest wpisany w trójkąt  $ABC$ . Okrąg  $\omega$  styczny do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  jest styczny do odcinków  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $D$  i  $E$ . Wykazać, że punkt  $I$  leży na odcinku  $DE$ .

*Rozwiązanie.* Niech  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $p$  to połowa obwodu trójkąta  $ABC$ ,  $\gamma$  to miara kąta  $ACB$ , zaś  $r$  to promień okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ . Inwersja o środku  $C$  i promieniu  $\sqrt{CA \cdot CB}$  złożona z symetrią względem dwusiecznej kąta  $ACB$  przeprowadza okrąg  $\omega$  na okrąg dopisany do trójkąta  $ABC$  styczny do boku  $AB$  w punkcie  $F$ , a punkty  $D$  i  $E$  odpowiednio na punkty  $D' \in CB$  i  $E' \in AC$  (rys. 4). Ponieważ  $AE' = AF$  i  $BD' = BF$ , to

$$CD' + CE' = AC + AF + BF + BC = 2p,$$

co wraz z równością  $CD' = CE'$  prowadzi do wniosku, że  $CD' = p$ . Z drugiej strony z definicji inwersji mamy

$$CD \cdot CD' = AC \cdot BC,$$

zatem

$$CD = \frac{ab}{p} = \frac{2S_{ABC}}{p \sin \gamma} = \frac{2r}{\sin \gamma}.$$

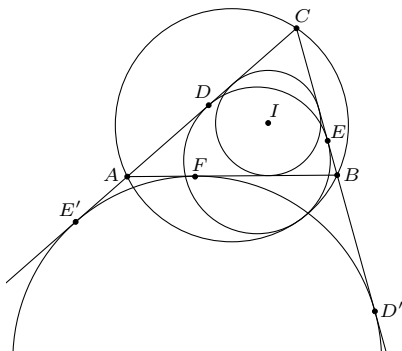
Przyjmijmy teraz, że prosta przechodząca przez  $I$  i prostopadła do prostej  $CI$  przecina boki  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $D_1$  i  $E_1$  (rys. 5). Skoro  $D_1I = E_1I$ , to odległość punktu  $D_1$  od prostej  $BC$  jest równa  $2r$ , skąd wniosek, że  $CD_1 = \frac{2r}{\sin \gamma} = CD$ , czyli  $D_1 = D$ . Analogicznie uzasadnimy, że  $E_1 = E$ , więc punkt  $I$  leży na odcinku  $DE$ .

Oprócz składania inwersji z symetrią osiową możemy także złożyć inwersję z symetrią środkową (o środku w środku inwersji). Zobaczmy to na poniższym przykładzie.

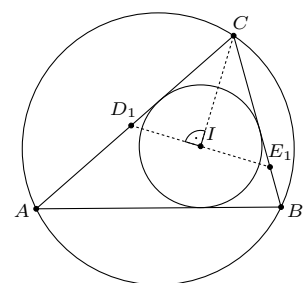
**Zadanie 4.** Trójkąt różnoboczny  $ABC$  jest wpisany w okrąg  $o$ . Punkty  $D, E, F$  są środkami łuków  $BC, CA, AB$  niezawierających pozostałych wierzchołków trójkąta. Punkty  $D', E', F'$  są symetryczne do punktów  $D, E, F$  odpowiednio względem boków  $BC, CA, AB$ . Wykazać, że punkty  $D, E, F$  oraz ortocentrum trójkąta  $ABC$  leżą na jednym okręgu.

*Rozwiązanie.* Niech  $A_1, B_1$  i  $C_1$  będą spodkami wysokości trójkąta  $ABC$  poprowadzonymi odpowiednio z wierzchołków  $A, B, C$ . Ponieważ na czworokątach  $ABA_1B_1$  i  $BCB_1C_1$  można opisać okręgi, to

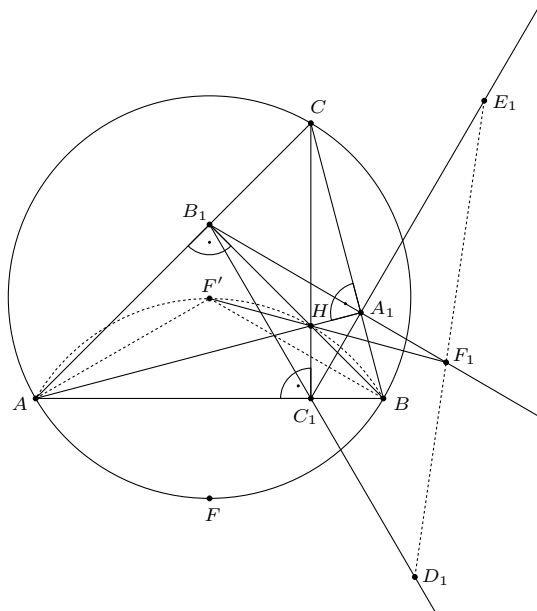
$$AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H = r^2.$$



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Rozważmy inwersję o środku  $H$  i promieniu  $r$  złożoną z symetrią środkową względem punktu  $H$  (rys. 6). Obrazami punktów  $A, B, C$  są zatem punkty  $A_1, B_1, C_1$ . Ponieważ

$$\sphericalangle AF'B = \sphericalangle AFB = 180^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle AHB,$$

to punkty  $A, F', H, B$  leżą na jednym okręgu, który w rozważanym przekształceniu przechodzi na prostą  $A_1B_1$ . Obrazem punktu  $F'$  jest punkt  $F_1$  przecięcia prostych  $F'H$  i  $A_1B_1$ . Analogicznie stwierdzamy, że w tym przekształceniu punkt  $D'$  przechodzi na punkt  $D_1$  przecięcia prostych  $D'H$  i  $B_1C_1$ , a punkt  $E'$  przechodzi na punkt  $E_1$  przecięcia prostych  $E'H$  i  $C_1A_1$ .

Wystarczy udowodnić, że punkty  $D_1, E_1, F_1$  leżą na jednej prostej. Stosując twierdzenie Menelaua dla trójkąta  $A_1B_1C_1$ , widzimy, że wystarczy wykazać, że

$$(*) \quad \frac{A_1F_1}{B_1F_1} \cdot \frac{B_1D_1}{C_1D_1} \cdot \frac{C_1E_1}{A_1E_1} = 1.$$

Wykorzystując wzór na odległość obrazów inwersyjnych, otrzymujemy

$$A_1F_1 = AF' \cdot \frac{r^2}{HF' \cdot HA} \quad \text{oraz} \quad B_1F_1 = BF' \cdot \frac{r^2}{HF' \cdot HB}.$$

Uwzględniając równość  $AF' = BF'$ , widzimy, że

$$\frac{A_1F_1}{B_1F_1} = \frac{HB}{HA}.$$

Analogicznie uzasadniamy, że

$$\frac{B_1D_1}{C_1D_1} = \frac{HC}{HB} \quad \text{oraz} \quad \frac{C_1E_1}{A_1E_1} = \frac{HA}{HC}.$$

Mnożąc te trzy równości stronami, dostajemy (\*), co kończy rozwiązanie.

Na koniec artykułu zostawiamy kilka zadań dla Czytelników.

**Zadanie 5.** Okrąg  $\omega$  wpisany w trójkąt  $ABC$  jest styczny do boku  $AB$  w punkcie  $D$ . Okrąg  $\omega'$  jest styczny do półprostych  $CA^{\rightarrow}$  i  $CB^{\rightarrow}$  oraz jest styczny zewnętrznie w punkcie  $E$  do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ . Wykazać, że  $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCD$ .

**Zadanie 6.** Trapez  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$  jest wpisany w okrąg  $o_1$ . Okrąg  $o_2$  jest styczny do odcinków  $BC$  i  $CA$  oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu  $o_1$  w punkcie  $F$ . Okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$  jest styczny do odcinka  $AB$  w punkcie  $E$ . Dowieść, że punkty  $D, E, F$  leżą na jednej prostej.

**Zadanie 7.** Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ , w którym  $AB > AC$ . Punkty  $B_0$  i  $C_0$  są odpowiednio środkami boków  $CA$  i  $CB$ , a punkt  $D$  jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka  $A$ . Okrąg przechodzący przez punkty  $B_0$  i  $C_0$  jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  w punkcie  $E$  różnym od  $A$ . Udowodnić, że środek ciężkości trójkąta  $ABC$  leży na prostej  $DE$ .

**Zadanie 8.** Okrąg  $o_1$  jest styczny do boków  $AC$  i  $BC$  trójkąta  $ABC$  oraz do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie  $P$ . Okrąg  $o_2$  jest styczny do półprostych  $CA^{\rightarrow}$  i  $CB^{\rightarrow}$  oraz jest styczny zewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  w punkcie  $Q$ . Wykazać, że

$$\frac{AP \cdot AQ}{BP \cdot BQ} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$

**Zadanie 9.** Trójkąt  $ABC$  jest wpisany w okrąg  $\omega$ . Prosta  $\ell$  jest równoległa do prostej  $BC$  i przecina odcinki  $AB$  i  $AC$  odpowiednio w punktach  $D$  i  $E$ , a okrąg  $\omega$  w punktach  $K$  i  $L$  (gdzie  $D$  leży między punktami  $K$  i  $E$ ). Okrąg  $o_1$  jest styczny do odcinków  $DK$  i  $BD$  oraz do okręgu  $\omega$ ; okrąg  $o_2$  jest styczny do odcinków  $EL$  i  $CE$  oraz do okręgu  $\omega$ . Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów przecięcia wspólnych stycznych wewnętrznych okręgów  $o_1$  i  $o_2$ , przy zmieniającym się położeniu prostej  $\ell$ .



**Rozwiązanie zadania F 998.**

Prędkość graniczna  $v$  osiągnięta jest, gdy siła oporu zrównuje się z ciężarem ciała:

$$mg = kSv^2,$$

gdzie  $m$  jest masą ciała, a  $g$  przyspieszeniem ziemskim. Dla kuli o promieniu  $R$  masa  $m$  jest proporcjonalna do iloczynu  $\rho R^3$ , a pole przekroju poprzecznego do  $R^2$ . Dla kul z tego samego materiału otrzymujemy więc:

$$\frac{v_1}{v_2} \propto \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/6},$$

a dla kul o tych samych rozmiarach (promieniach):

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\rho_1 \rho_2}.$$

a) Kula cięższa (o większym promieniu) osiągnie prędkość  $\sqrt{2} \approx 1,41$  razy większą niż kulka lżejsza; b) Kula z materiału o większej gęstości (cięższa) osiągnie prędkość  $2\sqrt{2} \approx 2,82$  razy większą niż kulka lżejsza.

## Informatyczny kącik olimpijski (136): Theater Tickets

Tym razem omówimy zadanie „Theater Tickets”, które pojawiło się w konkursie *Zinc 2018* organizowanym przez firmę Codility.

**Zadanie:** Dany jest  $n$ -elementowy ciąg liczb naturalnych  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  z przedziału od 1 do  $n$ . Oblicz, ile różnych trzelementowych podciągów występuje w ciągu  $a$ ? Dwa podciągi uznajemy za różne, jeśli różnią się na przynajmniej jednej pozycji. Przykładowo  $(1, 2, 1, 1)$  ma trzy różne podciągi:  $(1, 2, 1)$  (występujący dwa razy),  $(1, 1, 1)$  (występujący raz) oraz  $(2, 1, 1)$  (występujący raz).

Niech  $a_{l:p}$  oznacza podśłowo  $a_l, a_{l+1}, \dots, a_p$ .

### Rozwiązanie $O(n^3)$

Pierwsze rozwiązanie będzie polegało na prostym zliczeniu podciągów trzelementowych. Zauważmy, że wszystkich trzelementowych ciągów o wartościach z przedziału  $[1; n]$  jest  $n^3$ , gdyż każdy z trzech elementów można wybrać na  $n$  sposobów. Niech  $T[x][y][z] = 1$ , jeśli  $(x, y, z)$  jest podciągiem  $a$  oraz  $T[x][y][z] = 0$  w przeciwnym przypadku. Aby uzupełnić tablicę zliczającą  $T$ , wystarczy dla każdej trójki indeksów  $1 \leq i < j < k \leq n$  zaktualizować  $T[a_i][a_j][a_k] := 1$ . Ta faza zajmuje czas  $O(n^3)$ . Wynikiem jest liczba komórek tablicy zliczającej  $T$  o wartości 1. Rozwiązanie działa w czasie i pamięci  $O(n^3)$ .

### Rozwiązanie $O(n^2)$

Policzmy dla każdego prefiksu, ile zawiera on różnych dwuelementowych podciągów. Niech  $P2[i]$  oznacza tę wartość dla  $i$ -elementowego prefiksu  $a_{1:i}$ . Wyniki będziemy obliczali od najkrótszych do najdłuższych prefiksów. Oczywiście  $P2[1] = 0$ . Zastanówmy się zatem, jak wyznaczyć  $P2[i]$  dla  $i > 1$ . Otóż  $P2[i] = P2[i-1] + l$ , gdzie  $l$  oznacza liczbę takich dwuelementowych podciągów, które nie występują w  $a_{1:i-1}$ , ale występują w  $a_{1:i}$ , czyli takich, których drugim elementem jest  $a_i$ . Rozważmy więc takie dwuelementowe podciągi  $(a_j, a_i)$ , że  $1 \leq j < i$ , i zliczmy te, które nie występują w  $a_{1:i-1}$ . Aby sprawdzić, które dwuelementowe podciągi wystąpiły wcześniej, można, podobnie jak w poprzednim rozwiązaniu, skorzystać z tablicy zliczającej. Wynik dla każdego prefiksu liczymy w czasie  $O(n)$ , prefiksów jest  $O(n)$ , zatem  $P2$  obliczamy w czasie  $O(n^2)$ .

Przejdźmy teraz do wyznaczenia liczby różnych trzelementowych podciągów  $a$ . Na początku dla każdej wartości od 1 do  $n$  zapamiętajmy numer ostatniej pozycji, na której ta wartość występuje w  $a$ . Niech  $ost[x]$  oznacza takie największe  $i$ , że  $a_i = x$ . Podciągi będziemy zliczali grupami, biorąc pod uwagę wartość ostatniego elementu. Otóż policzymy, ile jest podciągów, których ostatni element to odpowiednio  $1, 2, \dots, n$ , a na koniec zsumujemy te wyniki. Zastanówmy się, jak dla ustalonego  $z$  wyznaczyć liczbę różnych podciągów w  $a$  postaci  $(x, y, z)$  dla  $1 \leq x, y \leq n$ . Jeśli  $z$  nie występuje w  $a$ , to nie ma takich podciągów. W przeciwnym przypadku weźmy ostatnie wystąpienie  $z$  w  $a$ , które znajduje się na pozycji  $ost[z]$ . Trzeci element mamy ustalony, zaś dwa pierwsze elementy możemy wybrać na  $P2[ost[z]-1]$  sposobów, co jest równe liczbie różnych trzelementowych podciągów kończących się liczbą  $z$ . Całkowita liczba trzelementowych podciągów

to  $\sum_{z=1}^n P2[ost[z]-1]$ , co możemy obliczyć w  $O(n)$ , znając  $P2$ . Natomiast całe rozwiązanie działa w czasie i pamięci  $O(n^2)$ .

### Rozwiązanie $O(n)$

Spróbujmy przyspieszyć pierwszą fazę poprzedniego rozwiązania (obliczanie  $P2$ ). Na początku dla każdego prefiksu policzmy, ile zawiera on różnych wartości (podciągów jednoelementowych). Niech  $P1[i]$  oznacza tę wartość dla  $i$ -elementowego prefiksu, czyli  $a_{1:i}$ . Wyniki będziemy wyznaczać w kolejności rosnącej długości prefiksów. Oczywiście  $P1[i] = 1$  (mamy tylko jeden element). Zastanówmy się teraz, jak wyznaczyć  $P1[i]$  dla  $i > 1$ . Jeśli  $a_i$  występowało wcześniej, wtedy  $P1[i] = P1[i-1]$ . W przeciwnym przypadku  $P1[i] = P1[i-1] + 1$ . Do sprawdzania, czy  $a_i$  występowało wcześniej, możemy wykorzystać tablicę zliczającą.

Przejdźmy teraz do obliczenia  $P2$ . Podobnie jak wcześniej, wartości tej tablicy będziemy obliczali od najkrótszych do najdłuższych prefiksów. Dodatkowo niech  $pop[x]$  dla  $1 \leq x \leq n$  oznacza numer ostatniej pozycji spośród przejrzanych elementów, na której wystąpił  $x$ .

Najpierw dla jednoelementowego prefiksu ustawiamy  $P2[1] = 0$  (nie ma podciągów dwuelementowych) oraz zapisujemy informację  $pop[a_1] = 1$  (ostatnie wystąpienie wartości  $a_1$  na pozycji numer 1). Następnie przeglądamy kolejne prefiksy. Załóżmy, że obliczamy  $P2[i]$  dla  $i > 1$ . Otóż  $P2[i]$  to  $P2[i-1]$  powiększone o liczbę takich dwuelementowych podciągów  $a_{1:i}$ , które nie występują w  $a_{1:i-1}$ . Szukane podciągi są postaci  $(x, a_i)$  – drugi element ma wartość  $a_i$ . Wszystkich takich podciągów w  $a_{1:i}$  jest  $P1[i-1]$ , gdyż na tyle sposobów można wybrać  $x$ . Powinniśmy jednak odjąć te podciągi, które występują również w  $a_{1:i-1}$ . Jeśli  $a_i$  występuje pierwszy raz, wtedy nie musimy nic odejmować. Jeśli natomiast  $a_i$  występowało wcześniej, to weźmy jego poprzednie wystąpienie na pozycji  $pop[a_i]$ . Zauważmy, że jest ono drugim elementem  $P1[pop[a_i]-1]$  podciągów (na tyle sposobów można wybrać element stojący przed poprzednim wystąpieniem  $a_i$ ). Zatem otrzymaliśmy, że:  $P2[i] = P2[i-1] + P1[i-1] - P1[pop[a_i]-1]$ . Po obliczeniu  $P2[i]$  możemy zaktualizować  $pop[a_i] = i$ . Wyznaczyliśmy  $P2$  w czasie  $O(n)$ . Druga faza algorytmu jest analogiczna do tej opisaną w sekcji *Rozwiązanie  $O(n^2)$*  i działa w czasie  $O(n)$ , co daje nam pełne rozwiązanie o złożoności czasowej  $O(n)$ .

Bartosz ŁUKASIEWICZ

# Algorytmy podzielności przez 7

Łukasz GRZĄDKO\*

\*Nokia

Zapewne każdy Czytelnik *Delty* wie, jak sprawdzić, czy nawet duża liczba jest podzielna przez 3, czy przez 8. Metody tego typu wprowadzane są już w młodszych klasach szkoły podstawowej, dzięki czemu są powszechnie znane. Jednak tytułowy problem podzielności akurat przez 7 jest w typowym kursie szkolnym pomijany. W niniejszym artykule postanowiliśmy więc tę lukę uzupełnić i przedstawić przegląd różnych metod na sprawdzenie podzielności przez 7.

A więc do dzieła:

## Metoda: pomnóż przez 2 i odejmij

Pojedynczy krok algorytmu jest następujący: jeśli liczba  $N$  jest co najmniej trzycyfrowa, to zastępujemy („nadpisujemy”) ją liczbą:

$$\left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor - 2 \cdot (N \bmod 10).$$

Gdy zmienna  $N$  stanie się dwucyfrowa, to po prostu sprawdzamy jej podzielność przez 7 wprost. Pozostawiamy Czytelnikom udowodnienie poprawności tej metody. Od strony złożoności algorytmicznej – dostajemy liniowy koszt zarówno czasowy, jak i pamięciowy.

## Metoda kolejnych trójek

Skorzystamy tutaj z kongruencji  $1000 \equiv -1 \pmod{7}$ .

Przyjmujemy, że liczba cyfr liczby  $N$  jest podzielna przez 3, w przeciwnym razie najbardziej znaczące miejsca możemy uzupełnić zerami.

Możemy zatem zapisać  $N$  jako  $\sum_{i=0}^{n/3-1} \overline{c_{3i+2}c_{3i+1}c_{3i}} \cdot 1000^i$ . Stąd, i z powyższej kongruencji, mamy  $N \equiv \sum_{i=0}^{n/3-1} \overline{c_{3i+2}c_{3i+1}c_{3i}} \cdot (-1)^i$ . Metoda sprawdzenia podzielności sprowadza się więc do arytmetyki liczb trzycyfrowych. Dla przykładu liczba 5 242 636 881 jest podzielna przez 7, bo  $5 - 242 + 636 - 881$  jest podzielna przez 7.

## Metoda potęgowania trójki

Kolejny sposób bazuje na poniższej obserwacji:

Niech

$$(*) \quad R = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot 3^i.$$

Wówczas  $N$  jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy  $R$  jest podzielna przez 7.

Powyższe stwierdzenie wynika wprost z faktu, że dla każdego całkowitego  $i \geq 0$ ,  $3^i \equiv 10^i \pmod{7}$ .

Potęgowanie jest dość czasochłonne, ale ponieważ interesuje nas tylko reszta z dzielenia, więc możemy odpowiednio potęgi 3 zastąpić odpowiednim wynikiem modulo 7:

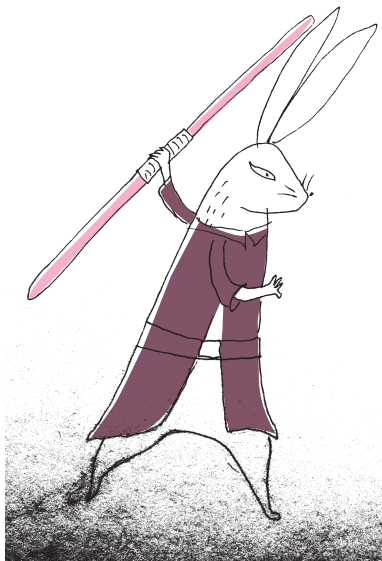
$$3^0 \equiv 1 \pmod{7}, \quad 3^1 \equiv 3 \pmod{7}, \quad 3^2 \equiv 2 \pmod{7}, \quad 3^3 \equiv 6 \pmod{7}, \\ 3^4 \equiv 4 \pmod{7}, \quad 3^5 \equiv 5 \pmod{7}, \quad 3^6 \equiv 1 \pmod{7}, \quad \dots$$

(Kolejne reszty pojawiają się cyklicznie w cyklu długości 6.)

Możemy zatem zapamiętać permutację (1, 3, 2, 6, 4, 5) i podstawiać cyklicznie jej elementy w miejsce kolejnego mnożnika  $3^i$  we wzorze (\*), i na końcu sprawdzić, czy otrzymana liczba dzieli się przez 7. Co ciekawe, każde przesunięcie cyklu również poprawnie rozstrzygnie podzielność przez 7, tj. możemy mnożyć kolejne cyfry przez np. (3, 2, 6, 4, 5, 1) czy (2, 6, 4, 5, 1, 3). Ta ważna własność – która będzie kluczowa również w rozumowaniu pod koniec tego tekstu – wynika z tego, że dla

Notacja  $\overline{c_{n-1}c_{n-2}c_{n-3} \dots c_1c_0}$  oznacza  $n$ -cyfrową liczbę  $N$  o cyfrach  $c_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Najmniej znaczącą cyfrą liczby  $N$  jest  $c_0$ , a najbardziej znaczącą  $c_{n-1}$ .

Dowód poprawności metody kolejnych trójek można znaleźć m.in. w książce Wacława Sierpińskiego „Teoria Liczb”, t. 1. Zauważmy, że rozumowanie w dowodzie działa również dla podzielności przez 11 oraz 13, gdyż  $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ .



Metodę z cyklem  $(1, -2, 4, -1, 2, -4)$  da się wyprowadzić bezpośrednio, tym razem analizując kolejne potęgi 5 (równoważnie:  $(-2)$ ), ale rosnące odwrotnie niż w klasycznym algorytmie – to znaczy od najbardziej znaczącej, a nie od najmniej znaczącej cyfry. Taka zresztą była geneza powstania oraz analizy tej metody przeprowadzona przez autora tekstu – Czytelnik Zaciekawiony może spróbować odtworzyć to rozumowanie samodzielnie.

dowolnego naturalnego  $k$  liczba  $3^k \cdot R$  jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy  $R$  jest podzielna przez 7, ponieważ liczby 3 oraz 7 są względnie pierwsze.

Mamy zatem 6 różnych permutacji, które można zastosować równoważnie w algorytmie. Dla przykładu, żeby sprawdzić, czy liczba 12 345 678 jest podzielna przez 7, możemy sprawdzić sumę (wybraliśmy cykl  $(3, 2, 6, 4, 5, 1)$ ):

$$3 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 125;$$

następnie  $3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 25$ . Ostatnia suma nie jest podzielna przez 7, zatem wyjściowa liczba też nie jest podzielna przez 7. Natomiast 12 345 683 jest podzielna przez 7, gdyż odpowiednia suma cyfr po analogicznym podstawieniu wynosi 112, a ta jest podzielna przez 7.

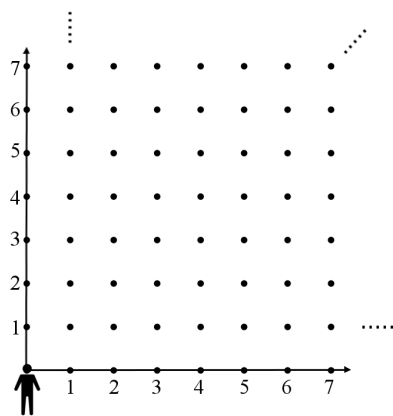
Zauważmy też, że permutację  $(1, 3, 2, 6, 4, 5)$  możemy zapisać równoważnie jako  $(1, 3, 2, -1, -3, -2)$ , co istotnie może ułatwić zapamiętanie metody (de facto pamiętamy cykl tylko trzech liczb i pilnujemy zmiany znaku po każdym obrocie).

Jeśli metodę implementujemy na komputerze i chcemy naprawdę efektywnie to zrobić, jeszcze lepiej zapisać cykl jako  $(1, -4, 2, -1, 4, -2)$ , gdyż mnożenie przez małe potęgi 2 jest dla komputera wyjątkowo naturalne (ten i następny wariant algorytmu nie był znany autorowi tekstu wcześniej).

Zauważmy, że powyższa metoda może działać w stałej pamięci, jeśli liczba jest podawana na wejściu „strumieniowo” (cyfra po cyfrze) od najmniej znaczącej cyfry.

A co, gdy liczba jest podawana na wejściu od cyfry najbardziej znaczącej?

Tutaj też poradzimy sobie w stałej pamięci. Wystarczy tylko pewien cykl odwrócić (np. przyjąć  $(1, -2, 4, -1, 2, -4)$ ) oraz postępować dalej podobnie jak w klasycznym algorytmie – łatwo sprawdzić, że wówczas obliczymy tę samą sumę, co w standardowej procedurze (choć, co ciekawe: dla pewnego – nieznanego z góry – spośród sześciu poprawnych cykli)!



Czytelnik Purysta zapewne dostrzeże, że określenie „losujemy liczbę  $a$  z przedziału  $[0, \infty)$ ” nie jest precyzyjne, gdyż nie podajemy rozkładu, z jakim to losowanie przebiega. Jednakże w tym miejscu nie prowadzi to do niejednoznaczności, ponieważ dla każdego rozkładu ciągłego zadanego na przedziale miara każdego jego podzbioru przeliczalnego i tak zawsze wynosi 0.

## Widoczność w nieskończonym lesie

Stoimy u progu nieskończenie milowego, nad wyraz uporządkowanego lasu. Najlepszym miejscem na uporządkowany las jest oczywiście układ współrzędnych. Pnie drzew, które są odcinkami, umieszczone są w punktach o współrzędnych całkowitych nieujemnych. Nasz wzrok z punktu  $(0, 0)$ , w którym drzewa nie ma, przygląda się temu zjawisku (patrz rysunek). Taki las ciągnie się nieskończenie daleko...

Kiedy patrzymy na drzewo  $(1, 1)$ , to zasłania ono wszystkie inne drzewa o współrzędnych  $(k, k)$  (dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$ ). Podobnie drzewo  $(1, 2)$  zasłania wszystkie drzewa o współrzędnych  $(k, 2k)$ , a drzewo  $(7, 5)$  wszystkie drzewa o współrzędnych  $(7k, 5k)$ .

**Czy możliwe jest, aby z punktu  $(0, 0)$  spojrzeć na wskroś tego lasu, tak aby nie zobaczyć absolutnie żadnego drzewa?**

Zauważmy, że spoglądając na drzewo  $(k, l)$ , patrzymy wzdłuż prostej  $y = \frac{l}{k}x$ . Oznacza to, że spoglądając na dowolne drzewo, będziemy zawsze patrzeć wzdłuż prostej, której współczynnik kierunkowy jest liczbą wymierną. Aby nie mieć na linii wzroku żadnego drzewa, wystarczy spojrzeć w stronę punktu, którego dokładnie jedna współrzędna jest liczbą niewymierną.

**Losujemy liczbę  $a$  z przedziału  $[0, \infty)$ . Jaka jest szansa, że patrząc wzdłuż prostej  $y = ax$ , zobaczymy drzewo?**

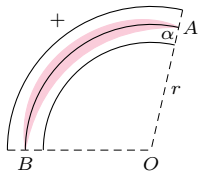
Pytanie sprowadza się do zbadania, jaką część liczb rzeczywistych z przedziału  $[0, \infty)$  stanowią liczby wymierne. Co z kolei prowadzi do stwierdzenia, że szansa na zobaczenie drzewa wynosi 0. Czytelnikom Niedowierzającym i tym, którzy dopiero rozpoczynają znajomość z przeliczalnością zbiorów, polecamy artykuł Joanny Jaszuńskiej w  $\Delta_{13}^7$ .

K.Ł.

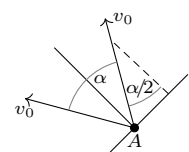
# Klub 44 F



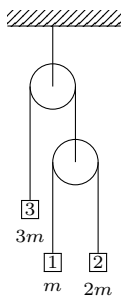
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2020



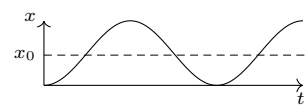
Rys. 1



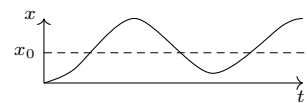
Rys. 2



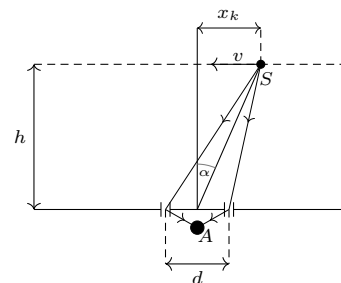
Rys. 3



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

## Zadania z fizyki nr 696, 697

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

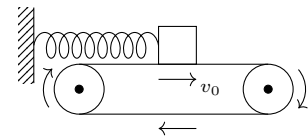
**696.** Z punktu  $A$  kondensatora cylindrycznego wylatuje lekko rozchodząca się wiązka jonów dodatnich. Kąt rozwarcia wiązki wynosi  $\alpha$  (rys. 1, 2). Wszystkie jony w wiązce mają taką samą energię. Jony, których prędkość w punkcie  $A$  jest prostopadła do odcinka  $OA$ , poruszają się po okręgu o promieniu  $r_0 = |OA|$ , współśrodkowym z okładkami kondensatora. Pokazać, że wiązka jonów ponownie zogniskuje się w pewnym punkcie  $B$ , i znaleźć kąt  $AOB$ . Wyznaczyć maksymalną szerokość wiązki.

**697.** W układzie przedstawionym na rysunku 3 oba bloczki nie obracają się, a nitki mogą ślizgać się po nich bez tarcia. Bloczek ruchomy jest nieważki, masy ciężarków są dane. Znaleźć przyspieszenie ciężarka o masie  $3m$ .

## Rozwiązania zadań z numeru 12/2019

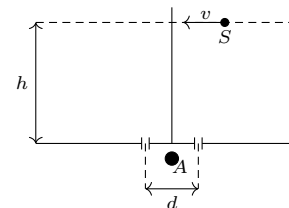
Przypominamy treść zadań:

**688.** Na nieruchomej taśmie transportera leży klocek o masie  $M$ , przyczepiony do ściany za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości  $k$  (rys. 4). Taśmę wprowadzono w ruch ze stałą prędkością  $v_0$  i po pewnym czasie ustaliły się drgania harmoniczne korka. Znaleźć czas, po którym to nastąpiło, oraz amplitudę ustalonych drgań. Współczynnik tarcia korka o taśmę jest równy  $\mu$ .



Rys. 4

**689.** Punktowe źródło światła  $S$  porusza się ruchem jednostajnym równoległe do ekranu, w którym znajdują się dwa małe otwory w odległości  $d = 2$  mm od siebie. Odległość źródła od ekranu wynosi  $h = 1$  m (rys. 5). Oświetlenie w punkcie  $A$  na osi układu zmienia się z częstotliwością  $f = 15$  Hz, długość fali świetlnej emitowanej przez źródło  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  m. Znaleźć prędkość źródła  $v$ . Podczas pomiarów oświetlenia źródło znajduje się w małej odległości od osi układu.



Rys. 5

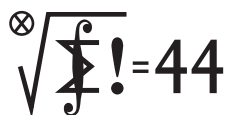
**688.** Po uruchomieniu taśmy na klocek działa siła tarcia  $T = \mu Mg$  oraz siła sprężystości  $F = -kx$ , gdzie  $x$  jest wydłużeniem sprężyny. Siły te równoważą się, gdy wydłużenie sprężyny osiąga wartość  $x_0 = \mu Mg/k$ . Musimy rozważyć dwa przypadki: 1) Klocek dojdzie do położenia równowagi z prędkością  $v_m \leq v_0$ ; 2) Klocek osiągnie prędkość taśmy, zanim dojdzie do położenia równowagi.

1) W pierwszym przypadku ruch korka jest analogiczny do ruchu ciężarka zawieszonoego na sprężynie w polu ciężkości. Rolę siły ciężkości odgrywa stała siła tarcia. Klocek od razu zaczyna drgać harmonicznym z amplitudą równą odległości początkowej  $x_0$  od położenia równowagi. Zależność wydłużenia sprężyny od czasu opisuje równanie  $x = \frac{\mu Mg}{k} (1 + \sin(\omega t + \varphi))$ , gdzie częstość drgań  $\omega = \sqrt{k/M}$ . Przesunięcie fazowe  $\varphi$  wyznaczamy z warunku początkowego  $x(0) = 0$  i otrzymujemy  $\varphi = -\pi/2$ . Zależność  $x = x_0 (1 - \cos \omega t)$  ilustruje rysunek 6. Prędkość korka opisuje równanie  $v = x_0 \omega \sin \omega t$ . Prędkość maksymalna w położeniu równowagi wynosi  $v_m = \mu g \sqrt{(M/k)}$ .

2) Drugi przypadek zachodzi, gdy  $v_m > v_0$ . Klocek osiąga prędkość taśmy po czasie  $t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin(v_0/x_0 \omega)$ . Tarcie staje się wtedy tarcie statycznym i równoważy siłę sprężystości. Klocek porusza się ruchem jednostajnym do chwili, gdy znajdzie się w położeniu równowagi, a tarcie ponownie osiągnie wartość  $\mu Mg$ . Od tego momentu tarcie pozostaje stałe, a klocek porusza się ruchem harmonicznym z taką samą częstością  $\omega$ , ale z inną amplitudą. Amplituda prędkości wynosi teraz  $v_0$  (z taką prędkością klocek przechodzi przez położenie równowagi), zatem amplituda drgań dana jest wzorem  $A = v_0/\omega = v_0 \sqrt{M/k}$ . Ustalone drgania rozpoczną się po czasie  $t = t_1 + (x_0 - x(t_1))/v_0$ . Ilustruje to rysunek 7.

**689.** Ponieważ  $h \gg d$ , różnica dróg promieni docierających ze źródła do punktu  $A$  po ugięciu na dwóch szczelinach wynosi  $d \sin \alpha$  (rys. 8). Maksimum oświetlenia rejestrujemy, gdy  $d \sin \alpha = k\lambda$ , gdzie  $k > 0$  jest liczbą całkowitą. Odległość źródła  $x_k$  od osi układu jest mała, możemy więc stosować przybliżenie małych kątów:  $\sin \alpha \approx x_k/h$ , stąd  $x_k = k\lambda h/d$ . Droga przebyta przez źródło w czasie równym okresowi zmian oświetlenia punktu  $A$  wynosi  $x_{k+1} - x_k = \lambda h/d = v/f$ . Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy  $v = 4,5 \cdot 10^{-3}$  m/s.

# Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2020

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 785 ( $WT = 1,70$ ) i 786 ( $WT = 1,22$ ) z numeru 9/2019

Krzysztof Kamiński	Pabianice	42,48
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Janusz Fiett	Warszawa	35,51
Mikołaj Pater	Opole	34,42
Paweł Burdzy	Warszawa	33,52
Zbigniew Skalik	Wrocław	32,95
Jakub Węgrecki	Kraków	32,16

## Zadania z matematyki nr 799, 800

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**799.** Czy da się tak uporządkować zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych, by otrzymać ciąg różnowartościowy, w którym każde dwa sąsiednie wyrazy albo różnią się o 2, albo jeden z nich jest dwukrotnością pozostałego?

**800.** Dla ustalonych liczb dodatnich  $a, b$  określamy funkcję  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( \exp\left(-\frac{a}{x} + 1\right) + \exp\left(-\frac{b}{x} + 1\right) \right).$$

- Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedna liczba  $L = L(a, b) > 0$ , dla której  $f(L) = 1$ , i że  $\min\{a, b\} \leq L(a, b) \leq \max\{a, b\}$ ; zatem liczba  $L(a, b)$  może być uważana za pewną średnią liczb  $a, b$ .
- Znaleźć, gdzie ta średnia wpisuje się w ciąg nierówności  $H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$  między średnimi: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną liczb  $a, b$ ?

Zadanie 800 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

## Rozwiązania zadań z numeru 12/2019

Przypominamy treść zadań:

**791.** Funkcja  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x+a) - \ln(x+b)} \quad (\text{stałe: } a > b > 0).$$

Wykazać, że ma ona asymptotę ukośną (przy  $x \rightarrow \infty$ ), i znaleźć równanie tej asymptoty.

**792.** Dane są liczby naturalne  $m, n$ , przy czym  $n$  jest liczbą nieparzystą, większą niż  $2m$ . Udowodnić, że liczba

$$m^n + (m+1)^n + \dots + (n-m)^n$$

jest podzielna przez  $n^2$ .

**791.** Ponieważ

$$\frac{1}{f(x)} = \ln \frac{x+a}{x+b} = \ln(1+t), \quad \text{gdzie } t = \frac{a-b}{x+b},$$

zaś zmienna pomocnicza  $t = \frac{a-b}{x+b}$  dąży do 0, gdy  $x \rightarrow \infty$ , zatem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{a-b-bt} \cdot \frac{1}{\ln(1+t)} = \frac{1}{a-b}.$$

Asymptotą ukośną może więc być jedynie prosta o współczynniku kierunkowym  $\frac{1}{a-b}$ ; wystarczy zatem, by następująca różnica miała skończoną granicę (przy  $x \rightarrow \infty$ , czyli  $t \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{x}{a-b} &= \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{a-b} \left( \frac{a-b}{t} - b \right) = \\ &= \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} + \frac{b}{a-b} = \\ &= \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \cdot \frac{t}{\ln(1+t)} + \frac{b}{a-b}. \end{aligned}$$

Gdy  $t \rightarrow 0$ , pierwszy z ilorazów (w ostatnim uzyskanym wyrażeniu) dąży do granicy  $1/2$  (bo  $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ ). Stąd wniosek,

że asymptotą (przy  $x \rightarrow \infty$ ) jest prosta o równaniu

$$y = \frac{x}{a-b} + \frac{1}{2} + \frac{b}{a-b} = \frac{2x+a+b}{2(a-b)}.$$

**792.** Rozważana suma ma parzystą liczbę składników. Parujemy: pierwszy z ostatnim, drugi z przedostatnim itd. Dostajemy sumę par postaci

$$A_j = \left(\frac{n+j}{2}\right)^n + \left(\frac{n-j}{2}\right)^n, \quad j = 1, 3, 5, \dots, n-2m.$$

Wystarczy pokazać, że każda z liczb  $A_j$  dzieli się przez  $n^2$ . W rozwinięciu dwumianowym

$$2^n A_j = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k (j^{n-k} + (-j)^{n-k})$$

składniki odpowiadające indeksom  $k \geq 2$  są podzielne przez  $n^2$ ; skoro zaś  $n$  jest liczbą nieparzystą, dwa składniki początkowe dają w sumie

$$(j^n + (-j)^n) + n \cdot n \cdot (j^{n-1} + (-j)^{n-1}) = n^2 \cdot 2j^{n-1}.$$

Tak więc  $2^n A_j$  dzieli się przez  $n^2$ . Korzystając jeszcze raz z nieparzystości  $n$ , wnosimy, że  $A_j$  dzieli się przez  $n^2$ .

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Prosto z nieba: „Niemożliwa” czarna dziura

Czarne dziury to najbardziej zwarte „obiekty” znane astrofizycznym obserwacjom; cudzysłów częściowo tłumaczy fakt, że czarna dziura nie jest obiektem materialnym, ale regionem czasoprzestrzeni zakrzywiającym się pod wpływem własnego zakrzywienia. Grawitacja w teorii względności pochodzi z zakrzywienia czasoprzestrzeni, w której poruszają się (również zakrzywiające czasoprzestrzeń) masy. Nawet niematerialny obiekt, taki jak czarna dziura, ma zatem masę, ściśle związaną z wywoływaną przez nią krzywizną. Masa (dla uproszczenia, nierotującej) czarnej dziury  $M$  ma się następująco do promienia horyzontu, otaczającego obszar, z którego prędkość ucieczki jest większa od prędkości światła:  $R = 2GM/c^2$ .

Czarna dziura o masie Słońca miałaby promień około 2,95 km, czarna dziura o masie Ziemi zaś jedynie około 1 cm (największa znana w naszej Galaktyce czarna dziura Sgr A\* o masie  $M \simeq 4 \cdot 10^6 M_\odot$  jest natomiast około 17 razy większa od Słońca, czyli z zapasem zmieściłaby się wewnątrz orbity Merkurego).

Astronomowie obserwują różne rodzaje czarnych dziur – od lekkich, o masach kilku mas Słońca, do bardzo masywnych (rzędu miliardów  $M_\odot$ ), przy których nasza Sgr A\* wydaje się karzełkiem. Bardzo masywne czarne dziury powstały najprawdopodobniej we wczesnym Wszechświecie, przed lub podczas epoki tworzenia się galaktyk, a później tylko przybierały na masie, akreując okoliczną materię i gwiazdy. Procesy tego typu obserwujemy w wielu aktywnych jądrach galaktyk (*Active Galactic Nuclei*, AGN), ponieważ spadająca na czarną dziurę materia rozgrzewa się i świeci w szerokim widmie promieniowania elektromagnetycznego. Małomasywne czarne dziury powstają natomiast podczas końcowych etapów ewolucji gwiazd. Zaawansowana ewolucyjnie masywna gwiazda czerpiąca energię z procesu fuzji lekkich pierwiastków w coraz cięższe w końcu zapada się „pod własnym ciężarem”, gdy reakcje fuzji dochodzą w jej wnętrzu do pierwiastków żelaza i niklu, których łączenie w jeszcze cięższe nie daje zysku energetycznego.

Żelazo ma największą energię wiązania na nukleon i tworzy najbardziej stabilne jądra atomowe. By uzyskać energię, jądra cięższe od żelaza, np. uran, rozszczepia się na mniejsze w elektrowniach atomowych.

Proces zapadania się i późniejszej eksplozji masywnej gwiazdy nazywamy *supernową* typu II (typ I to wybuchające białe karły, czyli gwiazdy nieco tylko masywniejsze od Słońca).

Teoria supernowych przewiduje tworzenie się czarnych dziur z gwiazd o masie początkowej mniejszej od około  $130 M_\odot$ . Różne procesy związane ze składem chemicznym takich gwiazd – aspekty, które astronomowie

określają metalicznością, wpływające m.in. na tempo utraty masy podczas życia gwiazdy w tzw. wiatrach gwiazdowych – powodują, że końcowym produktem ewolucji jest czarna dziura o maksymalnej masie około  $60 M_\odot$ . Gwiazdy masywniejsze od około  $130 M_\odot$  również wybuchają jako supernowe, jednak mechanizm prowadzący do eksplozji jest inny, a dodatkowo – przynajmniej według dotychczasowych teorii – nie prowadzi do utworzenia czarnej dziury. Takie supernowe, powstające z powodu *niestabilności kreacji par* (*pair-instability supernova*), są możliwe dzięki utracie stabilności wywołanej tworzeniem się w ich gorącym wnętrzu par elektron-pozyton z energetycznych fotonów gamma.

Fotony tworzą pary  $e^+e^-$ , gdy ich energia przekroczy sumę dwóch mas spoczynkowych cząstek, 511 keV każda.

Jako że cała energia fotonu jest przeznaczana na masy spoczynkowe pary cząstka-antycząstka, nie posiadają one znaczącej energii kinetycznej, czyli nie są dobrym źródłem ciśnienia, co prowadzi do katastroficznego kolapsu.

Reasumując, w zasadzie nie spodziewaliśmy się więc obserwacji bardzo masywnych, jak na gwiazdowe standardy, czarnych dziur – niestabilność par w gwiazdach hiperolbrzymach skutkuje „przerwą masową” w produkcji czarnych dziur w przedziale mas od około 60 do około  $120 M_\odot$ .

Co prawda od pewnego czasu krążą też pogłoski o wiosennej detekcji przez zespoły LIGO i Virgo fal grawitacyjnych z bardzo masywnego i bardzo odległego układu czarnych dziur, ale o niej napiszemy szczegółowo przy innej okazji.

Astronomowie elektromagnetyczni dostarczają jednak niezwykle ciekawych obserwacji pewnego galaktycznego układu podwójnego metodami tradycyjnymi, czyli mierząc krzywe prędkości radialnych świecącego składnika (za wykorzystanie tej metody do detekcji planet przyznano w 2019 roku Nagrodę Nobla). Układ LB-1 składa się z gwiazdy typu B oraz niewidocznego towarzysza o masie praktycznie w „przerwie masowej”:  $68^{+11}_{-13} M_\odot$ . Nieświecący obiekt o takiej masie może być tylko czarną dziurą. Jeśli te pomiary się potwierdzą, do wyjaśnienia pozostanie, jak wyprodukować tak ciężkie czarne dziury: tworzenie się ich wprost z gwiazd w środowisku o wysokiej metaliczności jest niezwykle trudne w ramach obecnych teorii ewolucji gwiazd.

Michał BEJGER

Liu, J., Zhang, H., Howard, A.W. et al. *A wide star-black-hole binary system from radial-velocity measurements*. „Nature” 575, 618–621 (2019).

## Niebo w kwietniu

Po marcowej zmianie czasu na letni Słońce w kwietniu zachodzi późno, pod koniec miesiąca już po godzinie 20, a pojawia się ponownie na nieboskłonie wyraźnie przed godziną 6. W trakcie tego miesiąca Słońce zwiększa wysokość górowania o  $10^\circ$ , pokonując w tym czasie odcinek ekliptyki od środka gwiazdozbioru Ryb do środka gwiazdozbioru Barana, zaś czas jego przebywania nad horyzontem zwiększa się do prawie 15 godzin.

Księżyc zacznie miesiąc od I kwadry w Bliźniętach 1 dnia miesiąca, 8 kwietnia przejdzie przez pełnię w Pannie, 14 kwietnia – przez ostatnią kwadrę w Strzelcu, 23 kwietnia – przez nów w Wielorybie, natomiast 30 kwietnia Srebrny Glob ponownie pokaże tarczę oświetloną dokładnie w połowie, tym razem na tle gwiazdozbioru Raka. Oznacza to, że na ciemne noce można liczyć w drugiej części miesiąca.



Jak zawsze na wiosnę, nachylenie ekliptyki w kwietniu jest korzystne wieczorem i niekorzystne rano. Naturalny satelita Ziemi zginie w zorzy porannej już kilka dni przed nowiem, zwłaszcza że znajdzie się wtedy bardzo daleko na południe od ekliptyki. Obniży to dodatkowo położenie Księżyca nad widnokregiem i spowoduje, że po ostatniej kwadrze czas jego wschodu szybko zbliży się do czasu wschodu Słońca, mimo wciąż sporej odległości kątowej od niego. Co innego na niebie wieczornym. Już 24 kwietnia, 40 godzin po nowiu, Księżyc na początku zmierzchu cywilnego (Słońce  $6^\circ$  pod horyzontem, około godz. 20:30) znajdzie się na wysokości przekraczającej  $6^\circ$  i jego sierp w fazie 2% powinno dać się dostrzec bez kłopotów, a w kolejnych dniach szybko powędruje on w górę.

Nów Księżyca, 23 kwietnia, zbiega się w tym roku z maksimum aktywności corocznego roju meteorów Lirydów, dzięki temu obserwacje tego roju może popsuć już tylko pogoda. **Lirydy** pochodzą z resztek pozostawionych przez kometę C/1861 G1 (Thatcher) i promieniają od 14 do 30 kwietnia, z maksimum aktywności około 22 kwietnia. Są to dość szybkie meteory, ich prędkość zderzenia z naszą atmosferą wynosi 49 km/s i w okolicach maksimum można się spodziewać mniej więcej 20 meteorów na godzinę. Radiant roju, wbrew jego nazwie, znajduje się na tle gwiazdozbioru Herkulesa, jakieś  $8^\circ$  na południowy zachód od Wegi, najjaśniejszej gwiazdy Lutni. Na początku nocy astronomicznej (godz. 22:30) radiant wznosi się na wysokość  $25^\circ$ . Koniec nocy astronomicznej następuje około godziny 3, co oznacza, że mamy mniej więcej 5 godzin dobrych warunków obserwacyjnych Lirydów.

Ozdobą wieczornego nieba jest planeta **Wenus**, która w marcu osiągnęła swoją maksymalną elongację wschodnią. Do końca kwietnia jej odległość od Słońca zmniejszy się niewiele, od  $46$  do  $38^\circ$ , zmaleje też faza tarczy planety, z  $47$  do  $25\%$ . Urośnie za to jasność (z  $-4,4$  do  $-4,5^m$ ) oraz średnica tarczy, z  $26$  do  $39''$ . Tarcza Wenus staje się coraz atrakcyjniejszym celem dla posiadaczy teleskopów, a nawet lornetek. 26 kwietnia ponad  $6^\circ$  na południe od planety przejdzie Księżyc w fazie 12%. Jednak największą atrakcją związaną z Wenus w kwietniu jest jej przejście przez jasną gromadę otwartą gwiazd Plejady. Niestety planeta ominie najjaśniejsze gwiazdy gromady, 3 kwietnia wieczorem dotrze na  $11'$  do gwiazdy Merope, zaś do późnej pory pokaże się już niecałe  $20'$  na wschód od gwiazd Atlas i Plejone, czyli najbardziej na wschód wysuniętych gwiazd Plejad. W tym okresie blask Wenus mogą przyćmić gwiazdy Plejad i wystąpić trudności z dostrzeżeniem gromady gołym okiem. Wenus powędruje dalej i w połowie miesiąca minie Aldebarana w odległości  $10^\circ$ , a ostatni dzień miesiąca zastanie ją  $4^\circ$  na zachód od gwiazdy El Nath, czyli drugiej co do jasności gwiazdy Byka, stanowiącej północny róg zodiakalnego zwierzęcia. Wenus 28 kwietnia osiągnie maksymalną jasność tej wiosny.

W kwietniu poprawi się widoczność trzech łatwo widocznych gołym okiem planet zewnętrznych, czyli **Marsa**, **Jowisza** i **Saturna**. Wszystkie one powoli zmierzają do tegorocznych opozycji i zwiększają swoją jasność

oraz rozmiary kątowe. Z upływem czasu wszystkie planety wschodzą coraz wcześniej i docierają wyżej nad widnokrąg. Miesiąc zacznie się bliskim spotkaniem Marsa z Saturnem. Odległość między nimi zmniejszy się do  $1^\circ$ . Niecałe  $7^\circ$  na zachód obu planetom towarzyszą dotrzyma planeta Jowisz. Choć odległość między nimi będzie niewielka, to znajdą się one w innych gwiazdozbiorach: Jowisz – w Strzelcu, Mars z Saturnem – w Koziorożcu. Do końca miesiąca dystans między Jowiszem a Saturnem zmniejszy się do  $5^\circ$ , natomiast Mars powędruje na północny wschód i oddali się od Saturna na prawie  $20^\circ$ . Jednocześnie zbliży się do gwiazdy Nashira ( $\gamma$  Cap) na  $1,5^\circ$ . W tym czasie jasność Jowisza urośnie z  $-2,1$  do  $-2,3^m$ , a jego tarcza zwiększy średnicę z  $37$  do  $41''$ . Mars zwiększy blask z  $+0,8$  do  $+0,4^m$  i średnicę tarczy z  $6$  do  $7''$ . Najmniej zmieni się wygląd Saturna. Blask szóstej planety Układu Słonecznego urośnie z  $+0,7$  do  $+0,6^m$ , a średnica jej tarczy urośnie z  $16$  do  $17''$ . Księżyc spotka się z trzema planetami w drugiej połowie miesiąca w okolicach ostatniej kwadry. Najpierw 15 kwietnia, mając fazę 48%, przejdzie  $3^\circ$  na południe od Jowisza i Saturna, a następnego ranka jego tarcza oświetlona w 38% minie Marsa w odległości  $3^\circ$ .

Kwiecień to najlepszy miesiąc do obserwowania obiektów poza Drogą Mleczną. W tym miesiącu północny biegun galaktyczny, znajdujący się w gwiazdozbiorze Warkocza Bereniki, jakieś  $6^\circ$  na wschód od jasnej, widocznej gołym okiem gromady otwartej gwiazd Melotte 111 i jednocześnie  $10^\circ$  na południe od gwiazdy Serce Karola, najjaśniejszej gwiazdy Psów Gończych, góruje około północy, a pas Drogi Mlecznej zajmuje północną część nieboskłonu. W kierunku bieguna galaktycznego warstwa obecnego w Drodze Mlecznej, pochłaniającego światło odległych obiektów, gazu i pyłu jest najmniejsza, stąd też w sąsiadującym z biegunem galaktycznym obszarze nieba liczba widocznych galaktyk jest bardzo duża. Dostrzeżenie najjaśniejszych z nich umożliwia już niezbyt duży teleskop i ciemne bezksiężycowe niebo. W rejonie od gwiazdozbioru Panny na południu poprzez Warkocz Bereniki, Psy Gończe do Wielkiej Niedźwiedzicy na północy wystarczy niemal gdziekolwiek skierować teleskop, by natknąć się na jakąś galaktykę.

Drugim bardzo dobrym miesiącem na obserwacje obiektów pozagalaktycznych jest październik, gdy około północy góruje południowy biegun Galaktyki, znajdujący się na tle gwiazdozbioru Rzeźbiarza, jakieś  $9^\circ$  na południe od jasnej gwiazdy Deneb Kaitos, czyli  $\beta$  Ceti, i  $2^\circ$  od jasnej galaktyki NGC 253. Jednak na wysokich północnych szerokościach geograficznych ów biegun góruje na małej wysokości i sporo galaktyk znajduje się stale pod horyzontem, a pozostałe są nisko i ich obraz jest silnie zaburzany przez atmosferę Ziemi. Dlatego jesień jest sezonem polowania na galaktyki dla mieszkańców półkuli południowej. To tłumaczy też, dlaczego w Katalogu Messiera jest mnóstwo obiektów z okolic północnego bieguna galaktycznego, a z okolic bieguna południowego nie ma ich wcale. Nie znalazła się w Katalogu nawet NGC 253, o jasności  $+8^m$ , znana jako Galaktyka Rzeźbiarza.

Ariel MAJCHER

## Wleczeni w czasoprzestrzeni

Zgodnie z obecnym stanem wiedzy (czyli ogólną teorią względności) otaczająca nas przestrzeń, ale także tempo wpływu czasu zmieniają się zależnie od obecności i ruchu znajdujących się w pobliżu mas. Czasoprzestrzeń rzeczywiście istnieje jako autonomiczny „obiekt”, który marszczy się i wygina (co wiemy z obserwacji fal grawitacyjnych), a także jest „ciągnięta” bądź „wleczone” zgodnie z ruchem obrotowym masywnego ciała.

Ideę, że wirujące masywne ciało wywiera na otoczenie nie tylko statyczną (newtonowską) siłę grawitacji, ale dodatkowo może, podobnie jak wir w wodzie, wlec otaczające je cząstki testowe (w technicznym żargonie – układy inercjalne), sformułował w 1872 roku Ernst Mach. Koncepcja powstała w kontekście pochodzenia zjawiska bezwładności, czyli eksperymentu Izaaka Newtona z rotującym wiadrzem pełnym wody, i jej odkształcającą się powierzchnią. Czy ruch jest w swojej istocie *absolutny*, czy też zawsze jest zdefiniowany *względem czegoś*? Według Macha fakt, że ciało zachowuje stałą prędkość w przestrzeni, jest stwierdzeniem jego oddziaływania z całym Wszechświatem. Rozważania Macha były bezpośrednią inspiracją dla następnych pokoleń fizyków, w tym także Alberta Einsteina. Przed nim, pod koniec XIX wieku, Benedict i Immanuel Friedlaenderowie przeprowadzili (nieudany) eksperyment z rotującym masywnym walcem, badając wpływ rotacji na zawieszony ponad nim wahadło. Natomiast w 1904 roku August Föppl badał zachowanie się masywnego żyroskopu, wirującego z częstotliwością podobną do bębna pralki na najwyższych obrotach (2300 rpm) – źródłem wleczenia była w tym przypadku cała Ziemia. Föppl otrzymał, że efekt jest mniejszy niż 2% prędkości kątowej Ziemi. Z ogólnej teorii względności (formuła (\*)) wiemy, że wymagana dokładność eksperymentalna powinna być lepsza niż  $10^{-9}$  (odpowiadając stosunkowi promienia Schwarzschilda Ziemi,  $2GM_{\oplus}/c^2 \approx 9$  mm, do jej promienia  $R_{\oplus} \approx 6370$  km), co było (i jest) całkowicie poza zasięgiem tego typu naziemnej aparatury.

Sytuacja zmieniła się dzięki Albertowi Einsteinowi, gdy wraz z Michele Besso i Marcelem Grossmannem zaczął uzgadniać mechanikę newtonowską ze szczególną teorią względności. Podczas różnych prób z protoplastami relatywistycznej teorii grawitacji odkryli oni m.in. zjawisko liniowego wleczenia układów inercyjnych wewnątrz liniowo przyspieszonej masywnej skorupy, a także poprawki do przyspieszenia Coriolisa w obracającej się kulistej masywnej skorupie (siłę o wartości połowy poprawnej wartości w ogólnej teorii).

W dzisiejszej literaturze wleczenie układów inercjalnych nosi nazwę efektu Lensego–Thirringa, jednak istotne prace zostały wykonane przez Einsteina. W 1917 roku Hans Thirring podczas swoich badań wpływu rotacji masy w ogólnej teorii względności kluczowe wskazówki dotyczące przyspieszenia Coriolisa zdobył dzięki wymianie listów z Einsteinem. W odległości  $r$  od

obracającego się z częstością  $\omega$  masywnego ciała o promieniu  $R$  i masie  $M$ , dla  $r/R \gg 1$  i prędkości  $\vec{v}$  układu inercjalnego przyspieszenie to ma dodatkową składową

$$(*) \quad \vec{v} \times \left( \vec{\omega} - 3 \frac{(\vec{\omega} \vec{r}) \vec{r}}{r^2} \right) \frac{4MGR^2}{5c^2 r^3}.$$

Opracowanie astronomicznego zastosowania tych wyników zawdzięczamy Josefowi Lensemu.

Na przełomie lat 50. i 60. XX wieku George Pugh i Leonard Schiff niezależnie zaproponowali eksperyment z żyroskopem umieszczonym w satelicie okrążającym Ziemię po orbicie polarnej. Realizacją pomysłu była sonda Gravity Probe B wysłana w 2004 roku – udało się jej zmierzyć dużo większy od efektu Lensego–Thirringa efekt geodetyczny (efekt de Sittera, związany z krzywizną czasoprzestrzeni), natomiast wyniki dotyczące wleczenia czasoprzestrzeni okazały się z przyczyn technicznych za mało dokładne, a przez to niekonkluzywne.

To oczywiście nie zraża astronomów, którzy dalej poszukują w Kosmosie efektu Lensego–Thirringa. Niedawna publikacja międzynarodowego zespołu astrofizyków, m.in. z OzGrav w Australii i Instytutu Radioastronomii Maksa Plancka w Niemczech, dostarcza nowych, ekscytujących dowodów na istnienie tego subtelnego zjawiska. Wyniki zostały zdobyte dzięki wieloletniemu monitorowaniu ewolucji orbity układu podwójnego o nazwie PSR J1141-6545, składającego się z białego karła i pulsara. Układ zmienia się inaczej, niż to przewidują prawa mechaniki Newtona, wykazuje za to wiele klasycznych efektów przewidywanych przez teorię Einsteina. Można to stwierdzić z wielką dokładnością, ponieważ w układzie znajduje się bardzo dokładny zegar, czyli emitująca niezwykle regularne pulsy radiowe gwiazda neutronowa z silnym polem magnetycznym. Właśnie dzięki analizie momentów nadchodzenia pulsów, zbieranych przez wiele lat, można precyzyjnie zbadać niewielkie efekty post-newtonowskie. Zjawiskiem, które świadczy o wleczeniu czasoprzestrzeni wywoływanym przez rotację białego karła jest stopniowa zmiana nachylenia płaszczyzny orbity (precesja) względem kierunku obserwacji. Autorzy argumentują, że dzięki rotacji karła sumują się wpływy newtonowskiego momentu kwadrupolowego i efektu Lensego–Thirringa właśnie. Są obserwowalne, ponieważ biały karzeł rotuje wokół swojej osi wyjątkowo szybko: przed wybuchem towarzyszącej mu gwiazdy, której jądro stało się później pulsarem-gwiazdą neutronową (około milion lat temu), otaczająca ją materia spadała przez pewien czas na białego karła, zwiększając jego tempo rotacji do obecnego okresu mniejszego od 200 sekund.

Michał BEJGER

H. Pfister, 2007, „On the history of the so-called Lense-Thirring effect”, *General Relativity and Gravitation*, 39, 1735.

V. V. Krishnan, M. Bailes, W. van Straten et al. 2020, „Lense-Thirring frame dragging induced by a fast-rotating white dwarf in a binary pulsar system”, *Science*, 367, 577.



# Zera zmieniają jednostkę w miliony

Bartłomiej BZDEGA

Liczbę całkowitą dodatnią  $(k + 1)$ -cyfrową  $n$  możemy zapisać w postaci

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_k \cdot 10^k$$

(kreska nad wyrażeniem informuje, iż nie jest to po prostu mnożenie). Liczbę  $n$  możemy oszacować, znając jej pierwszą cyfrę oraz liczbę cyfr. Zachodzą oczywiste nierówności:

$$a_k \cdot 10^k \leq n < (a_k + 1) \cdot 10^k,$$

z których warto skorzystać w zadaniach 1, 3, 9 i 10.

Przez  $S(n)$  oznaczamy sumę cyfr liczby  $n$ . Zauważmy, że liczba

$$n - S(n) = 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \dots + 99 \dots 9a_k$$

dzieli się przez 9, zatem suma cyfr liczby naturalnej daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, co ta liczba. Tego faktu używamy w zadaniach 1, 2, 4, 5 i 9.

Dzięki algorytmowi pisemnego dodawania mamy nierówność

$$S(m + n) \leq S(m) + S(n),$$

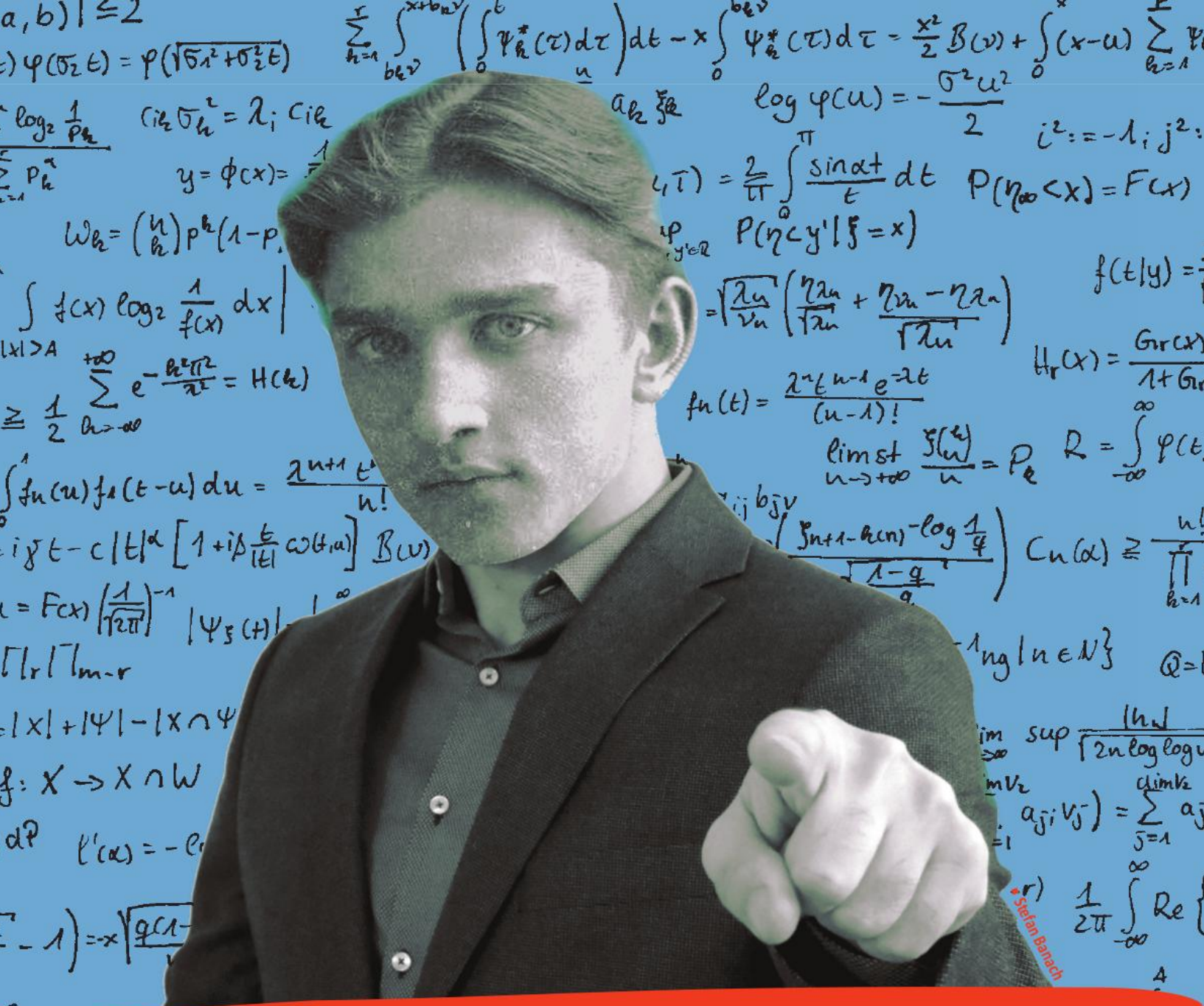
która jest pomocna w zadaniach 6, 7 i 8.

Na koniec przypomnimy o pewnej własności dzielenia z resztą, która jest w poniższych zadaniach pomocna: iloczyn liczb całkowitych daje taką samą resztę z dzielenia przez  $d$ , co iloczyn ich reszt z dzielenia przez  $d$ . Dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

**Zadania.** (W każdym zadaniu  $S(n)$  oznacza sumę cyfr liczby  $n$ .)

1. Rozważmy wszystkie liczby siedmiocyfrowe, w których każda z cyfr  $1, 2, \dots, 7$  występuje dokładnie raz. Udowodnić, że żadna z tych liczb nie jest dzielnikiem innej.
2. Spośród liczb siedmiocyfrowych określonych w poprzednim zadaniu wybierzmy trzy, niekoniecznie różne. Czy ich suma może być kwadratem liczby naturalnej?
3. W zapisie dziesiętnym pewnej dodatniej liczby całkowitej  $n$  nie występuje żadna z cyfr  $1, 2, 9$ . Udowodnić, że w zapisie dziesiętnym liczby  $3n$  występuje co najmniej jedna z tych cyfr.
4. W zapisie dziesiętnym liczby  $2^{29}$  jest dziewięć cyfr, każda inna. Wiedząc to, bez obliczania  $2^{29}$  wyznaczyć cyfrę, która w tej liczbie nie występuje.
5. Dowiedzieć, że  $S(2n^2 + 3)$  nie jest kwadratem liczby całkowitej dla żadnego naturalnego  $n$ .
6. Wykazać, że dla liczb całkowitych dodatnich  $m$  i  $n$  zachodzi nierówność  $S(mn) \leq S(m)S(n)$ .
7. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie  $n$ , które spełniają równość  $S(11^n) = 2^n$ .
8. Wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość wyrażenia  $\frac{S(2n)}{S(n)}$  dla całkowitych dodatnich  $n$ .
9. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba naturalna mniejsza od iloczynu swoich cyfr w zapisie dziesiętnym.
10. Dla pewnego całkowitego dodatniego  $n$  liczby  $2^n$  i  $5^n$  mają taką samą pierwszą cyfrę. Wykazać, że tą cyfrą jest 3.
11. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych  $n$ , dla których  $S(3^{n+1}) \leq S(3^n)$ .

**Wskazówki do zadań**  
 1. Wybierzmy liczbę  $a$  i  $b$  spośród danych w zadaniu. Mamy  $\frac{a}{b} \in \{1, 2, \dots, 7\}$ .  $b \mid a$ , to niech  $k = \frac{a}{b} \in \{1, 2, \dots, 7\}$ . Wówczas  $a = bk$ . Teraz trzeba zauważyć, że liczby  $a$  i  $b$  dają resztę 1 z dzielenia przez 9, co wymusza  $k = 1$ .  
 2. Suma trzech takich liczb daje resztę 3 z dzielenia przez 9. Wobec tego dzieli się ona przez 3, ale nie przez 9.  
 3. Niech liczba z zadania będzie  $(k + 1) \cdot 10^k$ . Wystarczy teraz wykazać, że jeśli liczba  $3n$  ma tyle samo cyfr co  $n$ , to jej pierwszą cyfrą jest 9, a jeśli ma o jedną cyfrę więcej, to jej pierwszą cyfrą jest 1 lub 2.  
 4. Jeśli  $x$  jest brakującą cyfrą, to suma cyfr liczby  $2^{29}$  wynosi  $1 + 2 + \dots + 9 - x$ . Zauważmy, że liczba  $2^6$  daje resztę 1 z dzielenia przez 9, więc liczba  $2^{29} = (2^6)^4 \cdot 2^5$  daje resztę 5 z dzielenia przez 9. Wystarczy porównać obie reszty.  
 5. Kwadrat liczby naturalnej może dawać resztę z dzielenia przez 9 równą 0, 1, 4 lub 7. Liczba  $S(2n^2 + 3)$  daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, co  $2n^2 + 3$ .  
 6. Zapisując  $n = \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i$ , otrzymamy  $S(n) = \sum_{i=0}^k a_i$ .  
 7. Liczba  $S(2n^2 + 3) = S(2n^2) + 3$ .  
 8. Można użyć następujących oszacowań:  $\frac{S(n)}{S(2n)} \leq \frac{S(n)}{S(n) + S(n)} = \frac{1}{2}$ .  
 9. Rozważmy liczbę  $(k + 1) \cdot 10^k$  oraz  $n$  o pierwszej cyfrze  $a$ . Iloczyn cyfr liczby  $n$  nie przekracza  $a \cdot 9^k$ , natomiast  $n \geq a \cdot 10^k$ . Taką liczbę nie istnieje.  
 10. Niech  $c$  będzie pierwszą cyfrą  $2^n$  i  $5^n$ . Zapiszmy  $c \cdot 10^k > 2^n > (c + 1) \cdot 10^k$ . Mnożąc te dwie nierówności, otrzymamy  $c^2 \cdot 10^{k+l} > 10^{n+l} > (c + 1)^2 \cdot 10^{k+l}$ , z czego wnioskujemy, że  $k + l = n - 1$  i w konsekwencji  $c = 3$ .  
 11. Przyjmując, że nierówność  $S(3^{n+1}) \leq S(3^n)$  zachodzi tylko dla skónczonej liczby  $n$ , wtedy istnieje takie  $N$ , że dla wszystkich  $n \geq N$  mamy  $S(3^{n+1}) > S(3^n)$ .  
 Wszystkie powyższe zadania są z drugiej strony, więc liczba  $3^n$  ma co najwyżej  $2/3$  cyfr.



# WE WANT YOU!



## WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I MECHANIKI UNIwersytetu Warszawskiego

zaprasza na kierunki:

- Matematyka
- Informatyka
- Bioinformatyka i biologia systemów
- Międzykierunkowe Studia Ekonomiczno-Matematyczne
- Jednoczesne Studia Informatyczno-Matematyczne

[www.mimuw.edu.pl/rekrutacja](http://www.mimuw.edu.pl/rekrutacja)

