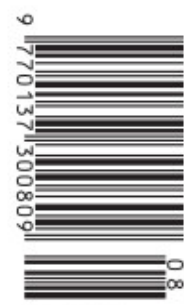




$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$  ;  $\lambda = \frac{h}{p}$  ;  $\tau = 3,141592 \dots$

**NR 8 (531) 2018**  
CENA 4 ZŁ VAT 5%  
PL ISSN 1197-3005 | NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK  
[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

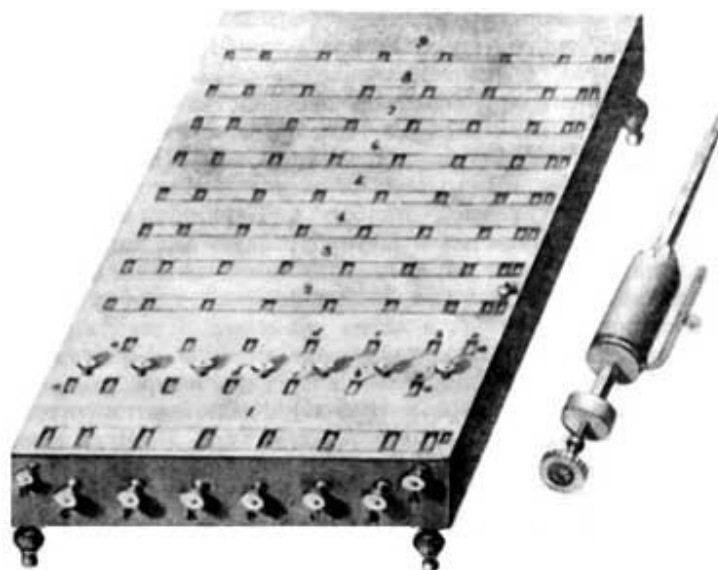
MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA



Nakład: 3500 egz.

WAKACYJNA LEKTURA  
DO CZYTANIA NA WODZIE,  
NA PLAŻY I W LESIE  
**Geometria**  
Bolyaia-Lobaczewskiego  
str. 9

W następnym numerze opisujemy maszynę Słonimskiego.



## SPIS TREŚCI NUMERU 8 (531)

Krzywe eliptyczne  
 w kryptografii  
*Tomasz Kazana* str. 1

Wyniki XXXV  
 Ogólnopolskiego Sejmiku  
 Matematyków,  
 Szczyrk, 14–17 VI 2018 str. 3

Problemy sztucznej grawitacji  
*Szymon Charzyński* str. 3

Wyniki XXXV  
 Ogólnopolskiego Sejmiku  
 Matematyków,  
 Szczyrk, 14–17 VI 2018 str. 6

Problemy sztucznej grawitacji  
*Szymon Charzyński* str. 6

1, 2, 3, 4, ...  
*Kamila Łyczek* str. 6

 **Zadania** str. 7

 **Zajrzeć głębiej**  
*Magdalena Fikus* str. 8

Geometria  
 Bolyaia–Łobaczewskiego –  
 co to jest i jak ją poznawać  
*Marek Kordos* str. 9

Informatyczny kącik  
 olimpijski (118):  
*Piramida liczbowa i Żabka* str. 17


Przyszłość sztucznej  
 inteligencji  
*Paweł Wawrzyński* str. 18

Klub 44 str. 20

Prosto z nieba:  
 Łódź na Księżycu str. 22

Niebo w sierpniu str. 22

Aktualności  
 O krowach w polu  
 (magnetycznym) str. 24

 **Środkowe i pola**  
*Joanna Jaszurńska* str. 25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik.

Adres do korespondencji:  
 Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
 e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216, p. 101, 01-460 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2018 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

str. 24 Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl) lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>.  
 str. 25 Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# Krzywe eliptyczne w kryptografii

Tomasz KAZANA

## 1. Bestiariusz algebraika

Wybermy i ustalmy sobie jakąś liczbę pierwszą  $p$ , na przykład 13. Na początku będziemy zajmować się zbiorem:

$$\mathbb{F}_{13} = \{0, 1, 2, \dots, 12\} \text{ (ogólniej: } \mathbb{F}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\} \text{)}.$$

W tym zbiorze wykonywać będziemy działania dodawania i mnożenia, ale nie klasycznie, lecz zgodnie z arytmetyką *modulo*, czyli po prostu reszt z dzielenia. To znaczy, w naszym świecie będziemy mieli:

$$5 + 10 = 2 \text{ czy } 4 \cdot 7 = 2.$$

Co ciekawe, w tak dziwacznej strukturze zaskakująco wiele własności zwykłych liczb rzeczywistych jest zachowanych. Znałe jeszcze ze szkoły podstawowej prawa łączności, przemienności czy rozdzielności mnożenia względem dodawania są prawdziwe także w  $\mathbb{F}_{13}$  z działaniami *modulo*. Możemy nawet sensownie określić odejmowanie i dzielenie jako operacje odwrotne do (odpowiednio) dodawania i mnożenia. Przykładowo okreśmy:

$$a : b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } b \cdot x = a.$$

Możemy łatwo sprawdzić, że – przy powyższej definicji – zachodzi  $8 : 3 = 7$  czy  $7 : 5 = 4$ . Więcej, okazuje się, że jeśli tylko nie próbujemy dzielić przez 0, to wynik zawsze istnieje i to jednoznaczny.

Pójdźmy krok dalej i zacznijmy badać równania w świecie  $\mathbb{F}_{13}$ . Zapytajmy chociażby o rozwiązania następującego równania kwadratowego:

$$x^2 + 3x + 8 = 0.$$

Możemy sprawdzić, że rozwiązania są dokładnie dwa: 3 oraz 7. Ba, działają nawet klasyczne wzory z *delta*, o ile tylko określimy sensownie *pierwiastkowanie modulo*.

Oczywiście, ma sens pytanie o zbiory, których definicja kojarzy nam się z obiektami klasycznej geometrii. Chociażby popatrzmy na zbiór:

$$O = \{(x, y) \in \mathbb{F}_{13} \times \mathbb{F}_{13} \mid x^2 + y^2 = 9\}.$$

Możemy po prostu obliczyć, że

$$O = \{(0, 3), (0, 10), (3, 0), (5, 6), (5, 7), (6, 5), (6, 8), (7, 5), (7, 8), (8, 6), (8, 7), (10, 0)\},$$

a otrzymany zbiór  $O$  nazwać *okręgiem nad  $\mathbb{F}_{13}$* , choć to przecież żaden prawdziwy okrąg, a tylko 12 punktów iloczynu kartezjańskiego  $\mathbb{F}_{13} \times \mathbb{F}_{13}$ . Niemniej tego typu obiekty są bardzo użyteczne i intensywnie badane przez dziedzinę matematyki zwaną *geometrią algebraiczną*. W tym artykule chcemy przybliżyć przykład takiego obiektu – tak zwane krzywe eliptyczne, czyli punkty spełniające równanie:

$$K_{\mathbb{F}_{13}} = \{(x, y) \in \mathbb{F}_{13} \times \mathbb{F}_{13} \mid y^2 = x^3 + ax + b\},$$

dla pewnych ustalonych  $a, b \in \mathbb{F}_{13}$ .

Zanim powrócimy do właśnie przedstawionych krzywych eliptycznych nad ciałem  $\mathbb{F}_{13}$ , przyjrzyjmy się jeszcze ich rzeczywistym odpowiednikom, tzn. krzywymi typu

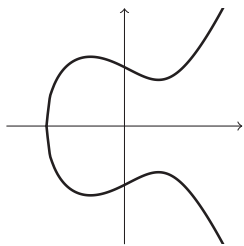
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x^3 + ax + b\},$$

( $a, b \in \mathbb{R}$ ), których przykład możemy obejrzieć na rysunku 1. Udziwnijmy świat punktów tej krzywej. Dorzućmy do  $K$  jeden nowy punkt specjalny:  $\infty$  (nieskończoność), a w powstałym zbiorze  $\bar{K} = K \cup \{\infty\}$  zdefiniujmy następujące dodawanie punktów (tzn. pewną operację  $+$ :  $\bar{K} \times \bar{K} \rightarrow \bar{K}$ ):

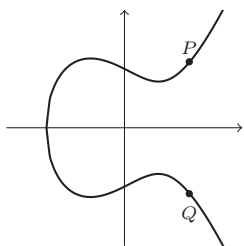
- dla dowolnego  $P \in \bar{K}$  mamy  $P + \infty = \infty + P = P$ ;
- Jeśli dwa różne punkty  $P, Q \in K$  mają tę samą pierwszą współrzędną (jak na rysunku 2), to  $P + Q = \infty$ ;

Struktury o własnościach takich jak  $\mathbb{F}_p$  – dla matematyków niezwykle ważne – nazywane są ciałami. Ciało stanowią chociażby liczby rzeczywiste, liczby zespolone czy właśnie  $\mathbb{F}_p$ . Oczywiście, istnieją inne przykłady – zarówno skończone, jak i nieskończone.

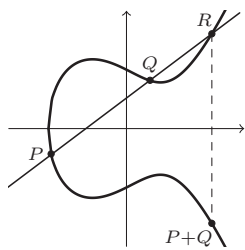
$$\begin{aligned} \Delta &= 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 3, \\ \sqrt{\Delta} &= 4 \text{ lub } 9, \\ x_1 &= (-3 + 4) : 2 = 7 \\ x_2 &= (-3 + 9) : 2 = 3. \end{aligned}$$



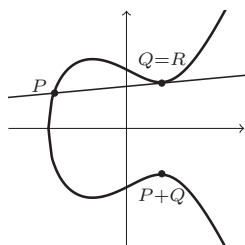
Rys. 1.  $y^2 = x^3 - x + 1$



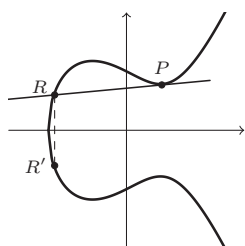
Rys. 2.  $P + Q = \infty$



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5.  $P + P = R'$

Przykładowo rozważmy krzywą

$$\{(x, y) \in \mathbb{F}_{13} \times \mathbb{F}_{13} \mid y^2 = x^3 - x + 1\} \cup \{\infty\}.$$

Jej punkty to:

$(0, 1), (0, 12), (1, 1), (1, 12), (3, 5), (3, 8), (4, 3), (4, 10), (5, 2), (5, 11), (6, 4), (6, 9), (7, 5), (7, 8), (10, 4), (10, 9), (12, 1), (12, 12), \infty$ .

Przykładowe działania (sprawdź!):

$(6, 9) + \infty = (6, 9),$   
 $(6, 9) + (3, 8) = (7, 8),$   
 $(3, 5) + (3, 5) = (7, 8).$

Przykładowe instancje problemu logarytmu dyskretnego:

- $(\mathbb{F}_{13}$  z mnożeniem) znajdź taki  $x$ , że  $3^x = 7 \pmod{13}$
- $(K_{\mathbb{F}_{13}}$  z dodawaniem punktów) znajdź takie  $k$ , że:  

$$\underbrace{(6, 9) + \dots + (6, 9)}_{k \text{ razy}} = (5, 11)$$

- Jeśli dwa różne punkty  $P, Q \in K$  mają różną pierwszą współrzędną, to rysujemy prostą przechodzącą przez  $P$  i  $Q$ , zaznaczamy trzeci punkt przecięcia z krzywą ( $R$ ), a ostatecznym wynikiem dodawania  $P$  i  $Q$  jest odbicie symetryczne  $R$  względem osi  $OX$  (rys. 3). Może się zdarzyć, że dorysowana prosta nie przetnie się w żadnym dodatkowym punkcie (jak na rysunku 4). Wówczas dorysowana prosta na pewno będzie styczna do naszej krzywej i jako punkt  $R$  należy przyjąć punkt styczności.
- Jeśli liczymy  $P + P$ , to rysujemy styczną do  $K$  w punkcie  $P$ . Jeśli ta styczna nie przecina się z  $K$  w żadnym innym punkcie, to  $P + P = \infty$ , w przeciwnym razie (prosta przecina się jeszcze w punkcie  $R$ )  $P + P = R'$ , gdzie  $R'$  jest odbiciem symetrycznym  $R$  względem osi  $OX$  (zob. rys. 5).

Jak widać, dodawanie punktów jest zdefiniowane w pełni geometrycznie. Jednakże możemy to samo działanie (sprawdź! – jest to żmudne, ale proste) opisać analitycznie. Gdy  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2)$  i  $P + Q = W = (x_3, y_3)$ , dla  $x_1 \neq x_2$ , mamy

$$x_3 = \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 - x_1 - x_2,$$

$$y_3 = -y_1 + \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x_1 - x_3),$$

a gdy  $x_1 = x_2$  oraz  $y_1 = y_2$ , wzory są następujące:

$$x_3 = \left( \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \right)^2 - 2x_1,$$

$$y_3 = -y_1 + \left( \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \right) (x_1 - x_3).$$

Forma analityczna dodawania punktów jest wygodniejsza, ponieważ pozwala na zdefiniowanie dodawania punktów również w zbiorze  $\overline{K_{\mathbb{F}_{13}}} = K_{\mathbb{F}_{13}} \cup \{\infty\}$ , poprzez zwykłą analogię. To znaczy umawiamy się, że powyższe wzory analityczne (mające sens również w arytmetyce modulo 13) na  $x_3$  i  $y_3$  określają dodawanie punktów również w  $\overline{K_{\mathbb{F}_{13}}}$ .

Dodawanie punktów na krzywej (zarówno w  $\overline{K}$ , jak i w  $\overline{K_{\mathbb{F}_{13}}}$ ) jest działaniem o ładnych własnościach: jest łączne, ma element neutralny (tutaj  $\infty$ ) oraz własność, że każdy element  $P$  ma element odwrotny  $P'$  (czyli taki, że  $P + P' = \infty$ ). Struktury o takich własnościach zwyczajowo nazywamy grupą. Przykładem grupy innej niż te dwie opisane wyżej może być też  $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$  z działaniem mnożenia modulo  $p$  (warto samemu sprawdzić). Dla nas te grupy będą mieć jednak jeszcze jedną bardzo ważną własność, związaną z trudnością obliczeniową. O tym już za chwilę.

## 2. Bestia na usługach kryptografii

Wiele protokołów szyfrowania w kryptografii opiera się na trudności obliczeniowej różnych problemów. Pewnie najsłynniejsze jest szyfrowanie RSA, którego bezpieczeństwo gwarantowane jest przez trudność faktoryzacji dużych liczb. Są jednak i inne protokoły (np. szyfr El-Gamal), których bezpieczeństwo opiera się na innym założeniu, mianowicie na trudności obliczania logarytmu dyskretnego. Na czym to polega? Chodzi o problem znalezienia w danej grupie  $G$  z mnożeniem dla danych  $a, b \in G$  takiego  $k$ , że

$$a^k = b$$

bądź w wersji z grupą z dodawaniem takiego  $k$ , że:  $\underbrace{a + a + \dots + a}_{k \text{ razy}} = b$ .

Oczywiście, nie dla każdej grupy problem logarytmu dyskretnego jest trudny. Dla grupy  $\mathbb{F}_p$  z dodawaniem jest on banalny (dlaczego?), ale dla tego samego  $\mathbb{F}_p$ , tylko z mnożeniem – już uchodzi za trudny. Konkretnie, najszybszy znany algorytm dla tego problemu działa w czasie

$$2^{O(\sqrt[3]{\ln p \ln^2 p})},$$

co dla  $p$  rozsądnie dużych rozmiarów jest już poza zasięgiem współczesnych komputerów.

Po co więc te całe krzywe eliptyczne? Po prostu najszybsze algorytmy rozwiązujące logarytm dyskretny dla losowej krzywej postaci  $K_{\mathbb{F}_p}$  są jeszcze wolniejsze niż algorytmy dla grupy  $\mathbb{F}_p$  podobnego rozmiaru. Konkretnie dla krzywych eliptycznych wszystkie znane ogólne algorytmy rozwiązujące problem logarytmu dyskretnego działają w czasie

$$2^{O(\ln p)} \gg 2^{O(\sqrt[3]{\ln p \ln \ln^2 p})}.$$

Z takimi deklaracjami należy uważać. Uczciwiej byłoby napisać *na dzień dzisiejszy bezpieczniejszy*, gdyż nie znamy żadnych ścisłych dolnych oszacowań na czas rozwiązywania tych problemów. W każdej chwili może ktoś znaleźć jakiś efektywniejszy algorytm i sytuacja może się odwrócić.

Oznacza to, że każdy protokół kryptograficzny, oparty o problem logarytmu dyskretnego, staje się *bezpieczniejszy* bez zwiększenia  $p$  (a więc bez zwiększenia rozmiaru kluczy), jeśli tylko zmienimy grupę, z którą pracujemy, z  $\mathbb{F}_p$  z mnożeniem na  $K_{\mathbb{F}_p}$  z dodawaniem punktów. Dokładnie z tego powodu już nie jest popularne używanie podpisu cyfrowego DSA (z roku 1991), a powszechnie używa się podpisu ECDSA (z roku 1999) – czyli jego odpowiednika, ale opartego o krzywe eliptyczne.

A jednak ta geometria algebraiczna gdzieś się przydaje!

## Wyniki XXXV Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Szczyrk, 14–17 VI 2018

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych (wraz z bibliografią) przez Jury lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym referowaniu tego opracowania.

**Jury** w składzie: prof. dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący, dr Paweł Błaszczuk, dr Anna Brzeska, dr Dawid Czapla, mgr Żywilla Fechner, dr hab. Mieczysław Kula, dr Agnieszka Kulawik, dr Marian Podhorodyński, dr Anna Szczërba-Zubek, dr Hanna Wojewódka **postanowiło przyznać następujące wyróżnienia:**

- I miejsce: Bartosz Bartoszek** – I LO w Zduńskiej Woli za pracę *Funkcje potęgowe  $(j, k)$  symetryczne*, opiekun: dr inż. Renata Długosz;
- II miejsce: Filip Rękawek** – Katolickie LO w Garwolinie za pracę *O trójkątach kappa i ich własnościach*, opiekun: mgr Zofia Burno;
- III miejsce: Krzysztof Witkowski** – I LO w Gliwicach za pracę *O własnościach sum Freya*, opiekun: mgr Joanna Olesińska;
- IV miejsce Gabriela Pietras** – Publiczna Szkoła Podst. w Leszczynie, za pracę *Wokół twierdzenia Morse'a–Hedlunda*, opiekun mgr Martha Łącka;
- V miejsce Jakub Michalec**– LO Zakonu Pijarów w Krakowie za pracę *Paradoksy nieskończoności*, opiekun: Jolanta Przybylska.

W głosowaniu publiczności na najlepszą prezentację **nauczyciele nagrodzili Rafała Loskę** – VIII LO w Katowicach, praca *Jak obliczyć pole figury płaskiej?*, **a uczniowie Pawła Tyrnę** – LO Towarzystwa Szkolnego w Bielsku–Białej, praca *Matematyczne podstawy projektowania origami*.

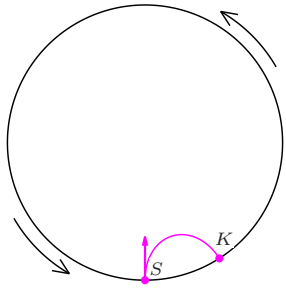
Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; [www.spinor.edu.pl](http://www.spinor.edu.pl)

## Problemy sztucznej grawitacji

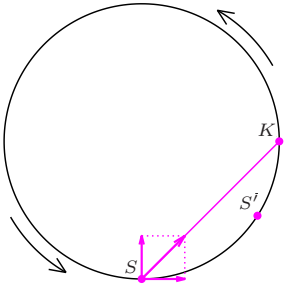
Szymon CHARZYŃSKI

Podróże w kosmos to marzenie większości dzieci i licznej grupy dorosłych (wliczając autora). Niestety, okazję do zrealizowania tych marzeń miała, jak na razie, bardzo nieliczna grupa ludzi, a najdalsze loty załogowe odbyte do tej pory to te z przełomu lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych dwudziestego wieku w ramach programu Apollo, dzięki któremu ludzie kilkakrotnie lądowali na Księżycu. Z kolei najdłuższe pobyty w przestrzeni kosmicznej były udziałem załóg stacji kosmicznych krążących na niskiej orbicie okołozemskiej (kilkaset km nad jej powierzchnią) i trwały kilka miesięcy. Pomimo tego, że podbój kosmosu przez gatunek ludzki jest ciągle jeszcze w powijakach, to wizjonerzy snują ambitne plany kolonizacji innych planet, zakładania na stałe zamieszkałych baz w przestrzeni i wysyłania załogowych statków nawet poza Układ Słoneczny.

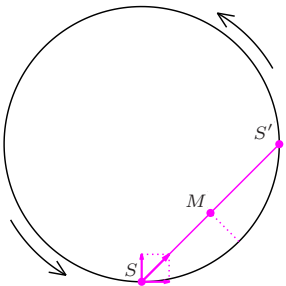
Te kilkadziesiąt lat doświadczeń z lotami kosmicznymi nauczyły nas, z jakimi problemami przyjdzie się mierzyć konstruktorom pojazdów przyszłości i ich załogom. Jednym z nich jest problem ciężenia, a raczej jego braku. Długie pozostawanie w stanie nieważkości ma dla organizmu ludzkiego różne, bardzo negatywne skutki zdrowotne. Dlatego wizjonerzy planujący długie podróże



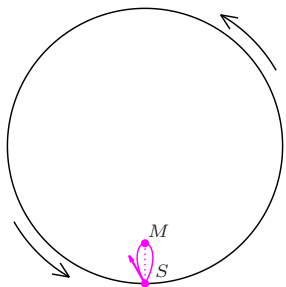
Rys. 1



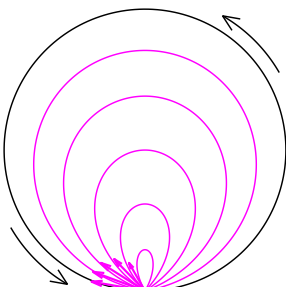
Rys. 2



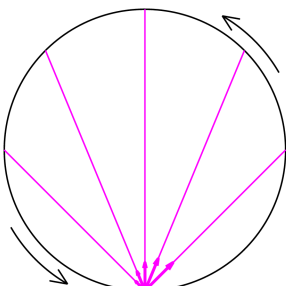
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

kosmiczne muszą zapewnić podróżnikom jakąś formę ciężenia. Nazywa się to czasami niezbyt trafnie *sztuczną grawitacją*. W tym artykule zajmiemy się analizą jednej z hipotetycznych metod zapewniania ciężenia pasażerom stacji i pojazdom kosmicznych. Jest to jeden z najprostszych i oczywistych pomysłów zastąpienia grawitacji siłą odśrodkową.

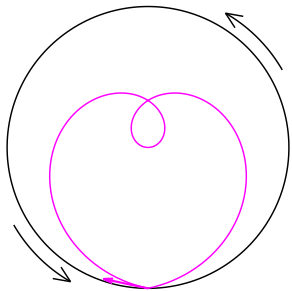
Wyobraźmy sobie pojazd w kształcie walca wirujący wokół swojej osi. Na dowolny obiekt spoczywający na wewnętrznej powierzchni takiego walca będzie działała siła bezwładności dociskająca go do tej powierzchni, dana wzorem  $F = m \frac{v^2}{R}$ , gdzie  $v$  to prędkość punktu na obwodzie walca, a  $R$  to promień.

Siła ta jest proporcjonalna do masy  $m$ , a współczynnik proporcjonalności  $\frac{v^2}{R}$  zastępuje przyspieszenie grawitacyjne. Aby osoba stojąca na wewnętrznej powierzchni wirującego walca odczuwała przyspieszenie równe przyspieszeniu ziemskiemu  $g$ , to musi być spełniony warunek  $\frac{v^2}{R} = g$ . Oznacza to, że walec o zadanym promieniu  $R$  musi wirować z prędkością  $v = \sqrt{gR}$ , co przelicza się na okres obrotu  $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ , tak aby iloczyn prędkości i okresu był równy obwodowi walca  $v \cdot T = 2\pi R$ . Widzimy więc, że zarówno prędkość, jak i okres rosną proporcjonalnie do  $\sqrt{R}$ . Dla  $R = 50$  m mamy, na przykład,  $v \approx 22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  i  $T \approx 14$  s, a dla  $R = 100$  m mamy  $v \approx 31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  i  $T \approx 20$  s.

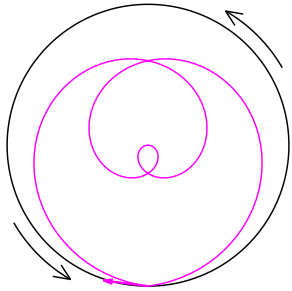
Mieszkaniec tak skonstruowanego statku będzie jednak mógł zauważyć pewne różnice między stałym polem grawitacyjnym na powierzchni Ziemi a sztucznym ciężeniem wywołanym siłą odśrodkową. Opiszemy teraz szczegółowo, co będzie się działo z podrzucanymi przedmiotami, co jest istotne dla mieszkańca, który chciałby umilić sobie czas żonglowaniem lub grą w ping-ponga, tenisa, piłkę nożną czy siatkówkę.

Zacznijmy od najprostszego eksperymentu: podrzucimy piłkę pionowo do góry. Na Ziemi spodziewalibyśmy się, że spadnie nam z powrotem do ręki, poruszając się w górę i w dół wzdłuż tej samej prostej pionowej linii. Niestety, ta intuicja zawodzi nas we wnętrzu wirującego walca. Tor lotu podrzuconej pionowo piłki (z prędkością początkową prostopadłą do powierzchni walca) będzie wyglądał jak na rysunku 1. Piłka wyrzucona w punkcie  $S$  spadnie w punkcie  $K$ , znajdującym się dalej w kierunku, w którym wiruje walec (tutaj przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara). Efekt ten można wyjaśnić działaniem siły Coriolisa, która pojawia się, kiedy obiekt w układzie obracającym się zmienia odległość od osi obrotu. Związane z tą siłą tzw. przyspieszenie Coriolisa jest dane wzorem  $\vec{a}_C = -2(\vec{\omega} \times \vec{v})$ , gdzie  $\vec{\omega}$  jest wektorem prędkości kątowej charakteryzującej obrót, a  $\vec{v}$  prędkością obiektu. Przyspieszenie to jest prostopadłe zarówno do prędkości  $\vec{v}$ , jak i prędkości kątowej  $\vec{\omega}$ . W rozważanym na rysunku 1 przypadku w czasie wznoszenia piłki jest ono skierowane w prawo i dlatego tor lotu w fazie wznoszenia odchyła się w prawo. W fazie opadania prędkość ma przeciwny zwrot i siła Coriolisa działa w lewo, odchyłając w lewo tor lotu, wskutek czego piłka uderza w powierzchnię pionowo, ale w innym miejscu.

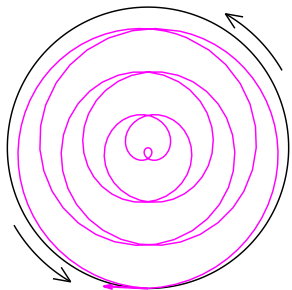
Inne, równoważne wyjaśnienie tego efektu otrzymamy, opisując lot w inercjalnym, czyli nieobracającym się układzie odniesienia – tak jakby opisał go swobodnie poruszający się astronauta przebywający na zewnątrz stacji kosmicznej. Z punktu widzenia inercjalnego obserwatora w chwili, kiedy wypuszczamy piłkę z ręki, zaczyna ona poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym, ponieważ nie działają na nią żadne siły (pomijamy tutaj opory powietrza). Piłka leci więc po prostej z punktu  $S$  do punktu  $K$ , jak na rysunku 2. Prędkość początkowa piłki mierzona w układzie inercjalnym jest sumą składowej pionowej, z jaką została wyrzucona i prędkości, z jaką obraca się walec, która w punkcie  $S$  jest skierowana poziomo. Na rysunku 2 składowe te akurat są równe i piłka startuje pod kątem  $45^\circ$ . Dla walca o średnicy  $R = 50$  m oznacza to nadanie piłce prędkości pionowej około  $v \approx 22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Zawodowi baseballiści potrafią miotać dwa razy szybciej, nie mówiąc o piłkarzach kopających piłkę, natomiast prędkość rzędu  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  jest osiągalna praktycznie dla każdego – tyle potrzeba, żeby podrzucić piłkę na wysokość około 5 m. Wypadkowa prędkość piłki jest większa od prędkości obrotowej walca i w czasie, kiedy piłka przeleci z punktu  $S$  do punktu  $K$ , walec obróci się zaledwie o tyle, że punkt  $S$  przesunie się do miejsca oznaczonego  $S'$ .



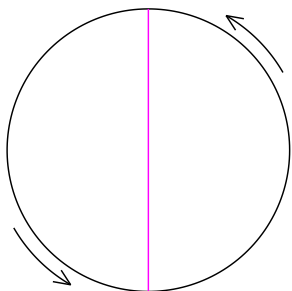
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

To jak mamy podrzucić piłkę, żeby wróciła do miejsca wyrzutu i dała się znowu złapać? Wystarczy nadać jej odpowiednio mniejszą prędkość początkową w układzie inercyjnym, tak aby w czasie lotu walec zdążył się obrócić i aby punkt  $S'$  znalazł się w miejscu lądowania piłki, jak na rysunku 3. Piłka leci tu po tym samym torze co na rysunku 2, tylko wolniej – obie składowe prędkości początkowej są mniejsze. Oznacza to, że opisując ten ruch w układzie obracającym się, musimy nadać piłce prędkość początkową, która będzie miała składową w kierunku poziomym, zwróconą przeciwnie do kierunku obrotu walca, czyli rzucić ją na ukos, jak na rysunku 4. Piłka zatoczy wtedy przedstawioną na rysunku pętlę i wpadnie nam z powrotem w ręce. Maksymalna wysokość, na którą piłka się wzniesie, jest równa strzałce łuku łączącego punkty  $S$  i  $S'$  na rysunku 3, czyli odległości od punktu  $M$  do okręgu.

Łatwo się przekonać, że im wyżej piłkę chcemy podrzucić, tym bardziej ukośnie musimy to zrobić, co widać na rysunku 5 przedstawiającym tory lotu piłek wznoszących się na różne wysokości. Rysunek 6 przedstawia te same rzuty widziane w układzie inercyjnym. Widać, że im wyżej chcemy podrzucić, tym mniejsza musi być prędkość początkowa w układzie inercyjnym, tak aby w czasie lotu walec zdążył się jak najwięcej obrócić, a piłka pozostawała jak najdłużej w powietrzu. Najwyższa trajektoria na rysunku 5 odpowiada obrotowi walca o  $\frac{3}{4}$  jego obwodu, co łatwo odczytać z rysunku 6. Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, abyśmy tak podrzucili piłkę, aby w czasie jej lotu walec wykonał, na przykład, półtora obrotu. Taką sytuację przedstawia rysunek 7. Na kolejnych rysunkach przedstawiono trajektorie piłki lecącej wystarczająco wolno, aby walec wykonał dwa i pół (rys. 8) albo nawet sześć i pół obrotu (rys. 9). W układzie inercyjnym wszystkie te trzy trajektorie wyglądają w sposób przedstawiony na rysunku 10, przebiegane są tylko z różnymi prędkościami.

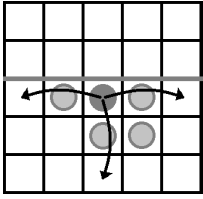
Widzimy, że planując rzut tak, aby móc wyrzuconą piłkę złapać, musimy uwzględniać prędkość obrotową walca i wiedzieć, jak względem kierunku tej prędkości jesteśmy zorientowani. Jasne jest, że planując rzut tak, aby trafić w jakiś konkretny punkt, niekoniecznie ten, z którego wyrzucamy, musimy zawsze uwzględniać siłę Coriolisa, która będzie zależeć od tego, w którą stronę rzucamy czy kopniemy piłkę. Wewnątrz walca o małym promieniu piłka bardzo mocno kopnięta w jedną stronę błyskawicznie spadnie na ziemię, podczas gdy tak samo kopnięta w drugą może wzniesie się na niebotyczną wysokość, zataczając po drodze kilka pętli, jak na rysunku 9. Efekt ten uczyni tego typu gry znacznie trudniejsze niż w ziemskim polu grawitacyjnym.

Opisane efekty są tym mniejsze, im większy jest promień stacji  $R$ , ponieważ prędkość kątowa obrotu  $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$  maleje ze wzrostem promienia, a z nią maleje siła Coriolisa. Można więc minimalizować niepożądane efekty, zwiększając rozmiar stacji, ale całkowicie efektu nie da się wyeliminować, a problem z rzucaniem piłki nie będzie jedynym problemem z tego typu sztuczną grawitacją. Oprócz tego, że trzeba będzie uważać na dziwnie latające przedmioty, którym ktoś przez przypadek nadał nieodpowiednią prędkość początkową, zaobserwujemy inne ciekawe efekty. Biegając lub jeżdżąc na rowerze wewnątrz takiej stacji kosmicznej, będziemy zmieniać odczuwaną siłę ciężenia w zależności od tego, czy nasza prędkość względem stacji będzie się dodawać czy odejmować od prędkości obrotowej. Wewnątrz walca o wystarczająco małym promieniu można będzie, rozpędzając się na rowerze, oderwać się od powierzchni i doświadczyć stanu nieważkości. Trzeba też będzie uważać przy wstawianiu, bo siła Coriolisa będzie chciała nas przewrócić, tak jak zakrzywia tor wznoszącej się piłki. Trzeba będzie wstawać powoli i pochyłać się w odpowiednią stronę. W dodatku siła ciężenia, działająca na głowę, będzie mniejsza niż działająca na stopy, strumień wody lecącej z kranu będzie się zakrzywiał, podobnie jak tory spadających swobodnie przedmiotów. Powierzchnia wody w basenie będzie wklęsła, a pływanie w jedną stronę będzie trudniejsze niż w drugą. Gdy położymy ołówek na płaskim biurku, to w pobliżu lewej krawędzi będzie się staczał na lewo, a w pobliżu prawej na prawo (pod warunkiem, że kierunek lewa-prawa odpowiada kierunkowi obrotu walca). Zachęcamy Czytelników do zastanowienia się, jakie jeszcze ciekawe zjawiska będzie można zaobserwować.

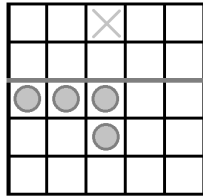


**Rozwiązanie zadania F 957.**

Jeżeli noga piłkarza w momencie zderzenia z piłką porusza się z prędkością  $u$ , to w związanym z nią układzie odniesienia prędkość piłki wynosi  $v + u$  (przyjmujemy, że oś ruchu jest zgodna z kierunkiem ruchu piłki). Po całkowicie sprężystym zderzeniu prędkość piłki w tym samym układzie odniesienia wyniesie  $-(v + u)$ , a jej prędkość względem ziemi wyniesie  $-(v + u) - u$ . Jeżeli piłka po uderzeniu zatrzyma się to  $v + 2u = 0$ , a stąd  $u = -v/2 = -5 \text{ m/s}$ . Znak minus wskazuje, że noga piłkarza powinna poruszać się w tym samym kierunku, co piłka przed uderzeniem.



Rys. 1. Możliwe ruchy ciemnoszarego pionka



Rys. 2. Konfiguracja pionków, z której można dotrzeć do pola zaznaczonego krzyżykiem.

Ciekawe zadania o niezmiennikach i półniezmiennikach można znaleźć w artykułach K. Chełmińskiego i W. Pompego ( $\Delta_{96}^7$ ,  $\Delta_{96}^8$ ). O niezmienniku do badania węzłów jest artykuł J. Gładysza ( $\Delta_{18}^1$ ).

$x^2$	$x$	1	$x$	$x^2$
$x^3$	$x^2$	$x$	$x^2$	$x^3$
$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^3$	$x^4$
$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^4$	$x^5$

Rys. 3

Autorka niniejszego tekstu o grze Conway's Soldiers dowiedziała się z książki o chłopcu, który lubił sprowadzać otoczenie, w tym również ludzi, do liczb, a najlepiej jednej (Mark Haddon, *Dziwny przypadek psa nocną porą*).

#### Zadanie

Na dziesięciu drzewach, rozmieszczonych na okręgu, siedzi dziesięć wiewiórek (po jednej na każdym drzewie). Od czasu do czasu dwie wiewiórki przeskakują na sąsiednie drzewa. Czy wszystkie wiewiórki mogą spotkać się na jednym drzewie?

#### Rozwiązanie

Żeby znaleźć odpowiedź, można pomalować drzewa na dwa kolory, tak żeby każde dwa sąsiadujące drzewa były w innych kolorach. Parzystość liczby wiewiórek na drzewach w tym samym kolorze to w tym przypadku niezmiennik. Zaczynamy od 5 i 5 – niezależnie od tego, jak wiewiórki będą skakać (ale zgodnie z zasadą opisaną w zadaniu), ta parzystość się nie zmieni, czyli nie uzyskamy 10 i 0.

Conway's Soldiers to jednoosobowa łamigłówka, w której żołnierze (pionki) przedostają się na terytorium wroga i chcą wkroczyć jak najdalej. Na nieskończonej szachownicy, z zaznaczoną „na środku” poziomą granicą, pionki przeskakują jeden nad drugim. Dokładniej: ruch polega na przeskoczeniu pionkiem nad innym znajdującym się na sąsiadującym polu – tylko poziomo lub pionowo – i zdjęciu pionka, który został przeskoczony.

Początkowo wszystkie pionki ustawione są poniżej granicy (na rysunkach zaznaczona na szaro). Celem gry jest dostać się jak najdalej poza granicę. Należy znaleźć takie początkowe ustawienia pionków (dowolnie wielu), żeby przynajmniej jeden mógł znaleźć się 1, 2, 3, 4, ... pola za granicą. Rysunek 2 przedstawia ustawienie, które umożliwia przekroczenie granicy o 2 pola. Zadanie: ile najmniej pionków jest potrzebnych, żeby przedostać się o 3 i 4 pola od granicy, pozostawiamy Czytelnikowi.

A teraz zajmiemy się sprawą poważniejszą: **jak przedostać się 5 pól za granicę?** Żeby zmierzyć się z problemem, wytoczmy oręż, jakim są *półniezmienniki*. *Niezmiennikiem* nazywamy pewną własność, która nie ulega zmianie podczas wykonywania procesu (odsyłamy do zadania na marginesie). Natomiast *półniezmiennik* to własność zmieniająca się w ściśle określony sposób (na przykład nie rośnie lub nie maleje).

Polom szachownicy przypiszemy wartości liczbowe i po każdym ruchu będziemy sumować liczby na zajętych polach. Chcemy znaleźć takie wartości, żeby ta suma (nazwijmy ją *wartością gry*) pozostawała stała lub żeby malała po każdym ruchu. Zauważmy, że jeden ruch powoduje, że na planszy jest o jeden pionek mniej, tak że wymagania nie jest całkiem sztuczne.

Oznaczmy jedynką pole, do którego chcemy dotrzeć – nasz cel. Pozostałym polom przypiszmy  $x^k$  (dla każdego  $x$ , który ustalimy później) w taki sposób, że  $k$  jest liczbą wierszy i kolumn, o które to pole jest odległe od „1” (rys. 3).

Możemy wyróżnić trzy typy ruchów w grze (poniżej zakładamy, że pionek skaczący startuje z pola  $x^k$ ):

1. Przybliżający do „1” – gdy pionek skaczący zbliża się do pola 1. Wartość gry zmieni się wtedy o  $x^{k-2} - x^{k-1} - x^k$  ( $x^{k-2}$  to pole, na którym wylądował pionek skaczący, a  $x^{k-1}$ ,  $x^k$  to pola, z których zniknęły pionki).
2. Neutralny – pionek skaczący pozostaje w tej samej odległości od „1” co przed skokiem. Wartość gry zmienia się o  $-x^{k-1}$  (pole, na którym stał przeskoczony pionek).
3. Oddalający od „1” – wartość gry zmienia się o  $x^{k+2} - x^{k+1} - x^k$ .

Sprecyzujmy wymagania wobec  $x$ , żeby wartość gry nie zmieniała się wtedy, gdy przybliżamy się do „1”, czyli rozwiążmy dla  $k \geq 2$  równanie

$$(*) \quad x^{k-2} - x^{k-1} - x^k = 0.$$

Mamy dwóch kandydatów  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Jeden jest zdecydowanie lepszy od drugiego. Dla ujemnej wartości  $x$  ruch neutralny może powodować zwiększanie wartości gry, a przecież tego nie chcieliśmy. Inny powód jest taki, że w dalszej części będziemy się starali wypełnić pionkami cały nieskończony wiersz szachownicy, co w przypadku, gdy  $|x| > 1$ , oznaczałoby sumowanie nieskończonego ciągu geometrycznego, o ilorazie większym niż 1. Kłopotliwie... Bezpieczniej jest wybrać  $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ , oznaczymy tę wartość przez  $\phi$ . Zauważmy, że  $\phi$  spełnia wcześniejsze wymagania o tym, że w każdym ruchu wartość gry nie może wzrastać – wartość gry maleje, gdy wykonujemy ruch oddalający ( $\phi^{k-2} - \phi^{k-1} - \phi^k < 0$ ), przy ruchu neutralnym również.

Zachodzą następujące równości

$$\phi^2 = 1 - \phi, \quad \phi^3 = \phi - \phi^2, \quad \phi^4 = \phi^2 - \phi^3 \quad \dots$$



Z powyższego otrzymujemy  $\phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + \dots = 1$  (dodaaliśmy prawe i lewe strony powyższych równań).

Mamy również

$$\dots + \phi^3 + \phi^2 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots = \phi + 2(\phi^2 + \phi^3 + \dots).$$

Mając planszę ponumerowaną konkretnymi liczbami i znając parę zależności dla tych wartości, obliczmy wartość gry w sytuacji, gdyby wszystkie pola (czyli nieskończenie wiele!) poniżej granicy były zajęte przez pionki, a naszym celem byłoby dostanie się tuż nad granicę (rys. 4). Oznaczmy wartość takiej konfiguracji przez  $S_1$

$$S_1 = (\phi + 2(\phi^2 + \phi^3 + \dots))(1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots)$$

$x^2$	$x$	1	$x$	$x^2$
$x^3$	$x^2$	$x$	$x^2$	$x^3$
$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^3$	$x^4$
$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^4$	$x^5$

Rys. 4.  $S_1$

$x^2$	$x$	1	$x$	$x^2$
$x^3$	$x^2$	$x$	$x^2$	$x^3$
$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x^3$	$x^4$
$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^4$	$x^5$

Rys. 5.  $S_2$

Korzystając z tego, że  $\phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + \dots = 1$ , dostajemy

$$S_1 = (\phi + 2 \cdot 1)(1 + \phi + 1) = (2 + \phi)^2 = 4 + 4\phi + \phi^2 = 5 + 2\phi,$$

gdyż  $\phi^2 = 1 - \phi$ .

Teraz jako cel wyznaczmy sobie pole oddalone od granicy o dwa i ponownie zapełnijmy pionkami wszystkie pola poniżej granicy

$$S_2 = \phi(5 + 3\phi) = 5\phi + 3\phi^2 = 5\phi + 3(1 - \phi) = 2\phi + 3.$$

Analogicznie

$$S_3 = \phi(2\phi + 3) = 2\phi^2 + 3\phi = 2(1 - \phi) + 3\phi = 2 + \phi,$$

$$S_4 = \phi(2 + \phi) = 2\phi + \phi^2 = 2\phi + 1 - \phi = \phi + 1,$$

$$S_5 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = 1 - \phi + \phi = 1.$$

$S_5$  to wartość gry w przypadku, gdy naszym celem jest dojście do pola oddalonego od granicy o 5, ma to, oczywiście, związek z początkowym pytaniem. Ponieważ i tak wypełniamy wszystkie pola poniżej granicy na nieskończonej szachownicy, to ułożenie „1” w tym czy w innym miejscu (ale 5 pól od granicy) niczego nie zmienia.

Cóż wynika z tego, że  $S_5 = 1$ ? Oznacza to tyle, że w tej grze nie da się dojść pionkami na żadne pole oddalone od granicy o 5! Dla skończonej liczby pionków wartość początkowej konfiguracji będzie mniejsza niż 1, a ponieważ wartość nie może wzrosnąć po ruchu (tak dobraliśmy wartość  $\phi$ ), to startując z ustawienia o wartości mniejszej niż 1, nigdy nie osiągniemy pola „1”.

Źródło:

E. Berlekamp, J. Conway and R. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, 2004



## Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

**M 1573.** Wewnątrz kwadratu jednostkowego  $\mathcal{K}$  znajduje się wielokąt wypukły  $\mathcal{W}$  o polu większym od  $\frac{1}{2}$ . Wykazać, że wewnątrz wielokąta  $\mathcal{W}$  można wskazać odcinek o długości  $\frac{1}{2}$  równoległy do boku kwadratu  $\mathcal{K}$ .

Rozwiązanie na str. 22

**M 1574.** Dodatnią liczbę całkowitą  $n$  nazwiemy *podkwadratową*, jeżeli  $n+1$  jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par liczb podkwadratowych o tej własności, że ich suma oraz iloczyn także są podkwadratowe.

Rozwiązanie na str. 18

**M 1575.** *Płytka* nazwiemy pokazaną na rysunku figurę złożoną z czterech sześciokątów foremnych o boku 1 oraz dowolną figurę otrzymaną z niej przez obrót lub symetrię. Z kolei  *$n$ -trójkątem* nazwiemy trójkątny układ tworzony przez  $1+2+\dots+n$  sześciokątów foremnych o boku 1 (na rysunku pokazano 5-trójkąt). Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite  $n$  o tej własności, że z pewnej liczby płytek można ułożyć  $n$ -trójkąt.

Rozwiązanie na str. 8

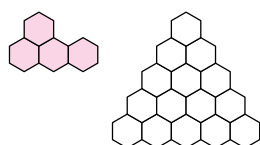
Przygotował Michał NAWROCKI

**F 957.** Piłkarz zatrzymuje nogą piłkę poruszającą się w jego kierunku z prędkością  $v = 10$  m/s. Znaleźć prędkość  $u$ , z jaką powinna poruszać się noga piłkarza, aby uderzająca w nią piłka zatrzymała się. Przyjąć, że masa piłki jest dużo mniejsza od masy nogi piłkarza, a zderzenie jest całkowicie sprężyste.

Rozwiązanie na str. 8

**F 958.** Na szalkę wagi sprężynowej o masie  $M$  spada z pewnej wysokości  $h$  kulka o masie  $m$  ( $M \gg m$ ). Współczynnik sprężystości sprężyny wynosi  $k$ . Znaleźć odległość  $\Delta x$  punktu, do którego szalka wychyli się z położenia początkowego i wokół którego będzie wykonywała drgania. Przyjąć, że uderzenia kulki w szalkę są doskonale sprężyste.

Rozwiązanie na str. 18

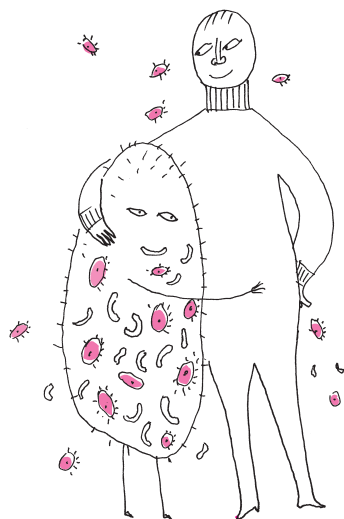


## Zajrzeć głębiej

Moje zainteresowanie badaniami mikrobiomu ( $\Delta_{12}^6$ ,  $\Delta_{16}^{12}$ ) nie maleje. W dodatku, gdy się już zwróci uwagę na jakiś temat, to zauważa się coraz więcej nowych danych z tej dziedziny.

Przypomnę: mikrobiom to zespół mikroorganizmów współistniejących z danym organizmem, np. z człowiekiem. Drastycznie oceniając: w „sterylnym” świecie pozbawionym mikroorganizmów życie wielu gatunków nie byłoby możliwe, życie ludzkie – bardzo ograniczone. Nic w tym dziwnego – powstające w toku ewolucji organizmy wielokomórkowe, tkankowe, zastały świat od 2,5 miliarda lat zasiedlony przez organizmy jednokomórkowe. One były u siebie, te nowe dopiero zdobywały własne nisze. Trzeba było nauczyć się żyć razem, często w symbiozie. Mikrobiomy napotykamy wszędzie, gdzie ich szukamy: mijające lato przypominało nam, na przykład, kleszcze z bogatym mikrobiomem, w którym jednak strasząca nas *Borrelia* nie czuje się komfortowo i chętnie przemieszcza się do ssaków.

Mikrobiotyczny ekosystem, który trwa i żyje w nas, jest niezwykle skomplikowany i bogaty w szczegóły. W ludzkim przewodzie pokarmowym wytworzyły się zasady współżycia z mikroorganizmami zarówno w sensie czasowym, jak i przestrzennym. Zaczynamy to współżycie, rodząc się (w stanie sterylnym), a potem stopniowo, w kontakcie z otoczeniem, tworzy się nasz mikrobiom, który reaguje na wszelkie perturbacje – stan zdrowotny, wiek, płeć. Właściwie każdy z nas stykał się z zakłóceniami trawiennymi, które są nierozdzielnie związane z mikrobiomem. Zatem niezwykle użyteczne byłyby badania nieinwazyjne pod tym kątem przewodu pokarmowego. Co więcej, istnieją już propozycje leczenia konkretnych chorób przez wprowadzenie do przewodu pokarmowego określonego gatunku bakterii – cóż z tego, skoro nie możemy śledzić tam ich obecności, ponieważ wszelkie dotychczas stosowane techniki obrazowania sięgają zaledwie na pojedyncze centymetry w głąb ciała.



Przydała się wyobraźnia. Naukowcy wykorzystali znany uprzednio gen („gen donosiciel”), który powoduje powstawanie wewnątrzkomórkowych lipidowych pęcherzyków wypełnionych gazem. W naturze, tworząc pęcherzyki, bakteria może regulować swoją gęstość, a zatem głębokość zanurzenia w cieczy. Następnie gen ten, metodami inżynierii genetycznej, wprowadzili do nieszkodliwych bakterii jelitowych (*E. coli* i *Salmonella enterica Typhimurium*) i przystąpili do doświadczeń z myszami (jak byśmy sobie dali radę, gdyby na świecie i w laboratoriach nie istniały standardowe szczepy myszy?)

Modyfikowane bakterie wykrywano następnie w mysich jelitach dzięki pomiarom ultradźwięków (sonda przyłożona do skóry) rozpraszanych przez pęcherzyki. Wystarczyło także ustalić natężenie ultradźwięków, które rozbijają pęcherzyki, aby „zobaczyć” lokalizację danych bakterii w jelicie. Zainteresowanie metodą i jej możliwościami zwiększa się, gdy przypomnimy

sobie, że wymieniony szczep *Salmonelli* jest zdolny do wybiórczego infekowania nowotworów jelit, co może umożliwiać, też wybiórcze, wprowadzanie do takich guzów potencjalnych leków. Obie bakterie, nawet w niewysokim stężeniu, zlokalizowano ultradźwiękami w jelitach myszy, w dodatku jednocześnie udało się różnicować dwa rodzaje bakterii za pomocą wielkości natężenia ultradźwięków rozbijających pęcherzyki.

Wystarczy użyć wyobraźni, aby móc przewidywać potencjalne stosowanie tej techniki obrazowania w przyszłej diagnostyce i terapii zarówno flory bakteryjnej, np. jelit, jak i głęboko w ciele położonych nowotworów. Ćwicząc nadal naszą wyobraźnię, możemy zaproponować np. badanie innych niż ciało zwierzęce zespołów bakterii – choćby w słabo poznanych głębokich warstwach gleby w warunkach naturalnych i różnie modyfikowanych.

Magdalena FIKUS

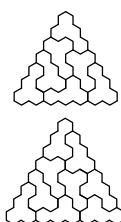


**Rozwiązanie zadania M 1575** .Odpowiedź:  
 $n = 8k - 1$  lub  $n = 8k$  dla  $k \geq 1$ .

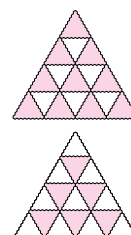
Zauważmy, że jeżeli  $n$ -trójkąt można ułożyć z płytek, to jest on złożony z podzielnej przez 4 liczby sześciokątów foremnych o boku 1, co oznacza, że liczba

$$\frac{1+2+\dots+n}{4} = \frac{n(n+1)}{8}$$

jest całkowita, czyli  $n$  daje resztę 0 lub 7 przy dzieleniu przez 8.



Z drugiej strony 7-trójkąt oraz 8-trójkąt można ułożyć z płytek (rysunek z lewej). Ponadto dla każdego  $k \geq 1$  z  $\frac{1}{2}k(k+1)$  8-trójkątów oraz  $\frac{1}{2}k(k-1)$  7-trójkątów można ułożyć  $(8k)$ -trójkąt, a z  $\frac{1}{2}k(k+1)$  7-trójkątów oraz  $\frac{1}{2}k(k-1)$  8-trójkątów można ułożyć  $(8k-1)$ -trójkąt (rysunek z prawej;  $k = 4$ ).





# Geometria Bolyaia–Łobaczewskiego – co to jest i jak ją poznawać

Marek KORDOS

Najdłużej badanym problemem matematycznym była kwadratura koła, ale zaraz za nią uplasowała się kwestia piątego postulatu Euklidesa. Chodziło o to, czy zdanie

*jeśli dwie proste przecięte trzecią tworzą kąty wewnętrzne jednostronne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych, to proste te po przedłużeniu przetną się i to właśnie z tej strony*

spełnia wymagane dla postulatów warunki, czyli czy wyraża rzeczy jasne i oczywiste i czy jest dostatecznie zwięzłe, by być uznane za pierwotną prawdę. Debatę zapoczątkował w V wieku Proklos, odpowiadając dwukrotnie *nie* i proponując, by wykazać, że usunięcie tego postulatu gmachu geometrii nie naruszy.

O perypetiach piątego postulatu pisałem w  $\Delta_{12}^{05}$  i  $\Delta_{12}^{06}$ .



Z biegiem stuleci angażowali się w te rozważania również przedstawiciele innych gałęzi nauki, aż do orzeczenia, że debata jest nonsensowna, bo z geometrią niejako się rodzimy (Kant, *Krytyka czystego rozumu*). I wtedy (początek XIX wieku) dwóch młodych ludzi, Węgier Janos Bolyai i Rosjanin Nikolaj Łobaczewski, uparło się, by świat przyjął, że usunięcie piątego postulatu nie tyle narusza gmach geometrii, co go dość gruntownie przebudowuje. Spotkała ich za to surowa kara, ale odnieśli zwycięstwo, bo od tej pory wszyscy matematycy uznali istnienie alternatywnych geometrii, choć było to dla nich (i w ogóle dla całego świata nauki) równie wstrząsające, jak dla nas byłby kontakt z inną cywilizacją.

Powstał też problem, jak taka alternatywna geometria wygląda, bo umiano pokazać jej poszczególne fenomeny, ale w całości jej „zobaczyć” nie umiano. Zanim (za sprawą Kleina) takie całościowe spojrzenie zostało skonstruowane, okazało się, że alternatywnych geometrii jest wiele. Wystarczyło bowiem, by (poniekąd przymusowo) sprawę zreferował na swoim wykładzie habilitacyjnym działający w analizie matematycznej Bernard Riemann. Wskazał on, jak można opisać nieskończoną mnogość struktur matematycznych, które od naszej geometrii będą różne, będąc jednak geometriami. Skorzystamy dalej z jego pomysłu.

## Po co matematyce modele?

Jeśli w jakiejś teorii A, o której jesteśmy przekonani, że jest niesprzeczna, zbudujemy model teorii B (czyli strukturę, mającą taką budowę jak teoria B), to z równym przekonaniem możemy stwierdzić, że teoria B też jest niesprzeczna. Dlatego tworząc nowe teorie, konstruuje się ich modele w klasycznej geometrii lub arytmetyce.

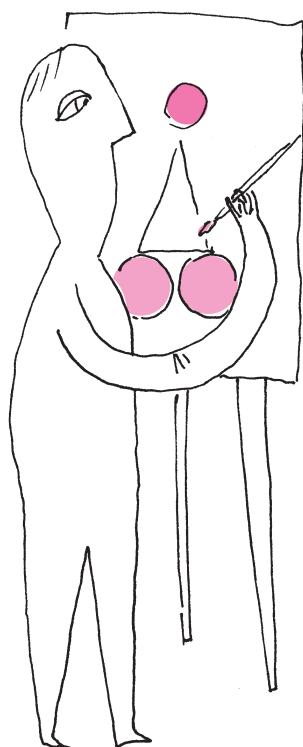
Ale jest i inny powód. Posiadanie różnych modeli interesującej nas teorii pozwala „trochę oszczędzić” na dowodzeniu. Jeśli bowiem dostrzegamy jakąś prawidłowość w modelu, to (jeśli nie ma tam specyficznych własności materii, z której model został zbudowany) możemy zaobserwowaną prawidłowość uznać za własność modelowanej teorii.

Tak w większości przypadków będziemy postępowali tutaj, właśnie przez oglądanie takich modeli, w których te czy inne własności będą wręcz rzucały się w oczy. Rodzinę modeli geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego, którymi będziemy się posługiwali, skonstruujemy, wychodząc od modelu zbudowanego przez Henri Poincarégo w myśl wskazań Riemanna.

Koncepcja Riemanna jest następująca. Określamy obiekt, który będzie w naszym modelu pełnił funkcję zbioru punktów i dla tych (nowo mianowanych) punktów określamy iloczyn skalarny. Gdy punkty są parami liczb rzeczywistych, ów iloczyn skalarny punktów  $P = (x_1, x_2)$  i  $Q = (y_1, y_2)$  to liczba

$$P \cdot Q := g_{11}x_1y_1 + g_{12}x_1y_2 + g_{21}x_2y_1 + g_{22}x_2y_2,$$

gdzie  $g_{ij}$  są dobrane w ten sposób, by liczba  $P \cdot P$  była zawsze nieujemna.





Dysponując iloczynem skalarnym, określamy długość wektora  $v$  jako  $|v| := \sqrt{v \cdot v}$ , a kąty mierzymy, obliczając ich kosinus według wzoru  $\cos vw := \frac{v \cdot w}{|v||w|}$ .

Na przykład geometria zwykłej płaszczyzny to zbiór  $\mathbb{R}^2$  z iloczynem danym przez  $g_{11} = g_{22} = 1$ ,  $g_{12} = g_{21} = 0$ .

### Model Poincarégo na półpłaszczyźnie (mPpp)

Gdy zbiorem punktów będzie  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ , a iloczyn skalarny dany będzie przez  $g_{11} = g_{22} = 1/x_1^2$  i  $g_{12} = g_{21} = 0$ , to będziemy mieli do czynienia z modelem płaszczyzny Bolyaia–Łobaczewskiego. Rzut oka na wzór na kosinus od razu pozwala zauważyć, że model ten jest *euklidesowokątny*, co oznacza, że narysowane krzywe w naszym modelu w sensie płaszczyzny Bolyaia–Łobaczewskiego tworzą kąt o tej samej rozwartości, jak ten, który widzimy euklidesowym okiem na rysunku (owe  $1/x_1^2$  w liczniku i mianowniku się skrócą). Zatem inne pojęcia geometrii Bolyai–Łobaczewskiego (np. proste) muszą w naszym modelu wyglądać inaczej niż ich euklidesowe odpowiedniki – gdyby bowiem wyglądały tak samo, otrzymalibyśmy nie geometrię Bolyaia–Łobaczewskiego, lecz geometrię półpłaszczyzny euklidesowej.

Nie wchodząc w szczegóły różniczkowej obróbki tego modelu, przyjmijmy, że udało się nam stwierdzić, iż prostą opisaną za pomocą tego iloczynu skalarnego (jedną, konkretną prostą) w tym modelu jest  $(t, 0)$  dla  $t > 0$ , a jej punkty są sparametryzowane za pomocą długości  $s$  jako  $(e^s, 0)$ . Zatem odległość punktów  $A = (e^{s_1}, 0)$  i  $B = (e^{s_2}, 0)$  jest w geometrii Bolyai–Łobaczewskiego równa

$$|s_1 - s_2| = \left| \ln \frac{e^{s_1}}{e^{s_2}} \right| = \left| \ln |A, B; (0, 0), \infty| \right|,$$

gdzie symbol, który znajduje się między wartościami bezwzględными wewnątrz logarytmu w ostatnim członie powyższej równości, to dwustosunek (patrz str. 14), a symbolem  $\infty$  został oznaczony kierunek prostej. Ten kierunek, podobnie jak punkt  $(0, 0)$  nie należy do modelu, nie jest punktem modelowanej płaszczyzny B–Ł, ale – można powiedzieć, że oba te punkty „kończą” prostą. Dlatego też Hilbert wprowadził zwyczaj nazywania ich *końcami prostej*. W mPpp odległość punktów będziemy mierzyli za pomocą dwustosunku:

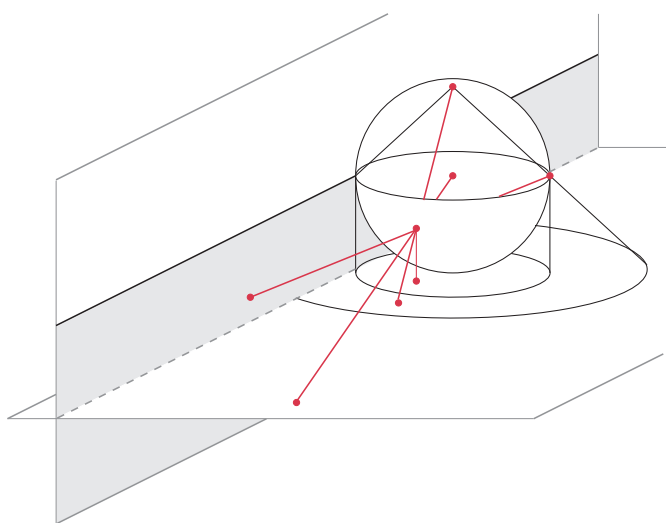
$$\left| \ln |(A, B; \text{koniec}_1 \text{ prostej } AB, \text{koniec}_2 \text{ prostej } AB)| \right|.$$

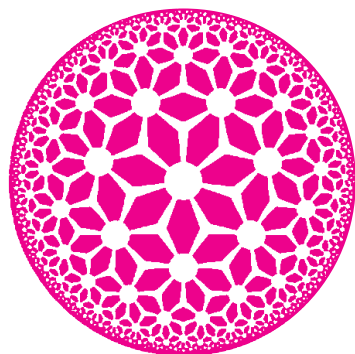
Te skąpe wiadomości wzięte na wiarę pozwolą nam poznać wiele własności geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego za pomocą mPpp i innych modeli.

Innych, bo z mPpp można w prosty sposób uzyskać jeszcze inne przydatne modele. Widoczna na rysunku obok półsfery jest styczna do brzegu rozpatrywanej dotąd (szarej) półpłaszczyzny. Można na nią zrzutować stereograficznie mPpp, otrzymując model Poincarégo na półsfery (mPp). On z kolei może być zrzutowany stereograficznie (z najwyższego punktu „drugiej połowy” półsfery) na płaszczyznę styczną do półsfery w jej „południowym” biegunie – tak otrzymamy model Poincarégo w kole (mPk). Możemy też mPp zrzutować prostokątnie na tę samą płaszczyznę – powstanie model Kleina (mK), też w kole, ale mniejszym (zamiast na dół można rzutować do góry na koło „zamykające” półsferę). Jeszcze inny model otrzymamy, rzutując mPp na tę płaszczyznę ze środka półsfery – ten model (mp) działać będzie na całej płaszczyźnie.

Zawarcie bliższej znajomości z tymi modelami pozwala na obserwowanie rozmaitych faktów mających miejsce w geometrii B–Ł. Część z nich postaram się zaprezentować.

Punkt mający w modelowanej geometrii współrzędne  $(e^s, 0)$  ma w modelu współrzędne  $(s, 0)$ .





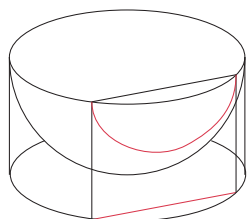
## Proste, kąty, odległości w różnych modelach

Ponieważ w geometrii euklidesowej inwersje zachowują dwustosunek, więc inwersje względem prostych i okręgów (w istocie ich połówek) prostopadłych do brzegu mPpp zachowują odległości B–Ł (są izometriami, a nawet symetriami), a więc wszystko, co otrzymamy za ich pomocą z wyróżnionej prostej B–Ł, to będą proste B–Ł. Morał: w mPpp *prostymi w sensie B–Ł są wszystkie prostopadłe do brzegu proste i mieszczące się w modelu łuki okręgów, a inwersje względem nich są w sensie B–Ł symetriami.*

Czytelnika Zaniepokojonego dziwnym sformułowaniem o łukach okręgów w poprzednim zdaniu (przecież to po prostu półokręgi!) spieszę uspokoić – w tym szaleństwie jest metoda. Jeśli mianowicie przyjrzymy się, jak otrzymujemy inne modele Poincarégo, okaże się, że wyróżnione wyżej zdanie też się do nich stosuje! I to tłumaczy nienajprostsze sformułowanie: o ile bowiem w modelu na półsfery te łuki są również półokręgami, to już w modelu w kole – nie.

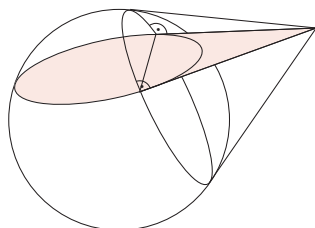
A na tym nie koniec. Ponieważ inwersje (więc i rzut stereograficzny) zachowują dwustosunek i kąty między krzywymi, więc we wszystkich modelach Poincarégo *odległości mierzy się logarytmem dwustosunku punktów i końców prostej, na której one leżą, a kąty w sensie B–Ł mają takie same rozwartości, jak kąty zmierzone w modelu.*

Jak widać, umknęły nam pozostałe dwa modele: Kleina i na całej płaszczyźnie. Zajmijmy się pierwszym z nich.



W modelu na półsfery, jak już wspomnieliśmy, proste to półokręgi. Jeśli tak, to leżą one w płaszczyźnie prostopadłej do tej, na którą rzutujemy mPp, by otrzymać model Kleina. Zatem rzutują się one jako odcinki. Dokładniej: *w modelu Kleina proste w sensie B–Ł to cięciwy modelu.*

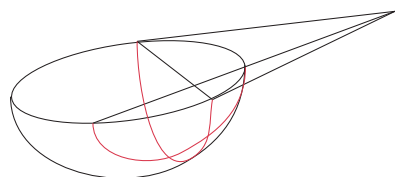
Uwaga **Jeszcze jeden...** na stronie 15 upewnia nas, że *odległości w modelu Kleina również mierzy się logarytmem z dwustosunku.*



Pozostaje kwestia kątów. W modelu Kleina (oczywiście, bo w przeciwnym przypadku byłoby to zwykłe euklidesowe koło) nie ma takiej wygody, jak w modelach Poincarégo. Tu podamy tylko, jak przedstawia się w mK sprawa prostopadłości. W tym celu należy przypomnieć sobie (bądź udowodnić, gdyby się nie pamiętało) twierdzenie ze stereometrii:

*jeśli na sferze dwa okręgi przecinają się pod kątem prostym, to płaszczyzna jednego z nich przechodzi przez wierzchołek stożka utworzonego ze stycznych do sfery w punktach drugiego z nich.*

Odnosząc widoczną na rysunku sytuację do mPp i rzutując ją na mK, otrzymujemy wniosek, że *w modelu Kleina proste prostopadłe to takie, że przedłużenie jednej z nich przechodzi przez punkt przecięcia stycznych w końcach drugiej (jej biegun).* I to na razie wystarczy nam do obserwacyjnego badania geometrii B–Ł. Bo przecież o oglądanie od początku nam chodzi.

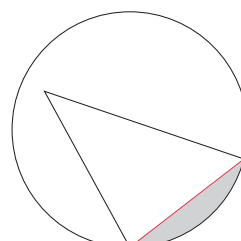
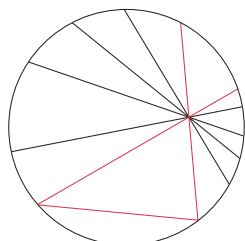


Pozostał jeszcze model na płaszczyźnie. Jego funkcja okazała się czysto formalna – geometrycy rysują w nim sytuacje z geometrii B–Ł wtedy, gdy chcą podkreślić, że tym razem nie będą posługiwać się modelami. Czytelnik Zaciekawiony może sprawdzić, że proste B–Ł w tym modelu to proste przechodzące przez punkt styczności mPp z płaszczyzną oraz łuki hiperbol, dla których te proste są asymptotami.

## Co od razu widać w modelu Kleina?

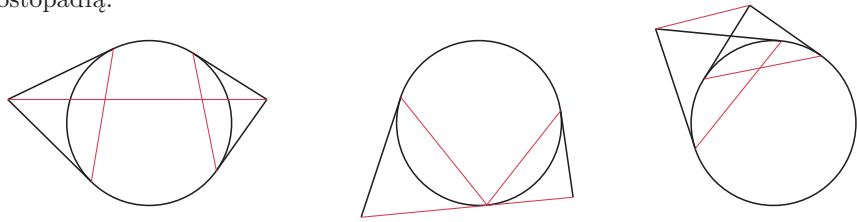
Przede wszystkim widać, że przez punkt poza prostą przechodzi wiele prostych z nią rozłącznych. Wśród nich są dwie, mające z daną prostą wspólne końce – to *równoległe*, a pozostałe rozłączne to *nadrównoległe*.

Widać też, że we wnętrzu kąta istnieje obszar, z którego nie można poprowadzić prostej przecinającej oba jego ramiona – oddzielająca go prosta nazywa się *zagradzająca*.



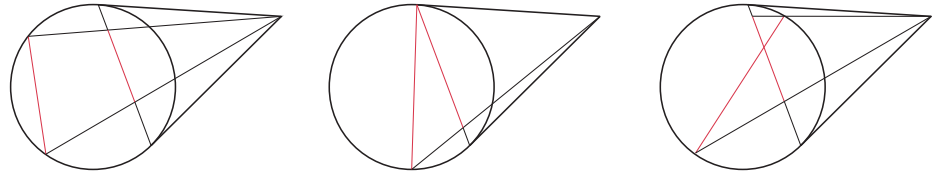


Widać też, że proste są nadrownoległe wtedy i tylko wtedy, gdy mają wspólną prostopadłą.

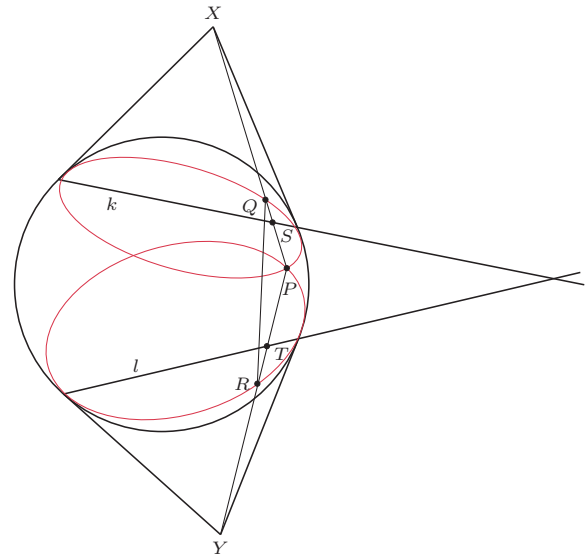
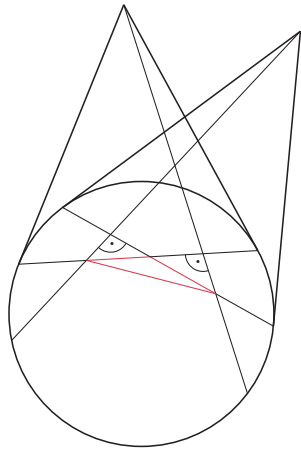


Istotnie, wspólna prostopadła zawierać się musi w prostej łączącej bieguny, a ta w przypadku prostych przecinających się czy równoległych nie przecina się z modelem, czyli wnętrzem koła.

Rozpatrując podobne rysunki, stwierdzamy, że rzut prostokątny prostej na prostą nigdy nie jest prostą – jest odcinkiem dla prostych przecinających się i nadrownoległych, a w przypadku równoległych – półprostą.



Z kolei rysunek z lewej pokazuje trójkąt bez ortocentrum (wysokości kolorowego trójkąta przecinają się poza modelem). Z prawej zaś mamy trójkąt  $PQR$ , na którym nie można opisać okręgu (te owale to elipsy styczne do brzegu modelu w końcach prostych  $k$  i  $l$ )  $k$  i  $l$  to B-Ł symetralne  $PQ$  i  $PR$  – nie wynika to z dotychczasowych rozważań, ale nie powinno dziwić, że nie wszystko daje się opowiedzieć w tak krótkiej formie.

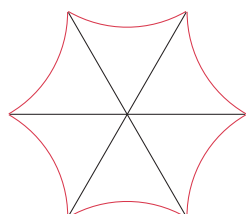
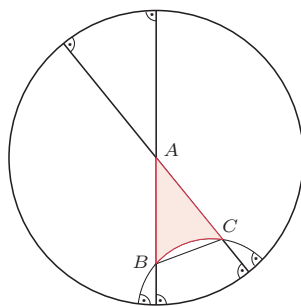


### Co od razu widać w modelu Poincarégo w kole?

Oczywiście, sytuacje związane z kątami, bo w modelach Poincarégo rozwartość kątów w sensie B-Ł jest taka, jak na rysunku. W mPk proste to łuki okręgów prostopadłe do brzegu, ale też i średnice modelu (powstają z rzutów półokręgów wielkich półsfery). Wobec tego na rysunku mamy trójkąt  $ABC$  o sumie kątów mniejszej od  $180^\circ$  – byłoby  $180^\circ$ , gdyby bok  $BC$  był odcinkiem, a nie łukiem. A za pomocą inwersji można dowolny trójkąt doprowadzić do takiego położenia.

Czytelnik Dociekliwy zauważy, że istnieją trójkąty o sumie kątów dowolnie bliskiej zeru (mały kąt przy  $A$  i  $BC$  bliskie zagradzającej).

W grafikach Eschera można odnaleźć inne spojrzenie na takie trójkąty. Jeśli trójkąt z poprzedniego rysunku będzie równoramienny i będzie miał w  $A$  kąt  $\frac{360^\circ}{n}$ , to – układając  $n$  takich trójkątów wokół  $A$  – uzyskamy  $n$ -kąt foremny. Z poprzedniej uwagi wynika, że możemy pozostałe dwa kąty dobrać dowolnie, byleby suma kątów trójkąta nie przekroczyła  $180^\circ$ . Niech zatem będą równe po  $\frac{360^\circ}{2k}$  (oczywiście  $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ ). Wówczas kąty otrzymanego  $n$ -kąta będą równe  $\frac{360^\circ}{k}$ . Oznacza to, że wokół każdego z tych wierzchołków można ułożyć  $k$  takich wielokątów (Czytelnik Błyskotliwy domyśli się, że robi się to, stosując inwersje względem boków wielokąta).



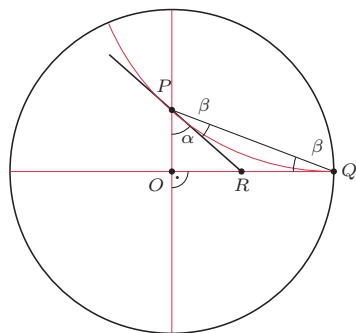


Parkietaże na okładce i wewnątrz numeru wykonał Przemysław KICIAK

Otrzymamy w ten sposób pokrywającą płaszczyznę B–Ł siatkę  $n$ -kątów po  $k$  w każdym wierzchołku. Takie siatki z upodobaniem rysował Escher, a nasza okładka zawiera kilka takich, ale już rodzimej produkcji.

### Jak Łobaczewski obliczył kąt równoległości

Wystawmy z punktu  $O$  na prostej  $k$  prostopadłą i obierzmy na niej punkt  $P$  odległy o  $x$  od  $k$ . Poprowadźmy teraz przez  $P$  równoległą do  $k$ . Kąt, jaki tworzy ona z  $OP$ , to *kąt równoległości*. Jego rozwartość zależy od  $x$  – Nikolaėj Łobaczewski pierwszy obliczył w jaki sposób. Oto obliczenie w mPk. Na rysunku B–Ł proste są kolorowe, czarne odcinki to odcinki materii, z jakiej jest zrobiony model, czyli euklidesowe;  $PR$  to styczna. Chcemy obliczyć kąt  $\alpha$ . Ponieważ  $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$ , więc  $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ . Z kolei



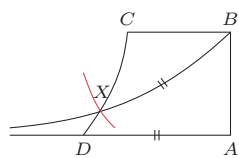
$$x = \ln \frac{(r + r \operatorname{tg} \beta) \cdot r}{r \cdot (r - r \operatorname{tg} \beta)} = \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

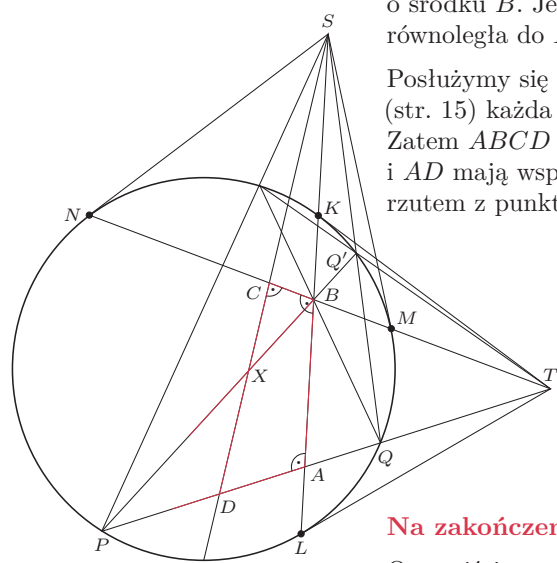
$$\text{więc } e^x = \frac{1 + \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad \text{a zatem } \alpha = 2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} e^x.$$

### Jak Bolyai styczną skonstruował

Konstrukcja stycznej to wykreślenie jej B–Ł cyrklem i B–Ł linijką. Konstrukcja ta, narysowana w stylu modelu na płaszczyźnie, wygląda tak jak obok, czyli rysujemy czworokąt o trzech kątach prostych. Cztery kąt jest (oczywiście) ostry. Zatem bok  $BC$  jest krótszy od  $AD$ . Promieniem  $AD$  kreślimy więc okrąg o środku  $B$ . Jego przecięcie z bokiem  $CD$  oznaczamy  $X$ . Wtedy prosta  $AD$  jest równoległa do  $BX$ . Czyli tego trzeba dowieść.



Posłużymy się modelem Kleina. Wobec uwagi kończącej punkt **Harmoniczność** (str. 15) każda prosta przez  $S$  jest prostopadła do  $MN$ , a każda przez  $T$  do  $KL$ . Zatem  $ABCD$  jest w modelu Kleina czworokątem o trzech kątach prostych.  $BX$  i  $AD$  mają wspólny koniec, więc są równoległe. Ponadto czwórka  $B, X, P, Q'$  jest rzutem z punktu  $S$  czwórki  $A, D, P, Q$ , a więc



$$\frac{BP \cdot XQ'}{BQ' \cdot XP} = \frac{AP \cdot DQ}{AQ \cdot DP},$$

co oznacza, że odcinki  $BX$  i  $AD$  są B–Ł przystające.

Gdy chodzi o konstrukcje w modelu Kleina, do tej pory otwarty jest postawiony przez Jana Mycielskiego problem, czy konstrukcje w kole wykonane euklidesową linijką i cyrklem dają ten sam zbiór punktów konstruowalnych, co konstrukcje wykonane B–Ł linijką i B–Ł cyrklem.

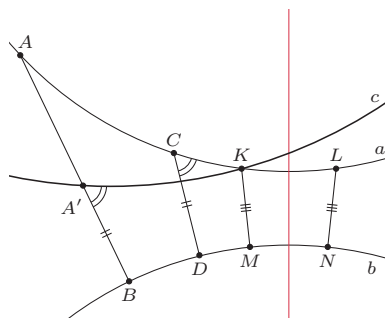
### Na zakończenie

Oczywiście, przedstawienie geometrii Bolyai–Łobaczewskiego na kilku stronach nie jest możliwe. Pozostaje wiele do samodzielnego zwiedzania przez ewentualnie zainteresowanych.

Pokazaliśmy, że dla prostych nadrównoległych istnieje wspólna prostopadła – jak ją skonstruować?

Dawid Hilbert podał następujący przepis (rysujemy znów w mp). Obierzmy na jednej z nich, na  $a$ , punkty  $A$  i  $C$  i zrzućmy je prostokątnie na drugą,  $b$ , otrzymując punkty  $B$  i  $D$ . Jeśli  $AB = CD$ , czworokąt  $ABDC$  ma oś symetrii, a ona jest prostopadła do  $AC$  i  $BD$ , o co nam chodziło.

Gdy  $AB > CD$ , obieramy na  $AB$  taki punkt  $A'$ , że  $A'B = CD$ . Z  $A'$  prowadzimy taką prostą  $c$ , że kąt między  $DC$  i  $a$  jest taki, jak między  $BA'$  i  $c$ . Prosta  $c$  przecina (?)  $a$  w punkcie  $K$ . Odłóżmy odcinek  $A'K$  od punktu  $C$ , otrzymując  $L$ . Mamy  $KM = LN$ , gdzie  $M$  i  $N$  to rzuty prostokątne  $K$  i  $L$  na  $b$  (jest tak, bo figury  $aCDb$  i  $a'A'Bb$  są przystające). Oś symetrii czworokąta  $KMNL$  jest szukaną wspólną prostopadłą.



Znak zapytania wskazuje, że trzeba jeszcze wykazać, iż punkt przecięcia  $a$  i  $c$  istnieje.



Proste w geometrii B–Ł są jednoznacznie wyznaczone nie tylko przez dwa punkty, lecz także przez punkt i koniec, a nawet dwa końce.

Cechą szczególną geometrii B–Ł jest możliwość zdefiniowania odległości wewnątrz geometrii, czego np. geometria euklidesowa jest pozbawiona (i po wzorze odległości musi sięgać do fizyki). W konsekwencji całą tę geometrię można opisać, posługując się wyłącznie pojęciem należenia punktu do odcinka.

W dalszej konsekwencji pole trójkąta można obliczyć z sumy jego kątów.

Gdy już mowa o polu, to pole powierzchni koła jest na płaszczyźnie B–Ł większe od pola koła euklidesowego o tym samym promieniu.

Można też na płaszczyźnie B–Ł dokonywać paradoksalnych rozkładów, co nie jest możliwe na płaszczyźnie euklidesowej.

Słowem, jest co zwiedzać.

## Narzędzia

W poprzednich rozdziałach używaliśmy własności dwustosunku, inwersji i rzutu stereograficznego, które tutaj chcemy przypomnieć.

### Dwustosunek (inaczej: stosunek anharmoniczny)

Zacznijmy od współrzędnych barycentrycznych na prostej: Jeśli punkty  $A$  i  $B$  obciążymy masami  $m_A$  i  $m_B$ , to środek ciężkości znajdzie się w punkcie  $P = \frac{m_A \cdot A + m_B \cdot B}{m_A + m_B}$ . Parę liczb  $(m_A, m_B)$  można uznać za współrzędne barycentryczne punktu  $P$ .

Współrzędne barycentryczne dane są (jak łatwo zauważyć) z dokładnością do proporcjonalności. Równie łatwo zauważyć, że nie ma na prostej punktu, dla którego suma tych współrzędnych jest równa 0. Można jednak uzupełnić prostą o taki punkt, który będzie środkiem ciężkości o zerującej się sumie współrzędnych – prosta staje się jakby okręgiem (dla koneserów: albo prostą rzutową, albo – bez różnicy – prostą płaszczyzny uzwarconej punktem).

Ponieważ nie ma punktu o współrzędnych barycentrycznych  $[0, 0]$ , więc każdy punkt można przedstawić jako  $[1, a]$ , albo  $[0, 1]$ .

Prosta w takich współrzędnych składa się z punktów postaci  $\lambda A + \mu B$ , gdzie  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ . Dwustosunek punktów  $P, Q, R, S$  to liczba

$$(P, Q; R, S) := \frac{(\lambda_P \mu_R - \lambda_R \mu_P)(\lambda_Q \mu_S - \lambda_S \mu_Q)}{(\lambda_P \mu_S - \lambda_S \mu_P)(\lambda_Q \mu_R - \lambda_R \mu_Q)}.$$

W szczególności  $(A, B; P, Q) = \frac{\lambda_Q \mu_P}{\lambda_P \mu_Q}$ , (bo  $\lambda_A = \mu_B = 1$  i  $\mu_A = \lambda_B = 0$ ).

Gdy dodany punkt pominiemy, możemy dwustosunek opisać za pomocą zwykłych współrzędnych i odległości. W tym celu zapiszmy  $P$  i  $Q$  tak, by na pierwszej współrzędnej była jedynka:

$$P = [\lambda_P + \mu_P, \lambda_P a + \mu_P b] = \left[1, \frac{\lambda_P}{\lambda_P + \mu_P} a + \frac{\mu_P}{\lambda_P + \mu_P} b\right] \quad \text{i podobnie } Q.$$

Mamy więc  $P = \frac{\lambda_P}{\lambda_P + \mu_P} A + \frac{\mu_P}{\lambda_P + \mu_P} B$  i  $Q = \frac{\lambda_Q}{\lambda_Q + \mu_Q} A + \frac{\mu_Q}{\lambda_Q + \mu_Q} B$ .

Stąd

$$\begin{aligned} P - A &= \frac{\mu_P}{\lambda_P + \mu_P} (B - A), & Q - A &= \frac{\mu_Q}{\lambda_Q + \mu_Q} (B - A), \\ P - B &= \frac{-\lambda_P}{\lambda_P + \mu_P} (B - A), & Q - B &= \frac{-\lambda_Q}{\lambda_Q + \mu_Q} (B - A). \end{aligned}$$

Zatem

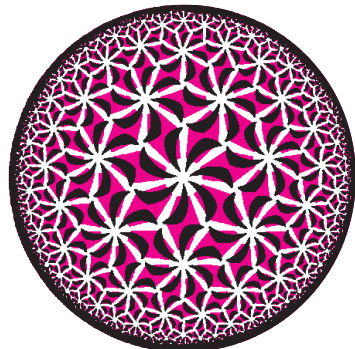
$$\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BP}} = \frac{(P - A)(Q - B)}{(P - B)(Q - A)} = \frac{\lambda_Q \mu_P}{\lambda_P \mu_Q} = (A, B; P, Q).$$

Więcej o współrzędnych barycentrycznych można przeczytać w moich artykułach w  $\Delta_{12}^{03}$  i  $\Delta_{18}^{03}$ .

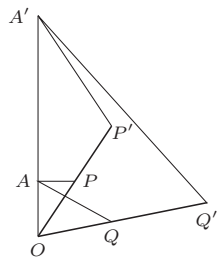
Gdy  $m_1$  i  $m_2$  są różnych znaków, środek ciężkości leży na zewnątrz odcinka  $AB$  po tej stronie, z której wartość bezwzględna obciążenia jest większa. Gdy te wartości są równe, nie może „znaleźć sobie miejsca”. Dodatkowy punkt „leży na obu końcach” prostej.

Czytelnik Pracowity może sprawdzić, że

$$\begin{aligned} (P, Q; R, S) &= (R, S; P, Q) = \\ &= \frac{1}{(P, Q; S, R)} = 1 - (P, R; Q, S). \end{aligned}$$







i dla B podobnie

Nasuwa się pytanie, czemu od razu nie podaliśmy tak prostej definicji dwustosunku – powód był jeden – w modelu Poincarégo na półpłaszczyźnie (patrz str. 10) jeden z końców prostej może być niewłaściwy.

$\frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}$  jest niezmiennikiem inwersji

Z lematu o inwersji (str. 16) mamy

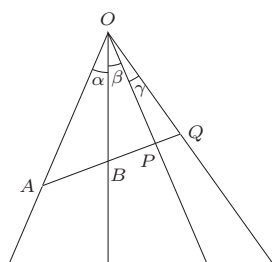
$$\frac{AP}{A'P'} = \frac{OP}{OA'}, \quad \frac{AQ}{A'Q'} = \frac{OQ}{OA'} \quad \text{oraz} \quad \frac{BP}{B'P'} = \frac{OP}{OB'}, \quad \frac{BQ}{B'Q'} = \frac{OQ}{OB'},$$

$$\text{a zatem} \quad \frac{A'P'}{A'Q'} = \frac{OA'}{OP} \cdot \frac{OQ}{OA'} \cdot \frac{AP}{AQ} \quad \text{oraz} \quad \frac{B'Q'}{B'P'} = \frac{OB'}{OQ} \cdot \frac{OP}{OB'} \cdot \frac{BQ}{BP}$$

a więc łącznie

$$\frac{A'P' \cdot B'Q'}{A'Q' \cdot B'P'} = \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}.$$

$\frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}$  jest niezmiennikiem rzutu środkowego (i równoległego)



Przy oznaczeniach z rysunku mamy dla trójkątów  $APO$ ,  $AQO$ ,  $BPO$ ,  $BQO$

$$\frac{AP}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AO}{\sin \sphericalangle OPA}, \quad \frac{AQ}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{AO}{\sin \sphericalangle OQA},$$

$$\frac{BP}{\sin \beta} = \frac{BO}{\sin \sphericalangle OPA}, \quad \frac{BQ}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{BO}{\sin \sphericalangle OQA},$$

więc

$$\frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \sin \beta}.$$

Zatem skoro dwustosunek zależy jedynie od kątów, więc nie zmienia się przy rzutowaniu środkowym. Dowód dla przypadku rzutu równoległego pozostawiamy Czytelnikowi Dokładnemu.

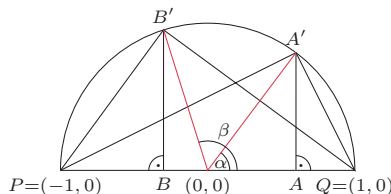
**Jeszcze jeden szczególny przypadek**

Gdy punkty  $A$  i  $B$  leżą na półokręgu zamkniętym średnicą  $PQ$ , a ich rzutami na tę średnicę są punkty  $A'$  i  $B'$ , wówczas

$$\frac{PA \cdot BQ}{PB \cdot QA} = \left( \frac{PA' \cdot QB'}{PB' \cdot QA'} \right)^2.$$

W oznaczeniach z rysunku mamy bowiem

$$\frac{PA \cdot PB}{PB \cdot QA} = \frac{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \beta)}{(1 + \cos \beta)(1 - \cos \alpha)}.$$



Natomiast z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$(PA')^2 = (\cos \alpha + 1)^2 + \sin^2 \alpha = 2(1 + \cos \alpha),$$

$$(PB')^2 = (\cos \beta + 1)^2 + \sin^2 \beta = 2(1 + \cos \beta),$$

$$(QA')^2 = (\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha = 2(1 - \cos \alpha),$$

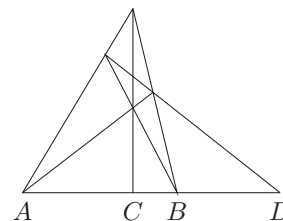
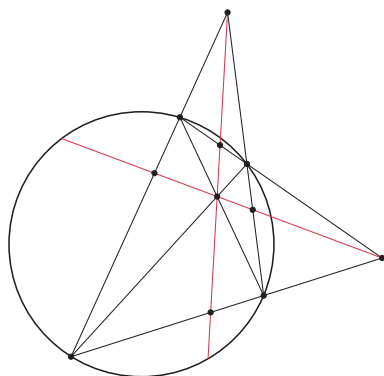
$$(QB')^2 = (\cos \beta - 1)^2 + \sin^2 \beta = 2(1 - \cos \beta),$$

co kończy uzasadnienie, bo dwójki się skrócą.

**Harmoniczność**

Gdy  $(A, B; C, D) = -1$ , czwórkę  $A, B, C, D$  nazywamy *harmoniczną*. Czytelnik Skrupulatny udowodni, że przedstawiona z prawej strony sytuacja realizuje właśnie taką czwórkę – wystarczy zastosować twierdzenie Cevy i Menelaosa.

Czytelnik Spostrzegawczy zaś zgodzi się, że to uogólnienie środka – jeśli punkt  $D$  odsuniemy do nieskończoności, punkt  $C$  stanie się środkiem  $AB$ .



Z lewej natomiast mamy sytuację, gdy każde cztery punkty leżące na jednej prostej realizują czwórki harmoniczne. Można też udowodnić (np.  $\Delta_{09}^{09}$ ), że styczne do okręgu z  $S$  i  $T$  przechodzą przez punkty przecięcia okręgu przez kolorowe linie.

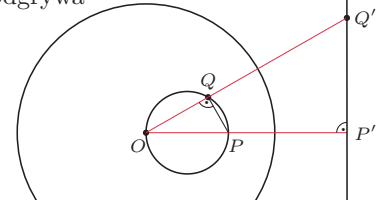


### Inwersja i rzut stereograficzny

Inwersję tradycyjnie definiuje się z użyciem odległości. *Obrazem inwersyjnym punktu  $P$  względem okręgu o środku  $O \neq P$  i promieniu  $r$  jest taki punkt  $P'$ , że  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$ . Wynika z tego, że inwersja jest involucją (czyli jej dwukrotne wykonanie jest tożsamością). Często uzupełnia się tę definicję dodaniem do płaszczyzny punktu w nieskończoności i umową, że ten punkt i  $O$  zamieniają się w inwersji. W badaniu inwersji ważną rolę odgrywa*

**Lemat.**  $\sphericalangle OPQ = \sphericalangle OQ'P'$ .

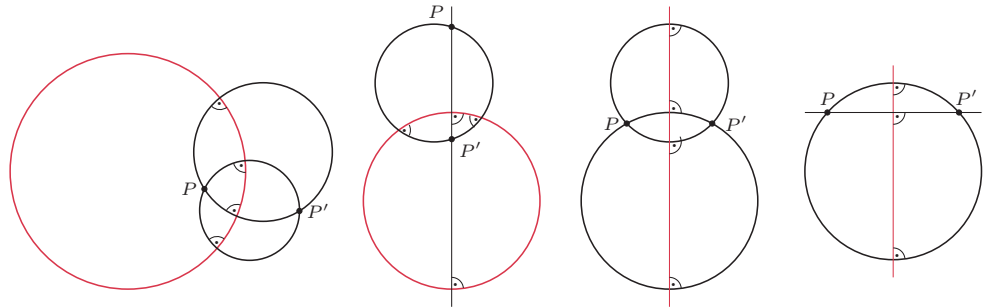
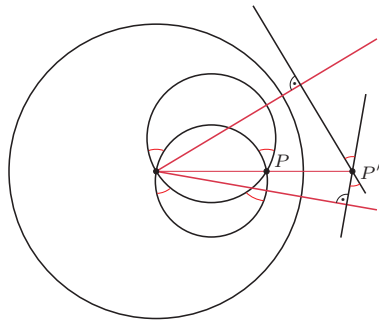
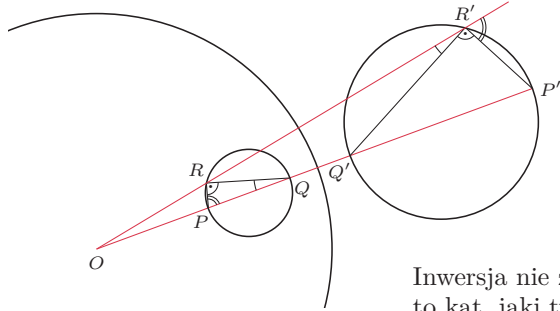
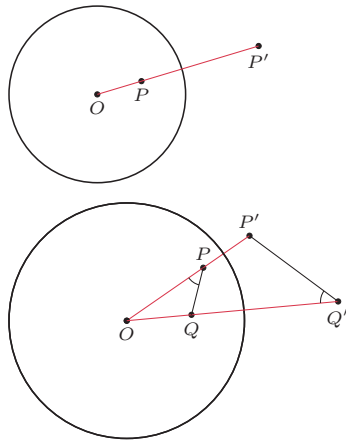
Wynika to z tego, że trójkąty  $OPQ$  i  $OQ'P'$  są podobne, gdyż mają wspólny kąt przy  $O$  oraz z definicji inwersji zachodzi  $\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$ .



Obrazem prostej przechodzącej przez  $O$  jest ona sama. Z lematu bezpośrednio wynika natomiast, że obrazem prostej nieprzechodzącej przez  $O$  jest przechodzący przez  $O$  okrąg (jego średnica leży na prostej prostopadłej do tej prostej – patrz rysunek). Zatem obrazem okręgu przechodzącego przez  $O$  jest prosta przez  $O$  nieprzechodząca. Z podobnego powodu obrazem okręgu nieprzechodzącego przez  $O$  jest okrąg również przez  $O$  nieprzechodzący. Tutaj korzystamy dwukrotnie z lematu, a także z sumy kątów trójkąta.

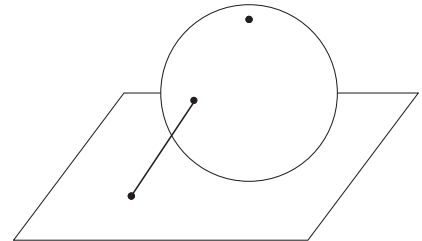
Inwersja nie zmienia kątów między krzywymi. Ponieważ kąt, jaki tworzą krzywe, to kąt, jaki tworzą styczne do nich, wystarczy, aby zauważyć, że kąty między prostymi przechodzą na takie same kąty między okręgami, na które te proste przechodzą, bo okręgi oba razy przecinają się pod tym samym kątem.

Prostym, ale ważnym wnioskiem z tego jest spostrzeżenie, że okrąg, przecinający okrąg inwersyjny pod kątem prostym, w inwersji przechodzi na siebie (zamieniają się jedynie jego łuki: zewnętrzny i wewnętrzny). Płyne stąd morał, że inwersję można zdefiniować za pomocą jedynie prostopadłości, a co więcej, że ta definicja czyni z symetrii osiowej też swego rodzaju inwersję.



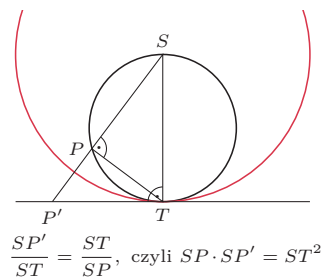
Definicja inwersji jedynie za pomocą prostopadłości pozwala na jej stosowanie również na sferze.

Rzut stereograficzny sfery na płaszczyznę do niej styczną w „biegunie południowym” każdemu punktowi sfery przyporządkowuje jego rzut środkowy z „bieguna północnego”.



Rozważenie inwersji w trójwymiarowej geometrii (czyli rozpatrywanie inwersji względem sfery z taką samą definicją, jak w przypadku okręgu) pokazuje ponadto, że rzut stereograficzny jest inwersją względem dwukrotnie większej sfery.

Wynika z tego, że wymienione wyżej własności inwersji (w szczególności zachowywanie kątów między krzywymi) przenoszą się również na rzut stereograficzny.

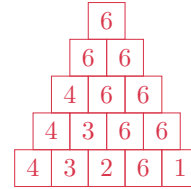


## Informatyczny kącik olimpijski (118):

### Piramida liczbowa i Żabka

Tym razem omówimy dwa zadania z zawodów drużynowych X Olimpiady Informatycznej Gimnazjalistów.

**Piramida liczbowa:** Julia postanowiła zbudować piramidę liczbową. Budowę rozpoczęła od wypisania swojego ulubionego  $n$ -elementowego ciągu  $a_n$ , który stanowił podstawę konstrukcji. Następnie, dla każdej pary sąsiednich liczb napisała nad nią większą z nich. Zauważmy, że każde kolejne piętro jest o jedną liczbę krótsze od poprzedniego. Naszym zadaniem jest obliczyć sumę elementów tej piramidy. Po prawej znajduje się przykład piramidy, której podstawę stanowi ciąg  $(4, 3, 2, 6, 1)$ .

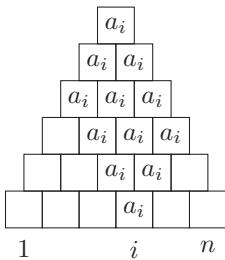


#### Rozwiązanie $O(n^2)$

Pierwszym pomysłem, który nasuwa się na myśl, jest wygenerowanie piramidy, która składa się z  $\frac{n(n+1)}{2}$  liczb, a następnie zsumowanie tych wartości. Takie rozwiązanie działa w czasie  $O(n^2)$ .

#### Rozwiązanie $O(n \cdot \log(n))$

Zauważmy, że zbiór wartości, które występują w całej piramidzie, jest równy zbiorowi wartości, które występują w podstawie tej piramidy. Wynika to bezpośrednio z konstrukcji piramidy. W związku z tym dla każdego elementu w podstawie piramidy obliczymy, ile razy występuje on w piramidzie. Wybierzmy maksymalny element w podstawie (jeśli jest więcej niż jeden taki element, wtedy wybieramy dowolny z nich), oznaczmy go przez  $a_i$ .



Na rysunku zaznaczono elementy piramidy o wartości  $a_i$ . Pozostałe elementy tworzą dwie mniejsze piramidy. Jedna o podstawie  $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1})$ , druga zaś o podstawie  $(a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n)$ . Wartość  $a_i$  występuje:

$$k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i-1)}{2} - \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}$$

razy w piramidzie (jest to rozmiar całej piramidy pomniejszony o rozmiar lewej oraz prawej piramidy). Suma wszystkich elementów w piramidzie to  $k \cdot a_i + L + P$ , gdzie  $L$  jest sumą elementów lewej piramidy  $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1})$ , zaś  $P$  jest sumą elementów prawej piramidy  $(a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n)$ . Aby obliczyć  $L$  i  $P$ , wystarczy opisaną procedurę wywołać rekurencyjnie.

Pozostało nam jeszcze zastanowić się, jak znajdować numer maksymalnego elementu w przedziale. Oczywiście, możemy naiwnie przejrzeć cały przedział i wybrać maksimum. Niestety, wówczas otrzymamy rozwiązanie, które działa w czasie  $O(n^2)$ . W celu przyspieszenia znajdowania maksimum w przedziale możemy wykorzystać drzewo przedziałowe, które w każdym węzle przechowuje dwie wartości: wartość największego elementu oraz numer tego elementu. Wówczas otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie  $O(n \cdot \log(n))$ .

**Żabka:** Żabka o imieniu Bajtuś znajduje się na kamieniu numer  $a$ . Natomiast jej upragniona mucha znajduje się na kamieniu numer  $b$ . Żabka w jednym skoku z kamienia numer  $x$  może przemieścić się na kamień o numerze  $2x$  lub  $2x+1$ . Czy istnieje taka sekwencja ruchów, która pozwoli Bajtusiowi dotrzeć do muchy?

Na początku rozważmy trywialny przypadek. Jeśli  $a = b$ , wtedy, oczywiście, Bajtuś dotarł już do muchy. Załóżmy zatem, że  $a < b$ . W pierwszym skoku Bajtuś może skoczyć na kamień numer  $2a$  oraz  $2a+1$ , innymi słowy na kamienie o numerach całkowitych z przedziału  $[2a; 2a+1]$ . W drugim skoku Bajtuś może skoczyć na kamienie numer  $4a, 4a+1$  z kamienia numer  $2a$  oraz na kamienie numer  $4a+2, 4a+3$  z kamienia numer  $2a+1$ . Zatem po wykonaniu dwóch skoków Bajtuś może znaleźć się na kamieniach o numerach całkowitych z przedziału  $[4a; 4a+3]$ .

**Obserwacja:** Jeśli w  $i$  skokach Bajtuś może osiągnąć kamień numer  $[c; d]$ , to po  $i+1$  skokach może osiągnąć kamień numer  $[2c; 2d+1]$ .

**Dowód:** Rozważmy dwa przypadki:

- $i+1$ -wszy skok jest typu  $(x \rightarrow 2x)$ . Wówczas Bajtuś może osiągnąć kamień numer  $2c, 2c+2, \dots, 2d$ .

- $i+1$ -wszy skok jest typu  $(x \rightarrow 2x+1)$ . Wówczas Bajtuś może osiągnąć kamień numer  $2c+1, 2c+3, \dots, 2d+1$ .

Zatem każdy z kamieni numer  $[2c; 2d+1]$  jest osiągalny przez Bajtusia po  $i+1$  skokach.  $\square$

Na podstawie powyższej obserwacji generujemy przedziały numerów kamieni, które są osiągalne przez Bajtusia w kolejnych skokach:

$$[8a; 8a+7], [16a; 16a+15], [32a; 32a+31], \dots$$

Następnie sprawdzamy, czy istnieje przedział, którego początek jest nie większy niż  $b$  oraz  $b$  do niego należy.

Zauważmy, że numery początków kolejnych przedziałów rosną wykładniczo. Zatem rozwiązanie działa w czasie  $O(\log(b/a))$ .

Bartosz ŁUKASIEWICZ

# Przyszłość sztucznej inteligencji

Paweł WAWRZYŃSKI\*

\*Instytut Informatyki, Wydział Elektroniki i Technik Informatycznych, Politechnika Warszawska



## Rozwiązanie zadania M 1574.

Zdefiniujmy ciąg  $(a_n)$  następująco

$$a_0 = 1, \quad a_n = 4a_{n-1}(a_{n-1} + 1) \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Udowodnimy indukcyjnie, że dla każdego  $n \geq 1$  liczba  $\frac{1}{2}a_n$  jest kwadratem liczby całkowitej. Dla  $n = 1$  mamy  $a_1 = 2 \cdot 2^2$ . Przypuśćmy, że  $\frac{1}{2}a_{k-1}$  jest kwadratem dla pewnego  $k \geq 2$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_k &= 2a_{k-1}(a_{k-1} + 1) = \\ &= 2a_{k-1}(4a_{k-2}^2 + 4a_{k-2} + 1) = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2}a_{k-1} \cdot (2a_{k-2} + 1)^2, \end{aligned}$$

a iloczyn trzech kwadratów liczb całkowitych jest kwadratem liczby całkowitej, co kończy dowód indukcyjny. Zauważmy, że para

$$(x, y) = (a_n^2 - 1, (a_n + 1)^2 - 1)$$

spełnia warunki zadania dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 1$ , a ponadto pary te są różne, gdyż ciąg  $(a_n)$  jest ściśle rosnący. Rzeczywiście, mamy  $x + 1 = a_n^2$ ,  $y + 1 = (a_n + 1)^2$  oraz

$$x + y + 1 = 2a_n(a_n + 1) = \frac{1}{2}a_{n+1},$$

a ponadto przyjmując  $a_n = z$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} xy + 1 &= (z^2 - 1)(z^2 + 2z + 1) + 1 = \\ &= (z - 1)(z + 2) \cdot z(z + 1) + 1 = \\ &= (z^2 + z - 2)(z^2 + z) + 1 = \\ &= (z^2 + z - 1)^2. \end{aligned}$$



## Rozwiązanie zadania F 958.

Przyjmijmy, że kulka o masie  $m$  spada z wysokości  $h$  i sprężysto zderza się z nieruchomą, poziomą płaszczyzną. Jeżeli czas zderzenia jest mały w porównaniu z czasem pomiędzy kolejnymi zderzeniami  $\Delta t$  to

$\Delta t = 2\sqrt{2h/g}$ , gdzie  $g$  to przyspieszenie ziemskie. Przy każdym zderzeniu pęd kulki  $p$  zmienia się o  $\Delta p = 2mv$ , gdzie  $v = \sqrt{2gh}$  to prędkość kulki w momencie zderzenia. W rezultacie na płaszczyźnie działa pewna średnia siła  $F$ . W ciągu czasu  $T \gg \Delta t$  pęd  $\Delta P$ , przekazany powierzchni wyniesie

$$\Delta P = \frac{\Delta p \cdot T}{\Delta t} = \frac{2m\sqrt{2gh} \cdot T}{2\sqrt{2h/g}} = mgT,$$

a więc uśredniona po czasie  $T$  siła działająca na płaszczyznę ze strony odbijającej się kulki wynosi  $F = \Delta P/T = mg$ .

Ponieważ masa szalki jest znacznie większa od masy kulki to powyższe rozumowanie możemy zastosować do powierzchni szalki. Wynika stąd, że na powolne drgania szalki będą nakładać się prawie periodyczne uderzenia kulki w jej powierzchnię, a wynikająca stąd średnia siła  $F = mg$  spowoduje przesunięcie położenia równowagi szalki o  $\Delta x = mg/k$ .

W 1970 roku jeden z pionierów sztucznej inteligencji, Marvin Minsky, napisał na łamach *Life Magazine*, że w ciągu 8 lat pojawią się maszyny o inteligencji porównywalnej z ludzką lub ją przewyższające. Jednak takie maszyny nie pojawiły się ani do roku 1978, ani przez kolejne 40 lat. A jednak w ciągu ostatnich lat można zobaczyć znaczne przyspieszenie w dziedzinie sztucznej inteligencji: autonomiczne samochody, programy wygrywające z ludzkimi arcymistrzami w Go – ostatnią grę, w którą człowiek dotychczas był lepszy, czy roboty humanoidalne śmiało przemierzające gruzowiska. Być może prognoza Minskiego, choć znacznie opóźniona, ziści się na naszych oczach?

Czego potrzebujemy, aby komputer przejawiał inteligencję porównywalną z ludzką? Wydawać by się mogło, że w pierwszej kolejności potrzebujemy do tego logiki. Tak wydawało się pionierom w tej dziedzinie. W 1955 roku Allen Newell i Herbert Simon przedstawili program *Logic Theory Machine*, który był w stanie udowodnić 38 z pierwszych 52 twierdzeń zawartych w klasycznym traktacie Bertranda Russella i Alfreda Whiteheada *Principia Mathematica*. Wydawało się wtedy, że sztuczna inteligencja już puka do wrót. Okazało się jednak, że logika formalna może być co najwyżej pobocznym narzędziem do budowy sztucznej inteligencji. Na inteligencję bowiem składają się także przewidywanie, planowanie, adaptacja, klasyfikacja, pozyskiwanie wiedzy na podstawie obserwacji i doświadczenia. Umiejętności daje się sprowadzić do operacji logicznych, ale to tak, jakby ktoś chciał budować dom, klejąc ziarenka piasku – da się, ale są lepsze sposoby.

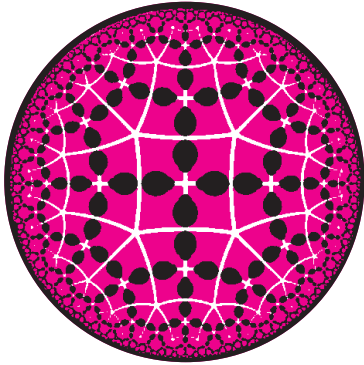
Front rozwoju sztucznej inteligencji jest obecnie zlokalizowany na zagadnieniach rozpoznawania i klasyfikacji obrazów i ludzkiej mowy. Jest to związane nawet nie tyle z pojawieniem się nowych koncepcji, co raczej pojawieniem się kart graficznych setki razy zwiększających dostępną moc obliczeniową oraz internetu udostępniającego ogromne ilości obrazów i dźwięku. W rezultacie wcześniej skonstruowane, a teraz odpowiednio dopracowane algorytmy rozpoznawania i klasyfikacji mogą być wytrenowane właśnie do rozpoznawania obrazu i dźwięku, co kapitalnie przybliżyła sztuczną inteligencję do aktywności do tej pory zarezerwowanych dla ludzi.

Konsekwencje tego przełomu będziemy niebawem oglądać na każdym kroku. Przedsmakiem tego są rozwijane właśnie przez Google'a i Teslę samochody autonomiczne. Dobrze demonstrują one istotę przełomu, który właśnie się dokonuje. Sterownik autonomicznego samochodu musi w pierwszej kolejności „rozumieć”, co się wokół niego dzieje. Do tego potrzebuje kamer i sztucznych sieci neuronowych, które rozpoznają sens obrazów, jakie te kamery rejestrują. Te sieci neuronowe zaś muszą być wyuczone na podstawie ogromnej ilości wcześniej zarejestrowanych nagrań.

Rozpowszechnienie się autonomicznych samochodów wydaje się wyłącznie kwestią czasu. Kolejnym krokiem będzie pojawienie się robotów mobilnych wykonujących w otoczeniu człowieka rozmaite proste do zautomatyzowania czynności, jak sprzątanie podłóg i ulic.

Kolejny przełom dokonujący się na naszych oczach dotyczy rozpoznawania ludzkiej mowy i przetwarzania tekstu. Każdy, kto ma telefon komórkowy z systemem operacyjnym Android, MacOS lub Windows Phone, może ze swoim telefonem porozmawiać. Nie będzie to specjalnie wyrafinowana rozmowa: właściciel powie swojemu telefonowi frazę, która albo należy do listy takich, które telefon zrozumie jako komendę i wykona, albo telefon jej nie zrozumie i uruchomi wyszukiwarke, która poszuka stron zawierających tę frazę.

Na coraz wyższym poziomie stoi przetwarzanie tekstu pisanego. Jeśli piszemy mail do korporacji, np. do naszego banku, to mamy dużą szansę na to, że



zostanie on zakwalifikowany do odpowiedniej tematyki przez program, który w pewnym zakresie „zrozumie”, o co nam chodzi. Rozwijającą się technologią są chat-boty. Jeśli firma prowadzi obsługę klienta on-line w okienku przeglądarki internetowej, to zgłaszający się tą drogą do niej klient trafia niekiedy na chat-bota, który rozpoczyna konwersację z nim i dopiero kiedy ta konwersacja ewidentnie go przerasta (co obecnie dzieje się dosyć szybko), włącza się człowiek.

Jakie narzędzia stoją za przetwarzaniem tekstu, zarówno mówionego, jak i pisanego? Są to sztuczne sieci neuronowe. Całkiem podobne do tych, które przetwarzają obrazy. Różnica polega na tym, że z obrazami radzą sobie sieci bez połączeń zwrotnych. Obraz jest statyczny i dlatego interpretująca go sieć neuronowa nie musi mieć własnej dynamiki. Tymczasem mowa jest procesem dynamicznym i rozumiejąca go sieć neuronowa także musi mieć dynamikę, czyli musi mieć połączenia zwrotne, zatem musi być siecią rekurencyjną.

W ciągu najbliższych lat sterowanie rozmaitymi urządzeniami elektronicznymi przy użyciu komend głosowych będzie stawało się coraz powszechniejsze. Automaty będą witać nas, gdy będziemy dzwonić do infolinii, czytać i odpowiadać na nasze maile. Technologia prowadzenia rozmowy z człowiekiem dotyczącej ograniczonej tematyki jest bowiem opanowana. Jak szybko jednak te ograniczenia na tematykę rozmowy będą się poszerzać?

Na razie nic nie wskazuje na to, abyśmy w najbliższej przyszłości mogli pogadać sobie z jakimś urządzeniem na dowolny temat, który nas akurat interesuje. Prowadzenie takiej konwersacji, podobnie jak np. tłumaczenie tekstu na inny język, jest bowiem problemem AI-trudnym. Problem ma taki charakter, kiedy do jego rozwiązania potrzebna jest ogólna wiedza zbliżona do tej, jaką musi dysponować człowiek do odnajdowania się w swoim świecie (być może „ogarniania się” byłoby nawet trafniejszym określeniem niż „odnajdowania się”). Rzecz jednak w tym, że jest to przeogromna wiedza, dotycząca różnych aspektów funkcjonowania świata. Współcześnie nie mamy nawet wyobrażenia, jak miałyby funkcjonować sztuczny rezerwuar takiej wiedzy i jego sprzężenie z narzędziami, które już mamy opanowane, a które służą np. do rozpoznawania obrazów i mowy.

Poszczególne predyspozycje, które składają się na ludzką inteligencję, na przykład, to rozwiązywanie problemów, planowanie, rozumienie mechanizmów rządzących obserwowanymi zdarzeniami, ich selektywne zapamiętywanie, aby przywołać je, kiedy to będzie potrzebne do rozwiązywania problemów czy podejmowania decyzji. Jeśli przyjrzymy się metodom sztucznej inteligencji, czy szerzej – informatyki – to okaże się, że każdy z tych składników inteligencji jest lepiej czy gorzej opanowany. Nie ma natomiast architektur, które przejawiałyby kilka z takich predyspozycji jednocześnie. Dzieje się tak dlatego, że metody te są niekompatybilne.

Ludzki mózg potrafi demonstrować różne przejawy inteligencji, ponieważ są one realizowane przez tę samą strukturę, którą jest dynamiczna sieć neuronowa. Dalszy rozwój sztucznej inteligencji będzie zapewne polegał na projektowaniu architektur, które łączą różne przejawy inteligencji, przy czym wspólnym mianownikiem dla tych architektur będzie pewnie to, że będą one sztucznymi sieciami neuronowymi.

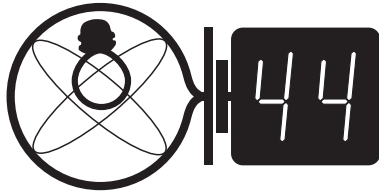
Miarą tego, ile jest do zrobienia w dziedzinie sztucznej inteligencji, jest nasza mizerna wiedza na temat mechanizmów działających w ludzkim umyśle. Weźmy taką predyspozycję jak świadomość (rozumianą tu raczej jako pamięć krótkookresową tego, co się dzieje, a niekoniecznie jako samoświadomość). Na czym to polega, że piszący te słowa jest świadom, iż przed chwilą za oknem po jego prawej stronie przeszedł człowiek z labradorem? Prawie na pewno (w tej dziedzinie trudno o całkowitą pewność) informacja ta nie została zapisana w anatomii mózgu. Prawie na pewno też nie ma takiego charakteru jak pamięć komputera, tzn. stabilnego stanu pewnych komórek. Wszystko wskazuje na to, że ma postać cyrkulacji elektrycznej, tzn. pewna grupa neuronów realizując swoją zwykłą aktywność polegającą na ładowaniu się potencjałem elektrycznym i jego szybkim wyładowywaniu, kryje w dynamice tego cyklu informację o człowieku z labradorem. Ale koncepcja labradora kryje się w anatomii mojego mózgu, prawdopodobnie w wagach pewnych połączeń synaptycznych. Całkowite zresetowanie aktywności elektrycznej mózgu (następujące np. przy atakach epilepsji) resetuje także pamięć krótkookresową, ale nie pozbawia ludzi ogólnej wiedzy o świecie, którego częścią są labradory. A zatem świadomość (czy pamięć krótkookresowa) ma w ludzkim mózgu postać cyrkulacji elektrycznej w jakiś sposób opartej o pamiętane na stałe, mające odwzorowanie w anatomii, elementy wiedzy o świecie.

Na czym to polega, że cyrkulacja elektryczna jest nośnikiem informacji? Nie wiemy tego. Nie ma dobrych modeli opisujących, jak informacja mogłaby być przechowywana w dynamice procesu, np. we wzorcu wyładowań elektrycznych grupy neuronów. Znane w sztucznej inteligencji modele, które w jakimś stopniu opisują takie zjawiska, to rekurencyjne sieci neuronowe. Nie wiadomo jednak, na czym miałyby polegać to, że pamięć krótkookresowa rekurencyjnej sieci neuronowej odwołuje się do jakiegoś rezerwuaru ogólnej wiedzy.

Do zrobienia zostało zatem ogromnie dużo. Naukowcy w dziedzinie sztucznych sieci neuronowych będą mieli pełne ręce roboty jeszcze przez długie dekady, zanim będziemy mogli pogawędzić ze sztuczną inteligencją zbliżoną do ludzkiej.

### Skrót regulaminu

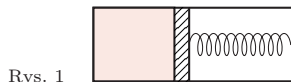
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



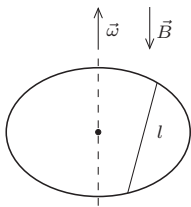
### Rozwiązania zadań z numeru 4/2018

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

Przypominamy treść zadań:



Rys. 1



Rys. 2

**656.** Naczynie odizolowane cieplnie od otoczenia rozdzielone jest na dwie części tłokiem, który może przemieszczać się bez tarcia (rys. 1). Tłok połączony jest z prawą ścianką naczynia za pomocą sprężyny. Gdy tłok styka się z lewą ścianką naczynia, sprężyna jest nieodkształcona. W lewej części naczynia znajduje się  $n$  moli jednoatomowego gazu doskonałego, w prawej części jest próżnia. Ile ciepła musi pobrać gaz (np. od umieszczonej w naczyniu spirali grzewczej), aby jego temperatura wzrosła o  $\Delta T$ ? Pojemność cieplną naczynia, tłoka i sprężyny zaniedbujemy.

**657.** Na nieprzewodzącym dysku o promieniu  $R$  umocowany jest wzdłuż cięciwy drut o długości  $l$  (rys. 2). Dysk obraca się ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Wektor indukcji jednorodnego pola magnetycznego  $\vec{B}$  skierowany jest prostopadle do dysku. Znaleźć siłę elektromotoryczną indukcji między środkiem a końcem drutu.

**656.** Ciepło  $Q$ , pobrane przez gaz, powoduje przyrost  $\Delta U$  jego energii wewnętrznej oraz zwiększenie energii potencjalnej sprężyny:

$$Q = \Delta U + k \frac{x_2^2 - x_1^2}{2},$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem sprężystości, a  $x_2$  i  $x_1$  są odkształceniami sprężyny w stanach końcowym i początkowym. Dla gazu jednoatomowego

$$\Delta U = \frac{3}{2} n R \Delta T.$$

Z warunków równowagi w stanach początkowym i końcowym  $p_i S = k x_i$  oraz z równań Clapeyrona  $p_i x_i S = n R T_i$ , gdzie  $i = 1, 2$ , a  $p_i$  jest ciśnieniem gazu,  $T_i$  jego temperaturą,  $S$  powierzchnią tłoka, otrzymujemy związki  $k x_i^2 = n R T_i$ . Szukane ciepło wynosi

$$Q = 2nR\Delta T.$$

**657.** Zadanie możemy rozwiązać, korzystając z praw magnetostatyki lub z prawa indukcji Faradaya.

a) Rozważmy punkt  $P$  w odległości  $x$  od środka drutu (rys. 3). Na swobodny elektron w tym punkcie działa siła Lorentza  $F$ , której składowa, równoległa do drutu, dana jest wzorem:  $F_{\parallel} = e B \omega r \sin \alpha = e B \omega x$ . Średnia wartość tej składowej na odcinku o długości  $\frac{l}{2}$  jest równa  $F_{sr} = e B \omega \frac{l}{4}$ . Szukane napięcie wynosi:

$$\mathcal{E} = \frac{F_{sr} l}{2e} = \frac{B \omega l^2}{8}.$$

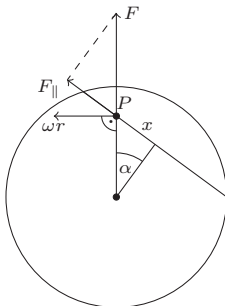
Potencjał końca drutu jest wyższy niż potencjał jego środka.

b) Rozważmy odcinek drutu o długości  $\frac{l}{2}$  (rys. 4), obracający się z okresem  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  między dwoma współśrodkowymi przewodzącymi okręgami o promieniach  $R$  i  $b$ , gdzie  $b^2 = R^2 - \frac{l^2}{4}$ . Szybkość zmian strumienia pola magnetycznego w obwodzie przedstawionym na rysunku 4 ma wartość

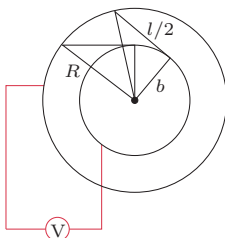
$$\mathcal{E} = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \frac{\pi (R^2 - b^2) B}{T} = \frac{B \omega l^2}{8}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
650 ( $WT = 3,74$ ), 651 ( $WT = 3,49$ )  
652 ( $WT = 2,8$ ), 653 ( $WT = 2,86$ )  
z numerów 1 i 2/2018

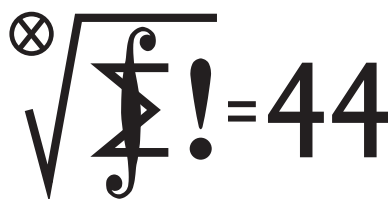
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,97
Tomasz Rudny	Gliwice	39,04
Marian Łupieżowicz	Gliwice	38,86
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosioń	28,70
Karol Łukanowski	Niemcz	23,85
Aleksander Surma	Myszków	18,96
Michał Koźlik	Poznań	17,39



Rys. 3



Rys. 4



## Rozwiązania zadań z numeru 4/2018

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

**759.** Ciąg nieskończony  $x_0, x_1, x_2, \dots$  jest określony wzorem rekurencyjnym  $x_{n+1} = 2^{2-x_n}$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; wyraz początkowy  $x_0$  jest dowolną liczbą z przedziału  $(3/2, 2)$ . Wyznaczyć wszystkie liczby, będące granicami zbieżnych podciągów ciągu  $(x_n)$ .

**760.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych  $x$ , dla których każda z liczb  $x^{1/2} + x^{-1/2}$  oraz  $x^{1/3} + x^{-1/3}$  jest całkowita.

**759.** Ciąg  $(x_n)$  powstaje przez iterowanie funkcji  $f(x) = 2^{2-x}$ , którą będziemy badać na przedziale  $[1, 2]$ . Ponieważ  $f$  maleje od wartości  $f(1) = 2$  do wartości  $f(2) = 1$ , zatem odwzorowuje przedział  $[1, 2]$  na siebie i ma w tym przedziale dokładnie jeden punkt stały  $\xi$  (tj. taki, że  $f(\xi) = \xi$ ). Obrazem przedziału  $(1, \xi)$  jest przedział  $(\xi, 2)$ , i na odwrót. Stąd wniosek, że wyrazy ciągu  $(x_n)$  o numerach parzystych należą do jednego z tych przedziałów, a te o nieparzystych – do drugiego.

Równość  $f(\xi) = \xi$  przepisujemy jako  $\xi \cdot 2^\xi = 4$ . Funkcja  $\psi(t) = t \cdot 2^t$  jest rosnąca; przy tym  $\psi(1/\ln 2) = e/\ln 2 < 4$ ,  $\psi(\xi) = 4$ ,  $\psi(3/2) = 3\sqrt{2} > 4$ , wobec czego

$$(1) \quad \frac{1}{\ln 2} < \xi < \frac{3}{2}.$$

Ponieważ (z założenia)  $x_0 > 3/2$ , zatem  $x_0, x_2, x_4, \dots \in (\xi, 2)$ , zaś  $x_1, x_3, x_5, \dots \in (1, \xi)$ .

Użyjemy rachunku pochodnych. Oznaczmy (dla krótkości):  $c = \ln 2$  i zauważmy, że  $f' = -cf$ . Niech  $g = f \circ f$ . Wówczas

$$g' = (f' \circ f) \cdot f' = -c \cdot (f \circ f) \cdot (-cf) = c^2 \cdot f \cdot g$$

i dalej:

$$(2) \quad g'' = c^2 \cdot (f' \cdot g + f \cdot g') = c^2 \cdot ((-cf) \cdot g + f \cdot c^2 \cdot f \cdot g) = c^3 \cdot f \cdot g \cdot (-1 + cf).$$

Dla  $x \in [1, \xi]$  mamy nierówność  $f(x) \geq \xi > 1/c$  (por. (1)), więc wyrażenie w nawiasie po prawej stronie (2) ma w tych punktach wartość dodatnią. To znaczy, że funkcja  $g$  jest ściśle wypukła w przedziale  $[1, \xi]$ ; a ponieważ  $g(1) = 1$ ,  $g(\xi) = \xi$ , zatem

$$(3) \quad g(x) < x \quad \text{dla } x \in (1, \xi).$$

Ciąg  $x_1, x_3, x_5, \dots$  leży w przedziale  $(1, \xi)$  i jest generowany rekurencyjnie wzorem  $x_{n+2} = g(x_n)$ . Nierówność (3) pokazuje, że jest to ciąg malejący, i w konsekwencji zbieżny. Jego granica musi być punktem stałym funkcji  $g$ ; jednak nie ma takiego punktu w przedziale otwartym  $(1, \xi)$  (nierówność (3)). W takim razie granicą tego ciągu musi być liczba 1.

Funkcja ciągła  $f$  przeprowadza ten ciąg na ciąg rosnący  $x_2, x_4, x_6, \dots$ , którego granicą jest wobec tego liczba  $f(1) = 2$ . To dowodzi, że niezależnie od wyboru wyrazu początkowego  $x_0 \in (\xi, 2)$ , ciąg  $(x_n)$  ma podciągi zbieżne do dwóch różnych granic: 1 oraz 2 (i do żadnej innej, bo dowolny podciąg ma nieskończenie wiele wspólnych wyrazów z jednym ze znalezionych podciągów, zbieżnych do 1 lub 2).

**760.** Przy oznaczeniach

$$(4) \quad a = x^{1/2} + x^{-1/2}, \quad b = x^{1/3} + x^{-1/3}$$

mamy związki:  $a^2 = x + x^{-1} + 2$ ,  $b^3 = x + x^{-1} + 3b$ , z których wynika tożsamość

$$(5) \quad a^2 = (b+2)(b-1)^2.$$

Gdy liczby  $a, b$  są naturalne, czynnik  $b+2$  musi być kwadratem liczby naturalnej; więc  $b = c^2 - 2$  ( $c \in \mathbb{N}$ ). Zgodnie z (4), jest to suma liczb  $x^{1/3}, x^{-1/3}$ , których iloczyn wynosi 1. Zatem  $x^{1/3}, x^{-1/3}$  to pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$(6) \quad t^2 - (c^2 - 2)t + 1 \quad (\text{zmienniej } t \in \mathbb{R});$$

istnieją (w  $\mathbb{R}$ ) gdy  $c \geq 2$ ; i są wówczas dodatnie. Wyznaczamy je zwykłą metodą, podnosimy do trzeciej potęgi, i dostajemy wniosek:

$$(7) \quad x \text{ oraz } x^{-1} \text{ to liczby } \frac{1}{8} \left( c^2 - 2 \pm \sqrt{c^4 - 4c^2} \right)^3.$$

Rozumowanie można odwrócić. Dla dowolnej liczby naturalnej  $c \geq 2$  określamy wzorami (7) parę liczb rzeczywistych, wzajemnie odwrotnych:  $x$  oraz  $x^{-1}$  (jedna ze znakiem plus w nawiasie, druga ze znakiem minus). Wówczas  $x^{1/3}, x^{-1/3}$  są pierwiastkami trójmianu (6); ich suma wynosi  $c^2 - 2$ . Liczby  $a, b$ , zdefiniowane wzorami (4), spełniają równość (5); a ponieważ  $b = x^{1/3} + x^{-1/3} = c^2 - 2$ , zatem prawa strona wzoru (5) jest kwadratem liczby całkowitej, więc liczba  $a$  jest całkowita (liczba  $b$  oczywiście też).

Wzór (7), z parametrem  $c = 2, 3, 4, \dots$ , przedstawia ogólną postać liczb  $x \in \mathbb{R}$  o rozważanej w zadaniu własności.



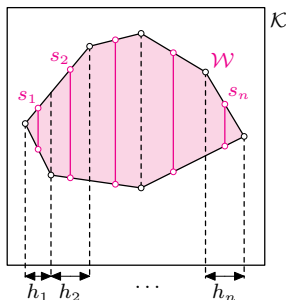
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 753 ( $WT = 3,24$ ) i 754 ( $WT = 1,22$ ) z numeru 1/2018

Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Choczewski	Szczecin	37,31
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,72
Michał Miodek	Warszawa	32,78
Michał Koźlik	Gliwice	32,23
Krzysztof Kamiński	Pabianice	31,60



### Rozwiązanie zadania M 1573.

Poprowadźmy proste równoległe do pewnego boku kwadratu  $\mathcal{K}$  przez wszystkie wierzchołki wielokąta  $\mathcal{W}$  – dzielą one  $\mathcal{W}$  na pewną liczbę trapezów i trójkątów  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n$ . Niech  $s_i$  będzie odcinkiem łączącym środki tych boków wielokąta  $\mathcal{T}_i$ , które nie są równoległe do poprowadzonych prostych, a  $h_i$  – wysokością  $\mathcal{T}_i$  prostopadłą do  $s_i$ .



Wówczas

$$[\mathcal{T}_i] = s_i h_i$$

dla  $i = 1, 2, \dots, n$  oraz

$$[\mathcal{W}] = \sum_{i=1}^n [\mathcal{T}_i],$$

gdzie  $[\mathcal{F}]$  oznacza pole figury  $\mathcal{F}$ . Zauważmy, że gdyby każdy z odcinków  $s_i$  miał długość nie większą od  $\frac{1}{2}$ , to uzyskalibyśmy nierówność

$$[\mathcal{W}] = \sum_{i=1}^n s_i h_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i \leq \frac{1}{2},$$

która stoi w sprzeczności z  $[\mathcal{W}] > \frac{1}{2}$ .

Wobec tego dla pewnego  $i$  mamy  $s_i > \frac{1}{2}$ , czyli  $s_i$  zawiera odcinek o postulowanej własności.

## Prosto z nieba: Lód na Księżycu

Oś rotacji Księżyca wokół własnej osi jest nachylona o  $6,68^\circ$  względem kierunku prostopadłego do płaszczyzny jego okołozemskiej orbity (Księżyc orbituje w płaszczyźnie, która z kolei przecina ekliptykę pod kątem  $5,14^\circ$ ). Jako że okres rotacji Księżyca wokół osi jest zsynchronizowany z okresem orbitalnym (miesiącem księżycowym), widzimy zawsze tę samą, upstrzoną kraterami i ciemnymi plamami (morzami, *maria*, które w istocie są bazaltowymi równinami) stronę satelity. Orbita Księżyca nie jest dokładnie kołowa (ekscentryczność 0,0549), więc jego orbitalna prędkość kołowa nie zawsze jest dokładnie równa prędkości rotacji wokół osi. Ekscentryczność orbity i nachylenie osi obrotu skutkuje cyklicznymi wahaniami – libracją – Księżyca: dzięki temu zamiast 50% jego powierzchni, z Ziemi widać całe 59%. Obszar okołobiegunowy był generalnie słabo poznany przez obserwatorów ziemskich (z powodu niekorzystnego kąta patrzenia) aż do lat 60., gdy sonda Luna 3 (1959), a następnie inne misje zaczęły przysyłać zdjęcia całej (także niewidocznej z Ziemi) powierzchni Księżyca.

Po okresie pionierskich wypraw ludzi na powierzchnię Księżyca w latach 70., napięcie związane z naszym naturalnym satelitą mocno osłabło, a uwaga planetologów została skierowana na inne, dalsze i bardziej tajemnicze obiekty. Cóż jeszcze ciekawego można dowiedzieć się o Księżycu? Okazuje się, że i owszem, ciekawe wyniki czekają w danych zebranych przez sondy wystrzelone jeszcze w poprzednim stuleciu.

Misja NASA Lunar Prospector (Discovery 3) miała na celu obserwacje biegunów Księżyca w poszukiwaniu pokładów lodu wodnego; wystartowała w 1998 roku i zakończyła działalność w 1999 roku, gdy orbiter zderzył się (planowo) z powierzchnią Księżyca. Obecność lodu w okolicach okołobiegunowych została potwierdzona w 1999 roku, ale dopiero ostatnio ciekawa cecha *mapy rozkładu*, stworzona przez Lunar Prospector, zwróciła uwagę badaczy. Rozkład jest niesymetryczny względem biegunów: maksima są przesunięte o około  $5,5^\circ$ , a dodatkowo znajdują się dokładnie po przeciwnych stronach globu. Narzucającym się wyjaśnieniem jest, że pokłady lodu znajdujące się obecnie w okolicy okołobiegunowej powstały w odległej przeszłości dokładnie na biegunach, a potem – z jakiegoś powodu – Księżyc zmienił oś rotacji. Znane (widoczne na powierzchni) uderzenia asteroidów są, niestety, niewystarczające, by obrócić oś aż o  $5,5^\circ$ . Hipoteza, która lepiej pasuje do obserwacji, to masywny wpływ gorącej lawy około 3,5 miliarda lat temu w okolicy obecnego Oceanus Procellarum (Oceanu Burz), znajdującego się na zachodnim skrajnym widocznej strony Księżyca. Gorąca i radioaktywna lava zmieniłaby, przez rozgrzanie części płaszczka Księżyca, rozkład masy na tyle, by zmienić kierunek rotacji. Jeśli to prawda, to księżycowy lód powstał naprawdę dawno temu, podczas formowania się układu słonecznego, a nie – jak się powszechnie uważa – został „dostarczony” na powierzchnię Księżyca przez bombardujące go asteroidy.

Michał BEJGER

## Niebo w sierpniu

Sierpień jest pierwszym miesiącem roku, w którym dzień wyraźnie się skraca na rzecz nocy. Na początku sierpnia w środkowej Polsce dzień trwa 15 godzin i 27 minut, zaś ostatniego dnia miesiąca – 13 godzin i 39 minut. Wysokość Słońca w południe obniży się w tym czasie o ponad  $10^\circ$ . Jak co roku, główną atrakcją sierpnia są promieniujące już od lipca meteory z roju Perseidów. Są to szybkie meteory, ich prędkość zderzenia z atmosferą Ziemi wynosi 59 km/s i często zostawiają za sobą smugi dymu, powoli rozwiewające się w powietrzu.

Stąd, dokumentując fotograficznie Perseidy (i inne roje), warto wykonywać serię co najmniej kilkunastu zdjęć tego samego fragmentu nieba. Gdy ma się szczęście i w trakcie wykonywania zdjęć przeleci meteor, jest szansa na uwiecznienie takiej rozmywającej się smugi. Maksimum aktywności roju przypada co roku w okolicach 12 sierpnia. Można wtedy liczyć na ponad 100 zjawisk na godzinę. Radiant roju w Polsce nie zachodzi, a około godz. 2:30 wznosi się na wysokość ponad  $60^\circ$  nad północno-wschodnim horyzontem. Tym razem Księżyc nie przeszkodzi w obserwacjach, gdyż 11 sierpnia przejdzie przez nów, a potem na niebie wieczornym zajdzie zaraz po Słońcu.



Nów Księżyca przypada prawie dokładnie 19 lat po słynnym nowiu, podczas którego cień Srebrnego Globu przeszedł przez Europę. Tym razem też dojdzie do zaćmienia Słońca, lecz będzie to zaćmienie częściowe, widoczne w Arktyce, środkowej Azji i Skandynawii. Największą fazę, około 74%, da się dostrzec z Wysp Niedźwiedzych na Morzu Wschodniosyberyjskim. W Europie zjawisko można obserwować z Finlandii, Szwecji i Norwegii, przy czym maksymalnie Księżyc zakryje do 34% średnicy tarczy Słońca na krańcach północnych kontynentu i do 50% na Spitzbergenie.

Bezksiężycowe noce wystąpią w drugiej dekadzie miesiąca. Srebrny Glob zacznie sierpień na pograniczu gwiazdozbiorów Wodnika, Ryb i Wieloryba w fazie 85%. Na przełomie miesiący 9° na zachód od niego znajduje się planeta Neptun, która od czerwca przesuwa się ruchem wstecznym i powoli zbliża się do opozycji 7 września. Do końca sierpnia Neptun oddali się od gwiazdy  $\varphi$  Aqr na ponad 2°, zbliżając się jednocześnie na 45' do trójkąta gwiazd 5. i 6. wielkości 81, 82 i 83 Aqr. Jasność samej planety wyniesie +7,8<sup>m</sup>. Księżyc spotka się z Neptunem jeszcze raz 27 i 28 sierpnia, gdy będąc w pełni zbliży się do niego na około 7°.

4 sierpnia Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę i jednocześnie minie Urana w odległości 5,5 stopnia. Siódma planeta od Słońca również szykuje się do opozycji pod koniec października i 7 sierpnia zmieni kierunek ruchu z prostego na wsteczny, zaczynając tym samym najlepszy okres widoczności w tym sezonie obserwacyjnym. Uran przebywa w gwiazdozbiore Barana, kreśląc pętlę ~4,5 stopnia na północny wschód od gwiazdy  $\sigma$  Psc oraz niecałe 8° na południe od gwiazdy Mesarthim, czyli najslabszej gwiazdy głównej figury Barana, ale równocześnie najciekawszej dla astronomów-amatorów, gdyż jest to układ podwójny o separacji składników 8", a więc widoczny już w niedużych teleskopach. W sierpniu jasność planety urośnie do +5,7<sup>m</sup>.

W następnych dniach Księżyc podąży ku nowiu i ze względu na sprzyjające nachylenie ekliptyki do porannego widnokregu będzie można obserwować go prawie do spotkania ze Słońcem. 6 i 7 sierpnia Księżyc w fazie odpowiednio 35 i 25% najpierw utworzy trójkąt równoramienny z Plejadami i Aldebaranem, a kolejnego ranka znajdzie się 5° na wschód od Aldebarana. Dzień przed nowiem na godzinę przed wschodem Słońca Srebrny Glob pokaże fazę 2% i zajmie pozycję na wysokości 4° nad północno-wschodnim widnokregiem. 11° nad nim znajdują się najjaśniejsze gwiazdy Bliźniąt: Polluks i Kastor. Od 5 do 10 sierpnia bardzo ładnie ukaże się tzw. światło popielate Księżyca, czyli nocna część Srebrnego Globu, oświetlona światłem odbitym od Ziemi.

Pod koniec sierpnia na niebie porannym zamelduje się planeta Merkury, która 9 sierpnia przejdzie przez koniunkcję dolną ze Słońcem, a już 17 dni później osiągnie maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą 18°. Planeta zacznie pojawiać się na nieboskłonie w trzeciej dekadzie sierpnia, a 26 sierpnia

na godzinę przed świtem zajmie pozycję na wysokości 5° nad wschodnim widnokregiem. Merkury pozostanie widoczny do pierwszej dekady września, kiedy w małej odległości minie Regulusa, najjaśniejszą gwiazdę Lwa. Przez całą elongację jasność planety szybko urośnie z +1,4<sup>m</sup> 20 sierpnia do -0,7<sup>m</sup> 31 sierpnia. Jednocześnie tarcza planety skurczy się z 9 do 6 sekund kątowych, a faza urośnie z 20 do 61%. Jest to najlepszy okres widoczności porannej Merkurego w całym 2018 roku.

Na niebie wieczornym można obserwować cztery planety Układu Słonecznego: Wenus, Jowisza, Saturna i Marsa. Przy czym pierwsza z planet, mimo maksymalnej elongacji wschodniej 17 sierpnia, wynoszącej 46°, jest dostępna tylko w pierwszej połowie miesiąca. 14 sierpnia 5° nad Wenus przejdzie Księżyc w fazie 6%, ale sama planeta zajdzie niewiele ponad godzinę po Słońcu. Tydzień później o tej samej porze Wenus znajdzie się już pod widnokregiem i z Polski przestanie być widoczna. Planeta świeci blaskiem -4,3<sup>m</sup>, przy tarczy średnicy 22" i fazie 52%.

Natomiast Księżyc po minięciu Wenus dobę później w fazie 24% przejdzie 7° na północ od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, zaś 16 i 17 sierpnia minie Jowisza. Najpierw w fazie 34% znajdzie się 10° na prawo od Jowisza, dobę później, w fazie 45%, 4,5 stopnia nad nim. W tym samym czasie Jowisz minie gwiazdę Zuben Elgenubi w odległości 35'. Sama planeta również widoczna jest coraz słabiej i zachodzi mniej niż 3 godziny po Słońcu. Do końca sierpnia jej jasność spadnie do -1,9<sup>m</sup>, a tarcza zmaleje do 35".

Planeta Saturn wędruje przez zachodnią część gwiazdozbioru Strzelca, a w sąsiednim Wężowniku, znajduje się planetoida (4) Westa. Saturn szykuje się do wykonania zakrętu na swojej pętli i z każdym dniem porusza się coraz wolniej. Planeta zbliży się na mniej niż 2° do pary jasnych mgławic M8 i M20. Do końca miesiąca jasność planety spadnie do +0,4<sup>m</sup>, a tarcza zmniejszy średnicę do 17". Westa już pokonała swój zakręt i do końca miesiąca zbliży się do Saturna na 7°. 21 sierpnia planetoida przejdzie 7' od gwiazdy 5. wielkości 51 Oph, sama mając jasność o 3<sup>m</sup> mniejszą. Księżyc 20 sierpnia przejdzie w fazie 73% niecałe 4° od Westy, dobę później, w fazie 81% w podobnej odległości minie Saturna.

Mars kreśli swoją pętlę w gwiazdozbiore Koziorożca, przy granicy ze Strzelcem, do którego wejrzy na chwilę pod koniec sierpnia, w trakcie zmiany ruchu z wstecznego na prosty. Czerwona Planeta, z racji tego, że jest najbliższą planetą zewnętrzną, porusza się ruchem wstecznym tylko przez 2 miesiące, na miesiąc przed i po opozycji, ale pokonuje w ten sposób największy dystans, ponad 10°. W sierpniu Mars zacznie oddalać się od Ziemi i – jak zawsze – czyni to na tyle szybko, że do końca miesiąca blask planety spadnie do -2,1<sup>m</sup>, a jej tarcza skurczy się do 21". Księżyc spotka się z Marsem 23 sierpnia, gdy w fazie 94% przejdzie ponad 6° na północ od niego.

*Ariel MAJCHER*

## O krowach w polu (magnetycznym)

Czy krowa może służyć jako kompas? Niestety, nie, ale już stado krów jak najbardziej. Okazuje się bowiem, że statystycznie krowy ustawiają się zgodnie z kierunkiem linii pola magnetycznego, tj. północ-południe, z łbami skierowanymi ku północy. Podobne właściwości wykazują też jelenie.

Człowiek od dawna wykorzystywał umiejętności nawigacyjne zwierząt. Dotyczyło to w szczególności ptaków takich jak gołębie, które umożliwiały sprawna i szybką łączność między oddalonymi miejscami. Dość rzec, że w jednej z najważniejszych bitew frontu wschodniego pierwszej wojny światowej, jaka rozegrała się pod Tannenbergiem, użycie niosących wiadomości gołębi uważa się za jeden z czynników, które przesądziły o zwycięstwie armii niemieckiej; Rosjanie eksperymentowali wtedy z nowinką techniczną, jaką było radio, ale zaniedbali szyfrowanie komunikatów. Gloria zwycięskiego wodza otworzyła dowódcy wojsk niemieckich, Paulowi von Hindenburgowi drogę do szczytów politycznych, w tym objęcia stanowiska prezydenta Niemiec.

W jaki sposób ptaki rozpoznają kierunki i wiedzą, gdzie lecieć? Wiadomo, że wykorzystują do tego pole magnetyczne, bo jego zaburzenia prowadzą do dezorientacji ptaków. Sądono niegdyś, że mogą tu być użyteczne sole mineralne zawierające żelazo, jakie odkładają się w dziobach. Okazało się jednak, że, przynajmniej u gołębi, sole te znajdują się w makrofagach, które nie mają skutecznego sposobu komunikowania się z układem nerwowym. Co więcej, badania przeprowadzone na rudzikach wykazały, że nie odróżniają one kierunku północnego od południowego, nie są zatem czułe na zwrot pola magnetycznego. Oznacza to, że intuicja „kompasu w głowie” ptaków, pozwalającego im nawigować w ziemskim polu magnetycznym, jest najprawdopodobniej błędna. Tym bardziej że zdolność orientacji tych ptaków zależy również od natężenia i widma światła w ich otoczeniu.

Jak zatem wyjaśnić umiejętności orientacyjne ptaków na najbardziej podstawowym, mikroskopowym poziomie? Z pomocą przychodzi tu chemia kwantowa. Wyobraźmy sobie układ dwóch związanych cząsteczek, z których każda ma niesparowany elektron. Każdy elektron ma kwantową własność zwaną spinem, czyli fundamentalnym momentem magnetycznym. W przypadku pojedynczego elektronu możemy sobie wyobrazić, że szybko wirujący rozkład ładunku będzie oddziaływał z polem magnetycznym w swym otoczeniu, jednak metafora ta zawodzi, jeśli będziemy rozważać większą liczbę elektronów, na przykład dwa. W typowych reakcjach chemicznych spiny niesparowanych elektronów są skorelowane, przy czym istnieją dwie zasadnicze możliwości wystąpienia takiej korelacji (tzw. stan singletowy

i trypletowy). W zależności od tego, z którą możliwością mamy do czynienia, spiny elektronów oddziałują różnie z polem magnetycznym otoczenia, a także z polem magnetycznym otaczających je atomów. To z kolei prowadzi do różnej reaktywności cząsteczek zawierających takie dwójki elektronów, a to może mieć konsekwencje dla procesów o znaczeniu biologicznym.

Opisany wyżej model wydaje się dość prosty (dla fizyka kwantowego), można zatem zadać pytanie, jakie dokładnie cząsteczki w organizmie mogą mieć pożądane właściwości. Uczciwa odpowiedź brzmi: nie wiadomo. Zależność od oświetlenia wskazuje, że może chodzić o kryptochromy, czyli czułe na światło niebieskie białka zaangażowane w regulację rytmu dobowego u zwierząt. Jak dotąd, pożądaną zależność od pola magnetycznego potwierdzono w laboratorium dla układów cząsteczek zbudowanych z karotenoidów, porfiryn i fulerenów, ale zależności kierunkowe, które mogłyby być odpowiedzialne za orientację, występują jedynie w polach magnetycznych stukrotnie silniejszych od ziemskiego. Osobną sprawą jest to, czy kwantowa natura stanu singletowego i trypletowego może utrzymać się dostatecznie długo – co najmniej dziesiątki mikrosekund – by dawać obserwowalny efekt.

Sprawę dodatkowo komplikuje fakt, że doświadczenia przeprowadzane na różnych gatunkach zwierząt zdają się przynosić sprzeczne rezultaty. W opublikowanej kilka miesięcy temu pracy Ahne Myklatun ze współpracownikami wykazali, że ryby z gatunków danio pręgowany i ryżanka japońska zmieniają kierunek pływania w akwarium pod wpływem pola magnetycznego. Efekt ten występował także w ciemności, co stanowi spore wyzwanie dla hipotezy kryptochromowej.

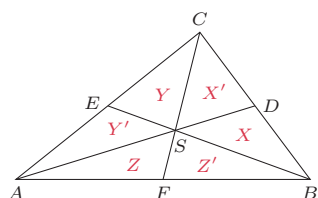
Okazuje się zatem, że pytanie, dlaczego stado krów może służyć jako kompas albo dlaczego ptaki orientują się w nieznanym terenie, jest pytaniem bardzo trudnym, a próby znalezienia na nie odpowiedzi prowadzą, jak dotąd, jedynie do dalszych, coraz bardziej szczegółowych pytań. Widać, że potrzebne jest niestandardowe podejście do problemu i nowe, przełomowe pomysły. Może przyjdą one do głowy którejś z Czytelniczek *Delty*?

Krzysztof TURZYŃSKI

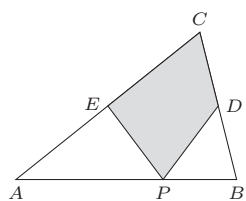
- Wiltshko W. *et al.*, *Lateralization of magnetic compass orientation in migratory bird*, *Nature* 419 (2002) 467.  
 Ritz T. *et al.*, *Resonance effects indicate a radical pair mechanism for avian magnetic compass*, *Nature* 429 (2004) 177.  
 Begall S. *et al.*, *Magnetic alignment in grazing and resting cattle and deer*, *Proc. Natl Acad. Sci. USA* 105 (2008) 13451.  
 Gauger E.M. *et al.*, *Sustained quantum coherence and entanglement in the avian compass*, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 040503.  
 Lambert N. *et al.*, *Quantum biology*, *Nature Physics* 9 (2013) 10.  
 Myklatun A. *et al.*, *Zebrafish and medaka offer insights into the neurobehavioral correlates of vertebrate magnetoreception*, *Nature Communications* 9 (2018) 802.

Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku. Środkowe przecinają się w jednym punkcie, zwanym *środkiem ciężkości* i dzieli on każdą z nich w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka trójkąta (rys. 1).

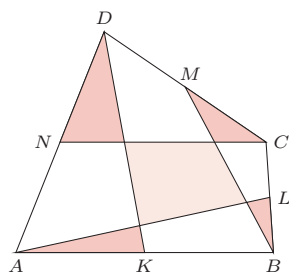
Niech  $[F]$  oznacza pole figury  $F$ .



Rys. 1. Punkty  $D, E, F$  to środki boków,  $X, X', Y, Y', Z, Z'$  oznaczają pola.

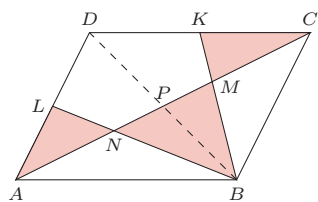


Rys. 2

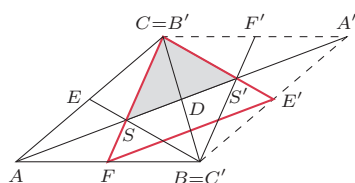


Rys. 3

Inne rozwiązanie zadania 4 znaleźć można w *deltoide* 11/2009. Polecam również zad. 8 tamże i zad. 1 z *deltoidu* 5/2016.



Rys. 4



Rys. 5.  $X'$  oznacza obraz punktu  $X$ .

Wzór Herona na pole trójkąta:  
 $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , gdzie  $a, b, c$  to boki,  $p$  – połowa obwodu.

- Wykaż, że środkowa dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.
- Punkty  $D$  i  $E$  są środkami odpowiednio boków  $BC$  i  $CA$  trójkąta  $ABC$ , punkt  $P$  leży na boku  $AB$  (rys. 2). Wyznacz możliwe wartości  $[PDCE] : [ABC]$ .
- Punkty  $K, L, M, N$  są środkami boków czworokąta wypukłego  $ABCD$  (rys. 3). Wykaż, że suma pól ciemnych trójkątów równa jest polu jasnego czworokąta.
- Wykaż, że środkowe dzielą trójkąt na sześć trójkątów o równych polach.
- Punkt  $T$  należy do wnętrza trójkąta  $ABC$  oraz  $[ABT] = [BCT] = [CAT]$ . Wykaż, że  $T$  jest środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$ .
- Dany jest równoległobok  $ABCD$ . Punkty  $K$  i  $L$  są środkami boków  $CD$  i  $DA$ . Proste  $BK$  i  $BL$  przecinają przekątną  $AC$  odpowiednio w punktach  $M$  i  $N$ . Wykaż, że  $[ALN] + [BMN] + [CKM] = \frac{1}{3}[ABCD]$  oraz że  $AN = NM = MC$ .
- Wykaż, że ze środkowych dowolnego trójkąta można zbudować trójkąt.
- Wyznacz pole trójkąta o środkowych długości: (a) 9, 12, 15, (b) 12, 15, 18.
- W trapezie  $ABCD$  podstawa  $AB$  jest dwa razy dłuższa od podstawy  $CD$ . Punkt  $Q$  jest środkiem przekątnej  $AC$ , a prosta  $BQ$  przecina bok  $AD$  w punkcie  $P$ . Wyznacz  $[PQCD] : [ABCD]$ .

## Rozwiązania i wskazówki

W rozwiązaniach zadań o trójkątach przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1.

**R1.** Trójkąty  $CFA, CFB$  mają podstawy równe  $\frac{1}{2}AB$  i wspólną wysokość z  $C$ .  $\square$

**R2.**  $[PDCE] : [ABC] = 1 : 2$ , gdyż  $[PDC] = [PDB]$  oraz  $[PEC] = [PEA]$ .  $\square$

**R3.** Odcinki  $AL$  i  $CN$  są środkowymi odpowiednio w trójkątach  $ABC$  i  $CDA$ . Stąd i z zadania 1 mamy  $[ABL] + [CDN] = \frac{1}{2}[ABC] + \frac{1}{2}[CDA] = \frac{1}{2}[ABCD]$ . Podobnie  $[BDK] + [BDM] = \frac{1}{2}[ABCD]$ . Zatem  $[ABL] + [CDN] = [BMDK]$ , co, po odjęciu od obu stron ich części wspólnej, kończy dowód.  $\square$

**R4.** Z zadania 1 mamy  $Z = Z'$ , gdyż  $SF$  jest środkową w trójkącie  $ABS$  (rys. 1). Analogicznie  $X = X'$  i  $Y = Y'$ . Ale także  $X + X' + Z' = Y + Y' + Z$ , bo  $CF$  jest środkową trójkąta  $ABC$ , co wobec powyższego daje  $X = Y$ . Podobnie  $Y = Z$ .  $\square$

**R5.** Można przyjąć, że  $T$  leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta  $ABS$ . Wtedy jeśli  $T \neq S$ , to  $[ABT] < [ABS]$ . Z treści zadania wynika, że  $[ABT] = \frac{1}{3}[ABC]$ , a z zadania 4 wiemy, że  $[ABS] = \frac{1}{3}[ABC]$ . Stąd  $[ABT] = [ABS]$ , więc  $T = S$ .  $\square$

**R6.** Niech przekątne równoległoboku mają wspólny środek  $P$  (rys. 4). Odcinki  $AP$  i  $BL$  oraz  $CP$  i  $BK$  są zatem środkowymi odpowiednio w trójkątach  $ABD$  i  $BCD$ . Trójkąty te mają pola równe  $\frac{1}{2}[ABCD]$  i na mocy zadania 4 ich środkowe dzielą każdy z nich na sześć trójkątów o równych polach. Stąd  $[ALN] + [BMN] + [CKM] = (\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}) \cdot \frac{1}{2}[ABCD] = \frac{1}{3}[ABCD]$ . Ponadto  $AN = \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC$ , podobnie  $MC = \frac{1}{3}AC$ , więc też  $NM = \frac{1}{3}AC$ .  $\square$

**R7.** Obróćmy trójkąt  $ABC$  o  $180^\circ$  wokół punktu  $D$  (rys. 5). Boki trójkąta  $CFE'$  mają długości  $FE' = \frac{1}{2}AA' = AD$ ,  $CE' = BE$  oraz  $CF$ .  $\square$

**R8.** (a) Niech  $AD = 15$ ,  $BE = 12$ ,  $CF = 9$ . Obróćmy trójkąt  $ABC$  o  $180^\circ$  wokół punktu  $D$  (rys. 5). Trójkąt  $SS'C$  ma wówczas boki o długościach  $SS' = 2 \cdot \frac{1}{3}AD = 2 \cdot 5$ ,  $S'C = \frac{2}{3}BE = 2 \cdot 4$  oraz  $CS = \frac{2}{3}CF = 2 \cdot 3$ , jest więc prostokątny. Stąd jego pole równe jest  $\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) = 24$ . Jednocześnie na mocy zadania 4 wiemy, że pole to równe jest  $\frac{2}{6}$  pola trójkąta  $ABC$ , zatem  $[ABC] = 72$ .  $\square$

**Wskazówka 8.** (b) Postępuj analogicznie, skorzystaj z wzoru Herona.

**Wskazówka 9.** Narysuj równoległobok  $ABCE$ .

