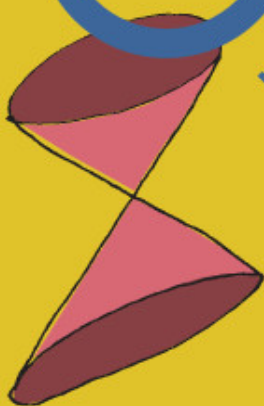


$$f(z) = f(z+a) = f(z+b)$$



$$SL(2, \mathbb{R})$$

$$\sum \frac{1}{1+e^{2kx}} = 1$$

**W środku
artykuł Iana Stewarta
o matematyczce
Maryam Mirzakhani**






str. 1



W następnym numerze piszemy o nierównościach społecznych.



SPIS TREŚCI NUMERU 4 (527)

| | | |
|---|-----------------|---|
| Maryam Mirzakhani 3 maja 1977–14 lipca 2017 <i>Ian Stewart</i> | str. 1 | |
| Jak uczciwie wygrać w Blackjacku? <i>Rafał Marks</i> | str. 6 | |
| Co widzą głębokie sieci neuronowe? <i>Patryk Miziula</i> | str. 8 | Miesięcznik <i>Delta</i> – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego. |
|  Dzieci trojga rodziców <i>Magdalena Fikus</i> | str. 10 | Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiak, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki. |
|  Bajka o złożoności obliczeniowej i sprytniej Agatce <i>Krzysztof Piccuch</i> | str. 11 | Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski. |
|  Resztki <i>Łukasz Rajkowski</i> | str. 13 | Adres do korespondencji: Instytut Matematyki UW, Redakcja <i>Delty</i> , ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402. |
| 25 lat Olimpiady Informatycznej <i>Krzysztof Diks</i> | str. 14 | Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia; rysunki techniczne: Stanisław Walczak. |
| Jak wykręcić salamandrę? <i>Anna Leń, Marcin Michorzewski</i> | str. 16 | Skład systemem \TeX wykonała Redakcja. |
|  Zadania | str. 17 i 18 | Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216, p. 101, 01-460 Warszawa. |
| Patrzysz, ale czy widzisz? <i>Piotr Krzyżanowski</i> | str. 18 | |
| Informatyczny kącik olimpijski (114): <i>Magie</i> | str. 19 | PRENUMERATA |
| Klub 44 | str. 20 | Garmond Press: www.garmondpress.pl |
| Prosto z nieba: Proxima Centauri | str. 22 | Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje) RUCH S.A.: www.ruch.com.pl , infolinia 804-200-600 Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.: Cena prenumeraty w 2018 roku wynosi 4 zł za egzemplarz. |
| Niebo w kwietniu | str. 22 | Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl |
| Bestiariusz informatyczny (4) | str. 24 | Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7 ⁰⁰ –17 ⁰⁰ . Koszt połączenia wg taryfy operatora. |
|  Wysokości czworokąta <i>Joanna Jaszczńska</i> | str. 25 | |

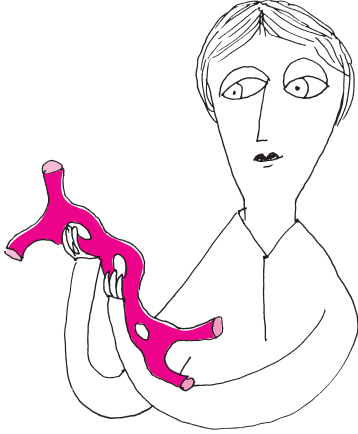
Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.
Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl
Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Maryam Mirzakhani

3 maja 1977–14 lipca 2017

* członek Royal Society

Ian STEWART*, specjalnie dla Delty



W matematyce nie przyznaje się Nagrody Nobla, jednakże od ustanowienia w 1936 roku Medalu Fieldsa (od nazwiska kanadyjskiego matematyka Johna Charlesa Fieldsa) wyróżnienie to stało się najważniejszą nagrodą w tym obszarze badań. Fields uczestniczył w jej powstaniu, zaprojektował towarzyszący jej medal i pozostawił funduszowi Medalu Fieldsa kwotę 47 000 dolarów kanadyjskich. Finansowy dodatek do Medalu to 15 000 dolarów kanadyjskich, znacznie mniej niż 8 milionów szwedzkich koron (około 800 000 euro) przyznawanych w ramach Nagrody Nobla, mimo to w oczach matematyków prestiż tego wyróżnienia jest nie mniejszy. Obecnie w matematyce przyznawana jest także Nagroda Abela oraz inne wysoko cenione wyróżnienia, jednak najdłuższa tradycja stoi za Medalem Fieldsa.

W 1936 roku medalistami Fieldsa zostali Lars Ahlfors i Jesse Douglas. Po dłuższej przerwie, w 1950 roku medale zdobyli Laurent Schwarz oraz Atle Selberg. Od tamtej pory są one przyznawane co cztery lata 2–4 matematykom i wręczane na Międzynarodowych Kongresach Matematyków. Pierwszą kobietę nagrodzono Medalem Fieldsa dopiero w 2014 roku. Była nią Maryam Mirzakhani, urodzona w Iranie, pracująca na Uniwersytecie Stanforda w Stanach Zjednoczonych. Jej wielce obiecującą karierę przerwała w 2017 roku śmierć spowodowana rakiem piersi. Miała zaledwie 40 lat. To, co było tragedią dla matematyki, znacznie mocniej dotknęło jej rodzinę: męża i 6-letnią wówczas córkę Anahitę.

Maryam Mirzakhani urodziła się w Teheranie 3 maja 1977 roku jako córka Ahmada, inżyniera elektryka. Jej wybitne zdolności ujawniły się bardzo wcześnie. Edukację rozpoczęła w teherańskiej szkole Farzanegan, prowadzonej przez Narodową Organizację Rozwoju Wybitnych Talentów (której nazwa sama się tłumaczy). W 1994 roku znalazła się wśród uczestników Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, elitarnych corocznych zawodów matematycznych dla licealistów, i jako pierwsza kobieta z Iranu zdobyła złoty medal. W kolejnym roku uzyskała na Międzynarodowej Olimpiadzie komplet punktów i ponownie złoty medal, czego wcześniej nie dokonał nikt z Iranu.

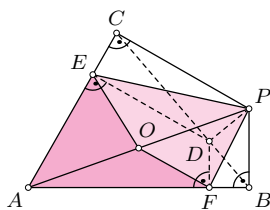
W 1999 roku Mirzakhani ukończyła studia matematyczne na Uniwersytecie Technologicznym Sharif, nazywanym często „irańskim MIT”, czołowej irańskiej uczelni w zakresie nauk inżynierskich i fizycznych. Podjęła studia doktoranckie w Stanach Zjednoczonych pod opieką naukową Curtisa McMullena, medalisty Fieldsa. McMullen zajmował się dynamiką zespoloną, geometrią hiperboliczną i tematami pochodnymi, w tych obszarach rozpoczęła też badania Maryam Mirzakhani. W 2004 roku dołączyła do zespołu badawczego w Clay Mathematics Institute (w Cambridge w stanie Massachusetts) i uzyskała stanowisko profesorskie w Princeton. Wyszła za mąż za Jana Vondráka, czeskiego informatyka zajmującego się także zastosowaniami matematyki, zatrudnionego na Uniwersytecie Stanforda. Mirzakhani przeniosła się na tę uczelnię w 2008 roku.

Dziedzina, którą uprawiała, teoria przestrzeni moduli powierzchni Riemanna, jest bardzo techniczna, zatem opisanie jej zajmie nam trochę miejsca. Zaczniemy od liczb zespolonych i analizy zespolonej. Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, zatem nie istnieją rzeczywiste pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych. Jednakże w połowie XVI wieku włoscy algebraicy zaczęli dostrzegać matematyczny sens pierwiastków kwadratowych z liczb ujemnych, choć ich znaczenie fizyczne pozostawało niejasne. Kluczowym momentem stało się wprowadzenie nowego rodzaju liczby, liczby „urojonej”, oznaczanej dziś jako i , której kwadrat jest równy -1 . Prowadzi to do liczb zespolonych postaci $x + iy$, na których działania wykonuje się zgodnie ze znanymi regułami algebraicznymi, uwzględniając, że i^2 trzeba zastąpić przez -1 .





Rozwiązanie zadania M 1562.
Oznaczmy przez P punkt symetryczny do A względem O , czyli taki punkt, że odcinek AP jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC .



Wówczas $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ACP = 90^\circ$, wobec czego $DF \parallel BP$ oraz $DE \parallel CP$. Stąd $[BDF] = [PDF]$ oraz $[CDE] = [PDE]$, a zatem

$$\begin{aligned} [BCEOF] &= [BDF] + [CDE] + [DEOF] = \\ &= [PDF] + [PDE] + [DEOF] = \\ &= [PEOF], \end{aligned}$$

gdzie $[F]$ oznacza pole figury F .
Ponieważ punkt O jest środkiem odcinka AP , więc $[POF] = [AOF]$ oraz $[POE] = [AOE]$ i w konsekwencji

$$\begin{aligned} [PEOF] &= [POF] + [POE] = \\ &= [AOF] + [AOE] = [AEOF]. \end{aligned}$$

Ostatecznie więc $[BCEOF] = [AEOF]$, co jest równoznaczne z tezą zadania.



Rozwiązanie zadania M 1563.
Niech $a_k = f^{(k)}(0)$, gdzie $f^{(k)}$ oznacza k -krotne złożenie funkcji f . Z warunków zadania wynika, że dla pewnego $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ mamy $a_k \equiv 0 \pmod{p}$. Jeżeli $k < p$, to

$$a_{k+1} = f(a_k) \equiv f(0) = a_1 \pmod{p},$$

co nie może mieć miejsca, gdyż reszty z dzielenia przez p wyrazów ciągu (a_1, a_2, \dots, a_p) są parami różne. To oznacza, że $a_p \equiv 0 \pmod{p}$, czyli $a_1 \equiv f(a_p) \pmod{p}$.

Przypuśćmy nie wprost, że $p \nmid a - 1$, czyli $\text{NWD}(a - 1, p) = 1$. Wówczas istnieją takie liczby całkowite c, d , że

$$(a - 1)c + pd = 1.$$

W szczególności $(a - 1)c \equiv 1 \pmod{p}$, czyli $ac - 1 \equiv c \pmod{p}$. Z warunków zadania wynika, że dla pewnego $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ mamy

$$a_k \equiv -bc \pmod{p}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} f(a_k) &\equiv -abc + b = -b(ac - 1) \equiv \\ &\equiv -bc \equiv a_k \pmod{p}, \end{aligned}$$

czyli $a_{k+1} \equiv a_k \pmod{p}$ (gdzie w razie potrzeby przyjmujemy $a_{p+1} = a_1$). To stoi w sprzeczności z założeniem, że reszty z dzielenia przez p wyrazów ciągu (a_1, a_2, \dots, a_p) są parami różne.

Ostatecznie ta nowa koncepcja uzyskała ściśle podstawy w XIX wieku, dzięki Carlowi Friedrichowi Gaussowi i Williamowi Rowanowi Hamiltonowi: liczba zespolona to para liczb rzeczywistych (x, y) , a działania na takich parach określają konkretne reguły. Motywację dla takiej definicji stworzyli poprzednicy, interpretując liczby zespolone jako punkty płaszczyzny, tak jak to robili Caspar Wessel w 1797 roku i Jean-Robert Argand w 1808. Jednak już dużo wcześniej matematycy starali się ambitnie zajść dalej. W 1702 roku Jan Bernoulli próbował obliczyć całkę z odwrotności funkcji kwadratowej $\int \frac{dx}{x^2 + ax + b}$.

Gdy funkcja kwadratowa rozkłada się na dwa czynniki liniowe rzeczywiste, można jej odwrotność rozłożyć na sumę ułamków prostych, co prowadzi do wyrażeń logarytmicznych. Gorzej, gdy takiego rozkładu na czynniki rzeczywiste nie ma, jak w przypadku funkcji $x^2 + 1$. Istnieją jednak czynniki zespolone $(x + i)(x - i)$ i w takim przypadku Bernoulli stosował logarytmy zespolone, nie wyjaśniając, co oznaczają. W 1712 roku wdał się w tej kwestii w zażarty spór z Gottfriedem Wilhelmem Leibnizem, który uważał, że logarytm liczby ujemnej powinien być liczbą zespoloną, podczas gdy Bernoulli nalegał, iż jest to liczba rzeczywista. W 1749 roku Leonhard Euler przyznał rację Leibnizowi. Bernoulli, broniąc przeciwnego poglądu, zapomniał o tym, że całka nieoznaczona jest dana z dokładnością do stałej, która w tym przypadku jest liczbą zespoloną. Tak więc, na przykład, $\ln(-1) = \pi i$, a nie 0, jak sądził Bernoulli.

Atakowanie analizy funkcji zespolonych przed dobrym opanowaniem algebry liczb zespolonych wyglądało na próbę biegania przed nauką chodzenia. Analiza była jednak o wiele ciekawsza, zapowiadała potencjalne korzyści w fizyce matematycznej, gdzie można byłoby ją stosować do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, takich jak równanie Laplace'a, ważne w badaniach grawitacji, magnetyzmu czy elektryczności.

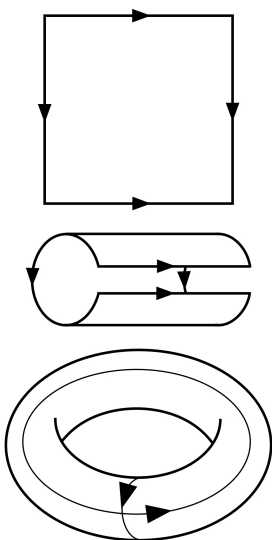
Euler zdawał sobie sprawę z tego, że choć $\ln(-1) = \pi i$, to jest to tylko jedna z nieskończenie wielu możliwych wartości. Istotnie, z równości $(-1)^3 = -1$ wynika, że $\ln(-1)$ musi być także równy $3\pi i$. Czy zatem $3 = 1$? Gdyby tak było, liczby zespolone okazałyby się absurdalne. Euler wszakże tak nie uważał. Przecież pierwiastkami kwadratowymi z 1 są zarówno $+1$, jak i -1 , co wcale nie skłania nas do utożsamienia tych liczb i deklarowania, że pierwiastki kwadratowe to nonsens. Pierwiastek kwadratowy jest po prostu wielowartościowy i podobnie, jak twierdził Euler, jest z logarytmem zespolonym, z tym, że o ile pierwiastek kwadratowy ma co najwyżej dwie wartości, o tyle logarytm ma ich nieskończenie wiele. W szczególności logarytmem liczby -1 jest każda liczba postaci $n\pi i$ dla nieparzystej liczby całkowitej n . Z kolei, podnosząc do kwadratu, widzimy, że $\ln 1$ (o którym wiemy, że jest równy 0) to każda liczba postaci $n\pi i$ dla parzystej liczby całkowitej n . Znana nam wartość pojawia się dla $n = 0$, ale równie dobrze moglibyśmy przyjąć 2, 4, 6, albo nawet $-2, -4, -6$ i tak dalej.

I teraz sprawa się komplikuje, jako że cokolwiek robimy w analizie zespolonej, na przykład, całkujemy funkcję wzdłuż krzywej na płaszczyźnie zespolonej, musimy zdecydować, którą wartość funkcji chcemy rozpatrywać. Gdy przesuujemy się po krzywej, ma sens zmienianie tej wartości w sposób ciągły, co prowadzi do ciekawej sytuacji. Jeśli, powiedzmy, zaczniemy od 1 i będziemy się przesuwać po okręgu jednostkowym w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, rozpatrywana liczba $z = x + iy$ powraca do wartości 1. Jednocześnie jej logarytm $\ln z$, zmieniając się w sposób ciągły, musi rosnąć od 0 do $2\pi i$, a po powrocie do punktu wyjścia wartość funkcji może różnić się od wartości początkowej.

Decydujący krok wykonał tu Bernhard Riemann, wybitny myśliciel, geometra i autor pojęcia, które dziś nazywamy powierzchnią Riemanna. W przypadku logarytmu to coś w rodzaju spiralnych schodów, zakręcających się wokół środka płaszczyzny zespolonej i wspinających się o jeden poziom z każdym pełnym obrotem. Gdy z przesuwa się na poziomie parteru wzdłuż okręgu na płaszczyźnie zespolonej, $\ln z$ pokonuje zakręt na spiralnych schodach i trafia piętro wyżej. Tak więc to geometria powierzchni decyduje o tym, którą z wielu wartości należy rozpatrywać. Podobnie jest z pierwiastkiem kwadratowym, z tym, że tu

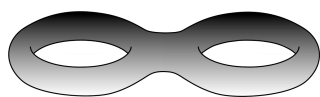
mamy tylko dwa zakręty, a drugie piętro jest „tym samym” co parter: po dwóch obrotach wartość pierwiastka kwadratowego wraca do wartości początkowej.

Podstawowe pojęcia analizy zespolonej, takie jak różniczkowanie lub całkowanie wzdłuż krzywych, można uogólnić na powierzchnie Riemanna, stanowiące naturalny kontekst dla analizy zespolonej, gdyż rozwiązują problemy wynikające z wielowartościowości funkcji. To ich najistotniejsza właściwość. Niektóre powierzchnie Riemanna są „zwarte”: nie mają brzegu, jednak zajmują skończony obszar, czego przykładem może być sfera Riemanna, czyli płaszczyzna zespolona „uzwarcona” przez dodanie punktu „w nieskończoności”. Inny przykład wiąże się z funkcjami eliptycznymi, a więc takimi funkcjami zespolonymi f , że $f(z) = f(z + a) = f(z + b)$ dla wszystkich z , gdzie a i b są dwiema niezależnymi liczbami zespolonymi. Wówczas wartości funkcji powtarzają się w dwóch kierunkach na płaszczyźnie zespolonej, co dzieli tę płaszczyznę na nieskończenie wiele jednakowych „kaflów” w kształcie równoległoboku, z których jeden ma wierzchołki w punktach 0 , a , b oraz $a + b$. Na każdym kafle funkcja przyjmuje te same wartości, wystarczy zatem wiedzieć, jak zachowuje się na jednym. Podwójna okresowość oznacza, że funkcja przyjmuje te same wartości na przeciwnych bokach kafła, a więc – po utożsamieniu przeciwnych boków – można wszystko sprowadzić do jednego kafła. Z topologicznego punktu widzenia wynikiem takiej konstrukcji jest torus, co pokazuje rysunek dla przypadku, gdy kafle są kwadratami.

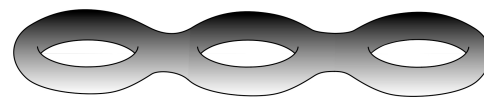


Po utożsamieniu przeciwnych boków kwadratu otrzymujemy torus.

Zwartymi powierzchniami Riemanna są: sfery, torusy, torusy z dziurami. Liczbę g dziur nazywa się *genusem*. I tak, 0 jest genusem sfery, 1 genusem zwykłego torusa i co najmniej 2 jest genusem torusa z g dziurami, gdy $g > 1$.



Torus z dwiema dziurami ($g = 2$)



Torus z trzema dziurami ($g = 3$)

Struktura powierzchni Riemanna nie ogranicza się do topologii. W szczególności można w niej operować pojęciem odległości lub *metryki*. Geometria takiej metryki może być:

- euklidesowa – powierzchnią jest, na przykład, płaszczyzna zespolona lub tzw. „płaski” torus,
- eliptyczna – jedna z dwóch nieeuklidesowych geometrii, odpowiadająca powierzchni o dodatniej krzywiznie, jak sfera Riemanna,
- hiperboliczna – druga z nieeuklidesowych geometrii, odpowiadająca powierzchni o ujemnej krzywiznie, jak torus z g dziurami dla $g \geq 2$ lub torus bez jednego punktu.

Jak widać, powierzchnie Riemanna stanowią bardzo obszerną dziedzinę matematyki, łączącą wiele rozmaitych pojęć.

Aby dokonać klasyfikacji wszystkich możliwych powierzchni Riemanna (ustalonego typu), matematycy wymyślili *przestrzeń moduli*, której każdy punkt reprezentuje określoną powierzchnię Riemanna. Taka przestrzeń ma swoją topologię, można zatem zdefiniować w niej pojęcie bliskości dwóch powierzchni, pozwalające opisać, co dzieje się z daną strukturą, gdy przekształca się ją w sposób ciągły w bliskie jej struktury tego samego typu.

Przyjrzyjmy się prostej analogii. Przypuśćmy, że zajmujemy się okręgami na płaszczyźnie. Każdy okrąg jest jednoznacznie wyznaczony przez trzy liczby: dwie współrzędne środka (x, y) , które są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, oraz nieujemny promień z . Przestrzeń moduli okręgów składa się więc ze wszystkich takich trójek (x, y, z) liczb rzeczywistych, że $z \geq 0$. Topologicznie rzecz biorąc, jest to iloczyn kartezjański płaszczyzny \mathbb{R}^2 i nieujemnej półprostej rzeczywistej \mathbb{R}^+ . Dwa okręgi uznamy za bliskie w przestrzeni moduli, jeśli ich środki są blisko na płaszczyźnie oraz bliskie są długości ich promieni. To rozsądne wymaganie.



Rozwiązanie zadania M 1561.

Przypuśćmy nie wprost, że

$$abc > a^2 + b^2 + c^2.$$

Wówczas w szczególności $abc > a^2$, skąd $bc > a$ i analogicznie $ca > b$ oraz $ab > c$. Ponadto mamy

$$0 \leq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac,$$

a więc

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Łącząc te nierówności otrzymujemy

$$a^2 + b^2 + c^2 > a + b + c,$$

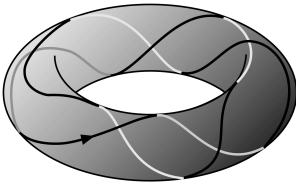
co z kolei w połączeniu z przyjętym założeniem nie wprost prowadzi do

$$abc > a + b + c.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Doszliśmy wreszcie do historycznego punktu wyjścia dla badań Mirzakhani, możemy więc spróbować zrozumieć, co rzeczywiście zrobiła. W 2002 roku znalazła nowy dowód Hipotezy Wittena, dotyczącej przestrzeni moduli wszystkich krzywych algebraicznych. Edward Witten postulował istnienie związków między tą przestrzenią a niektórymi kwantowymi teoriami pola oraz całkowalnymi układami dynamiki hamiltonowskiej. Brak miejsca nie pozwala na głębsze wyjaśnienia, ale, w uproszczeniu, układ dynamiczny jest całkowalny, gdy zachowuje się w sposób regularny, niechaotyczny. Hipotezę Wittena pierwszy udowodnił Maxim Kontsevich w 1992 roku i dowód ten stał się jednym z wyników, które przyniosły mu Medal Fieldsa.

Mirzakhani przedstawiła odmienny dowód, oparty na wzorze odkrytym przez Grega McShane'a. Rozważmy torus z usuniętym jednym punktem i nadajmy mu hiperboliczną strukturę geometryczną, traktując usunięty punkt jako punkt „w nieskończoności”. Taka powierzchnia zawiera wiele zamkniętych geodezyjnych, czyli ścieżek o najmniejszej długości, zamykających się jak okrąg (wyobraźmy sobie owinięcie powierzchni elastyczną taśmą). Wszystkie takie ścieżki można podzielić na klasy homotopii tak, że dwie ścieżki należą do tej samej klasy, jeśli jedną z nich można przekształcić w drugą w sposób ciągły (wyobraźmy sobie popchnięcie elastycznej taśmy w nowe położenie). W przypadku torusa klasę homotopii wyznaczają dwie liczby całkowite: ile razy ścieżka przewija się przez dziurę torusa oraz ile razy zawija się wokół „korpusu” torusa.



Ta krzywa na torusie przewija się pięć razy przez dziurę i zawija się dwa razy wokół korpusu.

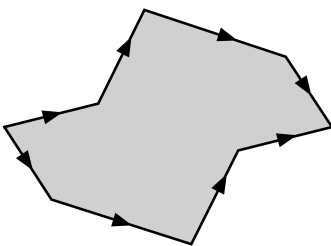
Równość McShane'a stwierdza, iż

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{1 + e^{l(\gamma)}} = 1,$$

gdzie γ przebiega listę zamkniętych geodezyjnych, zawierającą po jednej z każdej klasy homotopii, a $l(\gamma)$ oznacza długość geodezyjnej γ . Mirzakhani użyła tej równości do ustalenia wzoru na objętość $V_{g,n}(L_1, \dots, L_n)$ przestrzeni moduli wszystkich powierzchni genusu g z n geodezyjnymi krzywymi brzegowymi o danych długościach L_1, \dots, L_n . Objętość okazuje się być wielomianem względem kwadratów tych długości, którego współczynnikami są wymierne wielokrotności potęg liczby π . Wielomiany te kodują informację topologiczną o przestrzeni moduli i spełniają te same relacje co niektóre wielomiany występujące w Hipotezie Wittena. Umożliwiło to zupełnie odmienny nowy dowód Hipotezy.

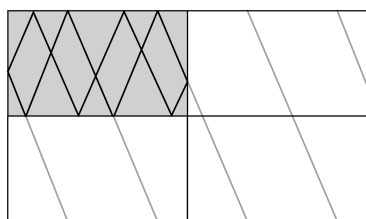
Nowe metody Mirzakhani doprowadziły ją do wzorów określających częstość występowania geodezyjnych różnych topologicznych typów. Na przykład, dokładnie $1/7$ wszystkich zamkniętych pętli na torusie genusu 2 ma tę własność, że rozcięcie wzdłuż pętli rozspójnia torus.

Później Mirzakhani zajęła się dynamiką w przestrzeniach moduli, w których punkty (reprezentujące krzywe lub inne obiekty topologiczne) poruszają się zgodnie z określonymi regułami (wyobraźmy sobie znowu elastyczną taśmę wędrującą po powierzchni pod wpływem danych sił). Badała, na przykład, przestrzenie moduli powierzchni translacyjnych, stanowiących uogólnienie konstrukcji torusa przez sklejenie przeciwległych boków kwadratu – zamiast kwadratu bierze się dowolny wielokąt na płaszczyźnie, który ma parami równoległe boki równej długości, skleja się boki z tej samej pary. Dochodzi jeszcze dodatkowy warunek: po sklejeniu łączny kąt wokół każdego wierzchołka musi być całkowitą wielokrotnością 2π .



Powierzchnia translacyjna

Linijowe przekształcenie płaszczyzny o wyznaczniku 1 zachowuje równoległość i równą długość w parach boków, zatem takie przekształcenia działają jak grupa symetrii przestrzeni moduli. Tę grupę oznacza się symbolem $SL(2, \mathbb{R})$. Można teraz pytać o powierzchnie translacyjne, które da się otrzymać z powierzchni danej za pomocą takich przekształceń; dokładniej, jakie powierzchnie można dowolnie blisko przybliżyć taką przekształconą powierzchnią (leżą w domknięciu orbity tej powierzchni w $SL(2, \mathbb{R})$)? Zasadne wydaje się przypuszczenie, że tworzą one jakiś rodzaj skomplikowanego fraktala, ale jest to przypuszczenie błędne, jak wykazała Mirzakhani w pracy wspólnej z Alexem Eskinem i Amirem Mohammadm. Odpowiedź poprawna: takie powierzchnie tworzą rozmaitość,



Powtarzalne odbijanie trajektorii bili (czarna linia) o brzeg stołu bilardowego (zacieniowany) przekształca ją w geodezyjną (szare linie) na dwa razy większym prostokącie z utożsamionymi przeciwległymi bokami. Geodezyjna ta jest zamknięta.

Pod adresem www.ams.org/profession/mirzakhani znajdują się linki do licznych artykułów o Maryam Mirzakhani. Niniejszy artykuł wiele zawdzięcza bardziej rozbudowanemu tekstowi autorstwa Caroline Series „Maryam Mirzakhani and her work”, Mathematics Today, October 2017, 192–194.

czyli wielowymiarowy odpowiednik powierzchni, określoną układem równań liniowych. Bardziej technicznie, autorzy udowodnili *The Magic Wand Conjecture* (hipotezę czarodziejskiej różdżki, teraz już twierdzenie): domknięcie orbity dowolnej płaskiej powierzchni translacyjnej w $SL(2, R)$ jest algebraicznym orbifoldem. Wcześniej McMullen udowodnił to dla powierzchni genusu 2.

Dowód tego wyniku jest niezwykle trudny, a główna jego część wymaga setki stron subtelnej analizy. Mimo technicznego charakteru ma wiele zastosowań. Dostarcza, na przykład, nowych informacji o bilardzie na dowolnym wielokącie (wyobraźmy sobie stół bilardowy, którego brzeg jest jakimś wielokątem; co się dzieje z bilą, która odbija się od boków nieskończenie wiele razy?). Przykład może się wydać frywolny, jednakże dynamika bilardu ma kluczowe znaczenie w dynamice chaosu i niektórych obszarach teorii kwantów. W szczególności, niektóre trajektorie biegają po torze zamkniętym, a więc powtarzają swoje zachowanie w nieskończoność (dynamika okresowa), inne zaś są „ergodyczne” i gęsto wypełniają pewien obszar (dynamika chaosu). To rozróżnienie ma w dynamice fundamentalne znaczenie; bilard dostarcza użytecznych układów do badania takich różnic oraz przyczyn ich powstawania.

Związek z powierzchniami translacyjnymi najprościej zauważyć, gdy stół jest prostokątny. Odbijając prostokąt w odpowiednich bokach, otrzymujemy prostokąt dwa razy większy. Jeśli w ten sam sposób odbijemy trajektorię bili, powstanie zamknięta geodezyjna na powierzchni translacyjnej, otrzymanej przez utożsamienie przeciwległych boków większego prostokąta. Podobna konstrukcja działa też dla dowolnej powierzchni translacyjnej.

Kolejnym przykładem interpretacji bilarda jest problem oświetlenia pokoju: ile żarówek potrzeba, by każdy punkt danego pokoju był oświetlony? Żarówki uznajemy za punkty, promienie świetlne biegają prostoliniowo i odbijają się od ścian jak bile w bilardzie. Odpowiedź na to pytanie można zacząć od ustalenia, które części pokoju są oświetlone przez jedną żarówkę w dowolnym położeniu. Odwołując się do twierdzenia czarodziejskiej różdżki, Samuel Lelièvre, Thierry Monteil i Barak Weiss udowodnili, że w dowolnym pokoju w kształcie translacyjnego wielokąta i dowolnego położenia pojedynczej żarówki pozostawia ona tylko skończenie wiele punktów nieoświetlonych.

Maryam Mirzakhani była niezwykle uzdolnioną matematyczką, wysoce oryginalną, zdecydowaną uderzać w rzeczywiście trudne problemy uprawianej dziedziny. Jej badania połączyły ważne obszary czystej matematyki, matematyki stosowanej, fizyki matematycznej, jej nowe metody przynosiły przełom za przełomem. Nie możemy wiedzieć, co by osiągnęła, gdyby dożyła sędziwego wieku. Możemy jednak cieszyć się z pozostawionych przez nią pomysłów i twierdzeń, z bogatego matematycznego spadku, na którym budować będą następne pokolenia.

tłumaczył Wiktor BARTOL

LVIII Szkoła Matematyki Poglądowej*

*odbędzie się 24–28 sierpnia 2018 roku pod Warszawą. Szczegóły można znaleźć na stronie www.smp.uph.edu.pl.

Jaki związek ma nierozwiązywalność (przez pierwiastniki) równań wielomianowych stopnia powyżej 4 z niekonstruowalnością pewnych wielokątów foremnych? Skąd się wzięła teoria pierścieni? Co było źródłem analizy matematycznej i rachunku wariacyjnego?

O umiejętności dostrzegania analogii będzie mowa na LVIII Szkole. Miejscu otwartym dla wszystkich,

którzy są z matematyką związani, niezależnie od tego, czy jej uczą, uprawiają ją, piszą o niej, czy tylko się nią pasjonują. Szczególnie mile widziani są młodzi matematycy, którzy uczą bądź chcą uczyć w szkołach wyższych.

Matematyk wybitny potrafi dostrzegać analogie między faktami, zaś matematyk genialny – analogie między analogiami.

(prawdopodobnie) *Stefan BANACH*

Jak uczciwie wygrywać w Blackjacku?

Rafał MARKS*

*doktorant, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet
Warszawski

Czy można ograć kasyno? Nałogowi gracze zastanawiają się nad tym problemem od dawna. Wszystkie gry w kasynie mają ujemną wartość oczekiwaną dla klienta. Przynajmniej tak się ludziom wydawało aż do lat 60., kiedy ukazało się kilka książek o tym, jak można, stosując odpowiednią strategię, uzyskać dodatnią wartość oczekiwaną w grze Blackjack. To ogromnie spopularyzowało grę i paradoksalnie okazało się korzystne dla branży hazardowej. Mechanizm został przedstawiony w filmie „21”, jednak bez żadnych szczegółów. W tym artykule przedstawię dokładniej, jak ta strategia działa.

Na początek wyjaśnię pokrótce podstawowe zasady gry. Gra się przy użyciu talii kart. Chodzi o to, żeby zbierać jak najwięcej punktów, ale nie więcej niż tytułowe 21. Blotki dają tyle punktów, ile wynosi ich wartość, figury liczą się po 10, a As jest kartą specjalną – liczy się za 1 lub 11, w zależności od tego, co jest dla nas korzystniejsze. Dwóch graczy dobiera karty tak długo, aż spasują. Wynik gracza to suma punktów z kart lub 0 w przypadku, gdy suma jest większa niż 21 (przekroczenie 21 nazywamy „fura”). Jak gra przebiega w kasynie? Gracz gra przeciwko krupierowi. Na początku krupier odkrywa jedną swoją kartę. Potem gracz dobiera karty. W każdym momencie ma dwie możliwości: dobrać (*Hit*, *H*) lub spasować (*Stand*, *S*). Gdy gracz przekroczy 21, automatycznie przegrywa. Jeśli spasuje przed osiągnięciem 21, dobiera krupier. Gra on strategią taką, że dobiera kolejną kartę wtedy i tylko wtedy, gdy ma 16 lub mniej punktów. Na koniec porównujemy wyniki gracza i krupiera (o ile ten drugi nie przekroczył 21, wtedy gracz wygrywa automatycznie). Wygrywa ten, kto ma więcej punktów, możliwy jest też remis. Specjalnie traktowany jest tzw. blackjack (BJ), czyli 21 złożone z dwóch kart (As z dziesiątką lub figurą). Przed grą gracz deklaruje stawkę (np. 1 złoty), którą przegrana strona wypłaci wygranej.

W rzeczywistości kasyno daje graczowi dodatkowe możliwości poza *Hit* i *Stand*.

Grając taką samą strategią jak krupier, gracz w każdej grze ma wartość oczekiwaną około -6% , tzn. za każde postawione 100 złotych traci średnio 6 złotych w jednej grze. Skąd się to bierze? Kasyno wygrywa również w sytuacji, gdy obaj gracze przekroczą 21 (gdy gracz przekroczy, to krupier nawet nie odkrywa swoich kart).

Zastanówmy się, jak można tę przewagę zredukować. Pierwszym pomysłem jest zastosowanie innej strategii prostej, tzn. dociągać karty, aż osiągniemy jakąś założoną wcześniej liczbę punktów, np. 15. W ten sposób nie da się jednak zniwelować przewagi kasyna, można ją co najwyżej powiększyć. Ze strategii prostych najlepszą jest ta, którą stosuje krupier.

Spróbujmy wykorzystać fakt, że krupier odsłania nam swoją pierwszą kartę. Wpływ tej karty na wynik krupiera obrazuje poniższa tabela, w której zawarłem prawdopodobieństwa tego, że krupier osiągnie dany wynik, jeśli znamy jego pierwszą kartę:

| Karta krupiera | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | BJ | Fura |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|
| A | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,05 | 0,31 | 0,12 |
| 2 | 0,14 | 0,13 | 0,13 | 0,12 | 0,12 | 0 | 0,35 |
| 3 | 0,14 | 0,13 | 0,13 | 0,12 | 0,11 | 0 | 0,37 |
| 4 | 0,13 | 0,13 | 0,12 | 0,12 | 0,11 | 0 | 0,39 |
| 5 | 0,12 | 0,12 | 0,12 | 0,11 | 0,11 | 0 | 0,42 |
| 6 | 0,17 | 0,11 | 0,11 | 0,1 | 0,1 | 0 | 0,42 |
| 7 | 0,37 | 0,14 | 0,08 | 0,08 | 0,07 | 0 | 0,26 |
| 8 | 0,13 | 0,36 | 0,13 | 0,07 | 0,07 | 0 | 0,24 |
| 9 | 0,12 | 0,12 | 0,35 | 0,12 | 0,06 | 0 | 0,23 |
| 10 | 0,11 | 0,11 | 0,11 | 0,34 | 0,03 | 0,08 | 0,21 |



Widzimy, że gdy krupier ma kartę „środkową” (3, 4, 5 lub 6), to ma spore prawdopodobieństwo fury. Bierze się to z tego, że w talii występuje najwięcej



Rozwiązanie zadania F 949.

Prędkość odbijającej się cegły w momencie, gdy odrywa się ona od piłki, jest równa prędkości najwyższego punktu piłki. Oznaczmy ją przez v . Po odbiciu cegła porusza się swobodnie w polu siły ciężkości i zgodnie z zasadą zachowania energii mamy $Mv^2/2 = MgH$, gdzie H to wysokość, na którą podskoczy cegła, a M – masa cegły. Stąd znajdujemy

$v = \sqrt{2gH}$. Prędkość najniższego punktu piłki w momencie, gdy cegła odrywa się od piłki, wynosi zero. Stąd, z dobrym przybliżeniem, prędkość środka piłki wynosi $v/2$. Dla piłki mamy więc z zasady zachowania energii $m(v/2)^2/2 = mgh$, gdzie h to wysokość, na którą podskoczy piłka, a m – masa piłki, i stąd $h = H/4 \approx 25$ cm.

kart o wartości 10 (figury i dziesiątki), więc, na przykład, z 6 często otrzymamy 16, a stąd z kolei już tylko mały krok do przekroczenia 21.

Nasza strategia będzie polegać na tym, że w sytuacji, gdy krupier z dużym prawdopodobieństwem przekroczy 21, będziemy stosować strategię pasowania jak najszybciej, a w przeciwnym przypadku strategię krupiera. Tabela poniżej pokazuje, która ze strategii prostych jest optymalna przy znanej karcie krupiera (strategią prostą n nazywam strategię polegającą na dobieraniu kart, aż uzyskam wynik co najmniej n , a potem pasowaniu).

| Karta krupiera | Strategia |
|----------------|-----------|
| A | 17 |
| 2 | 14 |
| 3 | 13 |
| 4 | 13 |
| 5 | 12 |

| Karta krupiera | Strategia |
|----------------|-----------|
| 6 | 12 |
| 7 | 17 |
| 8 | 17 |
| 9 | 17 |
| 10 | 17 |

Ta idea stoi u podstaw tzw. *strategii podstawowej*. Dokładny jej opis (z uwzględnieniem dodatkowych możliwości dawanych przez kasyno graczowi) można znaleźć np. w Wikipedii. Gdy gramy strategią podstawową, przewaga kasyna spada do około 0,5%. To nas jeszcze nie zadowala. Chcielibyśmy spowodować, że to gracz, a nie kasyno, będzie miał przewagę, tzn. gra będzie miała dodatnią wartość oczekiwaną z punktu widzenia klienta.

Szansę na pokonanie kasyna daje nam fakt, że w rzeczywistości nie jest tak, że każde rozdanie rozgrywane jest od nowa przetasowaną talią. Kolejne rozdanie odbywa się kartami, które nie zostały użyte w poprzednim. Bardzo uważny obserwator może zatem zapamiętać, jakie karty zostały w talii. Na tej podstawie można zmodyfikować strategię.

Przykład: powiedzmy, że w talii pozostały w dużej większości karty o wartości 10. Wówczas, gdy odkrytą kartą krupiera jest 2, 3, 4, 5 lub 6, mamy niemal pewność, że będzie miał furę (gdyż może dobrać praktycznie tylko 10, a poniżej 17 się nie zatrzyma). W takim przypadku będziemy tylko unikać przekroczenia i wygrywać z dużą pewnością.

W rzeczywistości zapamiętanie dokładnie, jakie karty „schodziły” (jak np. w brydżu) jest niemożliwe. Stosuje się uproszczone metody obliczania, jak dobra jest dana talia dla gracza. Najprostszy stosowany sposób to:

- 2, 3, 4, 5, 6 mają wartość +1,
- 7, 8, 9 mają wartość 0,
- As, 10 i figury mają wartość -1.

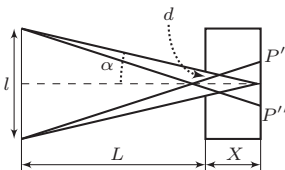
Sumujemy wartości dla wszystkich schodzących kart, otrzymując tzw. wartość bieżącą. Im jest ona większa, tym bardziej opłacalna dla nas staje się gra (w filmie „21” taka sytuacja była określana mianem *Hot deck*). Już przy wartości +2 gracz uzyskuje przewagę nad kasynem. Można to wytłumaczyć tym, że duża wartość bieżąca oznacza, iż w talii pozostało sporo dużych kart i zwiększa się prawdopodobieństwo, że krupier będzie miał furę, podczas gdy gracz, wiedząc o nadchodzących dużych kartach, będzie pasował nawet z marnym wynikiem. Czytelnik Wnikliwy może zauważyć, że średnio nasz licznik i tak wynosi 0. Jak zatem zapewnić sobie zyski z gier *Hot* talią? Pomysł polega na tym, że gdy licznik jest ujemny, gramy na małe stawki, a gdy zrobi się istotnie dodatni, podnosimy stawkę (tzn. gramy kolejne gry np. o 100 złotych zamiast o 1 złoty). Odpowiednio manewrując stawkami, możemy wreszcie osiągnąć upragnioną przewagę.

Nic prostszego, od jutra możemy zatem iść do kasyna i zacząć wygrywać miliony. Niestety, nie do końca. Aby nauczyć się sprawnego liczenia kart oraz zmieniających się strategii, potrzeba zdolności szybkiego liczenia oraz dużo pracy. Poza tym kasyna zaczęły się lekko bronić przed „liczącymi”, na przykład wprowadzając grę kilkoma taliami lub wprowadzając maszyny do tasowania po każdym rozdaniu. Lepiej zatem spróbować pewniejszego sposobu na wygranie fortuny, na przykład przez rozwiązanie jednego z problemów milenijnych. . .



Rozwiązanie zadania F 950.

Camera obscura to nieprzezroczysta skrzynka z niewielkim otworkiem z przodu i matówką albo kliszą fotograficzną zamykającą ją od tyłu. Na kliszę, przez otworek działający jak obiektyw w aparacie fotograficznym, padają promienie pochodzące od poszczególnych punktów fotografowanego obiektu, tworząc jego pomniejszony obraz. Aby na fotografii było widać osobne tygrysie pręgi, obszary kliszy P' i P'' , na które padają promienie pochodzące od najbliższych punktów sąsiednich pręg, nie mogą się przekrywać. Warunek ten będzie spełniony dla głębokości kamery $X > d/2 \tan \alpha$.



Ponieważ $\tan \alpha = (l/2)/(L + X)$, więc $X > d(L + X)/L$, skąd $X > dL/(L - d)$. Korzystając z tego, że $d/l \ll 1$, otrzymujemy $X > dL/l$. Tak więc głębokość kamery powinna być większa niż 20 cm.

Co widzą głębokie sieci neuronowe?

Patryk MIZIUŁA *

W ciągu ostatnich kilku lat świat naukowo-techniczny nauczył się uczyć tzw. głębokie sieci neuronowe rozpoznawania treści obrazów. Rezultaty są spektakularne: dobrze nauczony model potrafi znaleźć na obrazku wszystkie zwierzęta i rozróżnić ich gatunki, przerobić zwykłe zdjęcie tak, żeby wyglądało na namalowane przez Picassa, czy domalować brakujący kawałek przedmiotu, którego nigdy wcześniej „nie widział”. A wszystko opiera się na prostym przepisie: weź model matematyczny (nieskomplikowany pojęciowo, ale o wielkiej liczbie parametrów), dodaj jak najwięcej mocy obliczeniowej (w praktyce kart graficznych), poczekaj.

Obraz może być przechowywany w wersji elektronicznej jako zbiór pikseli (obraz rastrowy) lub krzywych matematycznych (obraz wektorowy). Obrazy wektorowe mają lepsze własności niż rastrowe (np. skalują się bez utraty jakości), niestety, potrafią odwzorowywać w zadowalający sposób jedynie względnie proste obiekty (np. logotypy). Dlatego w fotografii i uczeniu maszynowym używa się obrazów rastrowych. To, co my widzimy na monitorze jako kolorowy rastrowy obrazek, dla komputera jest *tensor*em, czyli trójwymiarową tablicą, o wymiarach $n \times m \times 3$, składającą się z pikseli. Trzeci wymiar odpowiada trzem kanałom kolorów – czerwonemu, zielonemu i niebieskiemu. Każdy z $n \cdot m \cdot 3$ pikseli jest liczbą ze zbioru $\{0, 1, \dots, 255\}$. Im większa liczba, tym większe „natężenie” danego koloru w danym miejscu obrazka.

W artykule *Głębokie uczenie maszyn*, Δ_{18}^1 , Paweł Gora opisuje mechanikę głębokich sieci neuronowych. W niniejszej notce opowiem o kilku ich popularnych i efektywnych zastosowaniach w zagadnieniach, w których danymi są obrazki.

Klasyfikacja

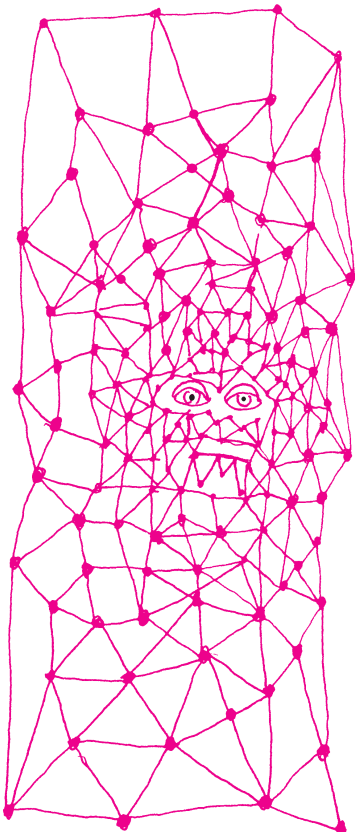
W zadaniu klasyfikacyjnym algorytm wie, że na obrazku jest obiekt należący do jednej ze znanych kategorii (np. pies, kot lub chomik) i jego zadaniem jest wskazanie, do której z nich rzeczywiście należy. Ścisłej rzecz ujmując, obrazkowi przypisywane są prawdopodobieństwa należenia do poszczególnych kategorii (np. pies 70%, kot 20%, chomik 10%).

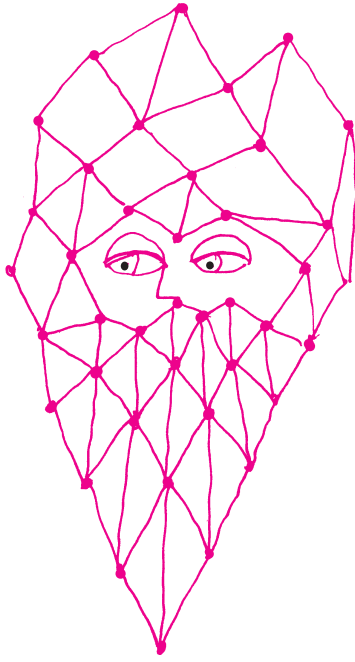
Ciekawym przykładem problemu klasyfikacji był konkurs *Right Whale Recognition* zorganizowany w 2015 roku przez NOAA Fisheries. Organizacja ta dostarczyła zdjęcia lotnicze ukazujące wszystkie 447 żyjących sztuk waleń biskajskich (*Eubalaena glacialis*). Zdjęcia wykonane zostały o różnych porach dnia, przy różnej pogodzie, z różnych kątów itd. Każdy waleń występował średnio na około 10 zdjęciach. Celem konkursu było stworzenie algorytmu rozpoznającego, który z 447 waleń jest na danym zdjęciu. Nieskromnie wspomnę, że firma *deepsense.ai* wygrała ten konkurs, budując algorytm przewyższający skutecznością specjalistów zatrudnionych do „ręcznego” rozpoznawania tych wielorybów. Nasz program w 87% przypadków trafnie wskazywał wieloryba, natomiast dla 95% zdjęć prawidłowy wieloryb znajdował się w pierwszej piątce waleń uznanych za najbardziej prawdopodobne.

Wykrywanie obiektów

W tym zagadnieniu celem jest wykrycie na zdjęciu wszystkich obiektów danego rodzaju. Można np. zażądać od algorytmu, żeby narysował ramki wokół wszystkich samochodów, czyli tak naprawdę żeby podał współrzędne lewych górnych i prawych dolnych rogów wszystkich ramek.

Na zdjęciu przedstawiającym zwykłą ulicę samochody mogą być różnych typów (osobowe, dostawcze, zabawkowe), różnych marek, wielkości, kolorów. Mogą być widziane od przodu, z boku, z tyłu, częściowo zasłonięte, tylko częściowo mieszczące się w kadrze itd. Dla człowieka to nie kłopot, on rozumie, czym jest samochód, więc go rozpozna. Okazuje się, że głębokie sieci neuronowe też





nie mają z tym problemów. Spisują się na tyle dobrze, że są szeroko używane np. w autonomicznych – czyli niesterowanych przez człowieka – pojazdach.

Segmentacja

Segmentacja polega na wskazaniu granic nieregularnych obszarów zdjęcia przedstawiających interesujące nas obiekty. Innymi słowy, każdy piksel obrazka oznaczony jest jako należący bądź nienależący do interesującej nas kategorii.

Dobrym przykładem jest wskazanie na zdjęciu satelitarnym, gdzie dokładnie sięgają pola uprawne albo które dokładnie wiodą drogi. Oprócz narzucającego się zastosowania, czyli sprawnego sporządzania elektronicznych map, monitorowania sytuacji po klęskach żywiołowych itp. segmentacja odgrywa rolę m.in. w medycynie, a dokładniej w diagnostyce obrazowej. Algorytmy wskazują na zdjęciach z prześwietleń (również na „zdjęciach” w 3D) zasięg zmian rakowych lub innych patologicznych zmian, objętość danego typu tkanki itp. Trudno porównać, czy robią to lepiej od lekarzy (to dyskusja na osobny artykuł), ale na pewno robią to sprawniej, wyręczając ludzi w żmudnych zadaniach.

Uczenie ze wzmocnieniem

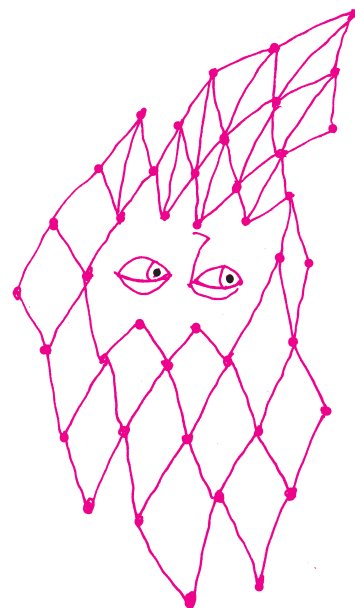
Od jakiegoś czasu prowadzone są intensywne badania nad automatami grającymi w proste gry z platformy Atari jedynie na podstawie obrazków ukazujących bieżący stan gry. Innymi słowy, algorytmy nie znają „sensu” ani mechaniki gry, nie wiedzą też np., czym w grze skutkuje wybranie akcji „wciśnij na klawiaturze strzałkę w prawo”. Jedyne, co otrzymują, to „zrzut ekranu” z gry po każdym swoim ruchu. To musi wystarczyć im do nauki.

Aktualnie bazujące na obrazach algorytmy, wykorzystujące tzw. model uczenia ze wzmocnieniem, są już w stanie pojąć w grach Atari proste zależności typu „trzeba najpierw zdobyć kluczyk, żeby móc otworzyć drzwi”. Oczywiście daleko im jeszcze do korzystających z innego typu danych sztucznych kolegów ogrywających ludzi najlepszych na świecie w szachy, go czy pokera, ale postęp w czasie jest wyraźny i zapewne za parę lat sytuacja mocno się zmieni.

Przeniesienie stylu

Przeniesienie stylu jest jednym z najbardziej efektywnych zastosowań głębokich sieci neuronowych w ostatnich latach. Styl jest „pobierany” z obrazu referencyjnego i „aplikowany” do treści innego obrazu. Rezultaty są fenomenalne. Na przykład po prawej widzimy Monę Lisę stylizowaną na obraz Picassa.

Innych istniejących zastosowań głębokich sieci neuronowych (nie tylko w analizie obrazu) można by wymienić jeszcze wiele. Dziś największym problemem w tego typu zagadnieniach jest wciąż niedostateczna moc obliczeniowa. Niemniej, jeśli prawo Moore’a pozostanie prawdziwe jeszcze przez jakiś czas, czyli jeśli dostępna moc obliczeniowa wciąż będzie się podwajać co dwa lata, dzięki głębokim sieciom neuronowym za kilkanaście lat prawdopodobnie będziemy żyć w zupełnie innym, inteligentnie zautomatyzowanym świecie.



Dzieci trojga rodziców

Genetyczna inżynieria człowieka zyskała nowy impuls. Poza „przymierzaniem się” do zastosowania metody CRISPR-cas do leczenia oddzielnych tkanek lub zarodków ludzkich rozpoczęto próby leczenia chorób mitochondrialnych dzięki procedurze „trojga rodziców”. Do precedensowego zezwolenia prawnego na jej stosowanie doszło w Wielkiej Brytanii w wyniku głosowania w parlamencie w 2015 roku. Chodzi o uniknięcie śmiertelnych, nieuleczalnych genetycznych chorób wywołanych mutacjami mitochondrialnego DNA (mtDNA). Brytyjskie zezwolenie nie dotyczy wszystkich szpitali i klinik, jedynie tych zweryfikowanych przez komisję Badań Zapłodnienia i Biologii Zarodków (HFEA), która za każdym razem rozpatrzy konkretne przypadki.

Wspomnianą procedurę przeprowadzono po raz pierwszy w 2015 r. w Meksyku i wiadomo już, że w jej wyniku urodził się zdrowy chłopiec, któremu groziła dziedziczna neuropatia nerwu wzrokowego Lebera. Prawdopodobnie podobne postępowanie wdrożono w 2017 r. w stosunku do kolejnych 20 przypadków. Jednak prawodawcy meksykańscy nie zamierzają w przyszłości dopuszczać do tego postępowania.

O co naprawdę chodzi w tej historii trojga rodziców?

Mitochondria to niewielkie organelle, obecne we wszystkich komórkach eukariotycznych. Istnieje, rodem z fantastyki naukowej, hipoteza, że były to niegdyś niezależne bakterie, które wniknęły do wnętrza innych komórek i tam już zostały, uwsteczniając się funkcjonalnie. Pozostawiły sobie jedynie najważniejszą życiową funkcję komórki, wytwarzanie energii, przekazując też część swoich genów do DNA jądrowego. U człowieka w każdej komórce (poza erytrocytami) występuje od kilkuset do kilku tysięcy mitochondriów, każdy niesie kilka cząsteczek małego, kolistego mtDNA zawierającego jedynie 37 genów, z których 13 koduje enzymy cyklu oddechowego. Pierwsza patogeniczna mutacja w mtDNA opisana została w 1988 roku, do dziś zidentyfikowano blisko 300 innych. Decydują dramatycznie o stanie tkanek o wysokim zapotrzebowaniu energetycznym (mięśnie, centralny układ nerwowy) we wspólnych rodzajach miopatii, encefalopatii i neuropatii. Ocenia się, że występują u jednej na 15 000 osób.

Przebieg replikacji mtDNA, a także ich segregacja do potomnych komórek po podziale są niezwykle złożone i nie do końca poznane. Stąd też trudność w diagnostyce chorób mitochondrialnych i w przypisaniu określonych niewydolności do mtDNA. Diagnostykę, która z definicji nie może być powszechnie stosowana, opiera się na metodach molekularnej charakterystyki DNA i białek. Jeżeli większość mitochondriów niesie szkodliwe mutacje, może to prowadzić do poważnych, nieuleczalnych i śmiertelnych chorób. Część z nich wiąże się ze zmianami w DNA z mitochondriów, część ze zmianami mtDNA włączonego do DNA jądrowego.

Liczba mitochondriów na komórkę i wielkość ich DNA jest różna w różnych gatunkach roślin i zwierząt i nawet u danego osobnika może się zmieniać w zależności od tkanki i aktualnych potrzeb energetycznych organizmu. W ludzkich komórkach rozrodczych jedynie komórka jajowa ma mitochondria (nieliczne mitochondria plemnika ulegają zniszczeniu w pierwszych etapach embriogenezy), zatem dziecko, niezależnie od płci, dziedziczy mitochondria po matce. Zapewne Czytelnikowi przyjdą na myśl ciekawe wnioski o historii naszego gatunku, płynące z badań mitochondriów współczesnych ludzi, z hipotezą mitochondrialnej Ewy i kreśleniem prehistorycznych światowych szlaków migracji na czele.

Projekt terapii genetycznej „trojga rodziców” ograniczony jest do wymiany mitochondriów zarodka. Zabieg zastąpienia polega na tym, że przenosi się jądro komórki jajowej kobiety niosącej groźne mutacje w DNA mitochondrialnym do pozbawionej jądra komórki jajowej kobiety ze zdrowymi mitochondriami, i dokonuje zapłodnienia in vitro. Trzecim rodzicem tego zarodka stała się kobieta – dawczyni mitochondriów. O dalszych postępowaniach w tym kierunku zadecydują wyniki pierwszych eksperymentów, bo trzeba powiedzieć otwarcie: są to eksperymenty na ludziach. Podlegają na świecie dogłębnej analizie medycznej, ale także etycznej.

Magdalena FIKUS



mała delta

Bajka o złożoności obliczeniowej i sprytniej Agatce

Za siedmioma górami, za siedzioma rzekami – gdzieś pod Warszawą – znajduje się niewielka miejscowość. W tej miejscowości stoi mały domek. A tak się składa, że w domku tym mieszkają Bartek i Agatka wraz z rodzicami.

Bartek jest starszy od Agatki. Chodzi do prestiżowego liceum w stolicy i startuje w różnych konkursach programistycznych. Rodzice są bardzo dumni z Bartka i na ostatnie urodziny kupili mu wyjątkowo drogi komputer do nauki. Komputer ten ma procesor, pamięć RAM i wszystkie inne bajery, jakie tylko można sobie wyobrazić.

Agatka jest bardzo zapatrzona w brata. Chce być taka jak on. Od Bartka dostała jego stary komputer. Wprawdzie klawiatura jest brudna, komputer jest bardzo przestarzały i często się zawiesza, jednak nie powstrzymuje to Agatki przed nauką programowania.



Ostatnio Agatka znalazła w bibliotece książkę dotyczącą podstaw algorytmiki. Pierwszy rozdział książki był poświęcony złożoności obliczeniowej. Autorzy książki tłumaczyli, że są dwie metody sprawdzania, który algorytm działa szybciej. Pierwsza z nich to metoda empiryczna. Polega ona na napisaniu dwóch programów, uruchomieniu ich na danych testowych i zmierzeniu czasu każdego z nich. Metoda ta ma wiele wad. Różne wyniki można otrzymać w zależności od tego, na jakim komputerze uruchomimy program, jaka będzie architektura procesora, jaka będzie struktura pamięci komputera, jakich kompilatorów użyjemy, w jakich językach napiszemy programy, jaki będzie rozmiar danych testowych, jakie dane testowe użyjemy czy jakie liczby wygeneruje generator liczb losowych. Mówiąc prościej – wynik eksperymentu może zależeć od wielu czynników. Przede wszystkim jednak wadą tej metody jest to, że najpierw należy oba programy napisać na komputerze – co w przypadku skomplikowanych algorytmów może okazać się czasochłonne.

Drugą metodę autorzy tłumaczą na przykładzie poniższego programu:

| | | |
|---------------|-------|-------|
| wczytaj a | m_1 | 1 |
| wczytaj b | m_1 | 1 |
| c := 0 | m_2 | 1 |
| dopóki a > 0 | m_3 | a |
| b' := b | m_4 | a |
| dopóki b' > 0 | m_3 | a · b |
| c := c + 1 | m_5 | a · b |
| b' := b' - 1 | m_6 | a · b |
| a := a - 1 | m_6 | a |
| wypisz c | m_7 | 1 |

Jeśli chcielibyśmy ustalić, ile czasu zajmie komputerowi obliczenie powyższego programu, musielibyśmy wiedzieć, ile milisekund zajmuje mu wykonanie każdej z instrukcji. Ponieważ to zależy od komputera

Milisekunda to jedna tysięczna część sekundy.



(a jak napisali autorzy książki: „my chcemy zajmować się algorytmami, a nie maszynami liczącymi”), ustalimy sobie pewne stałe. Założymy, że instrukcja `wczytaj a` wykona się na komputerze w m_1 milisekund, instrukcja `c := 0` wykona się w m_2 milisekundy, i tak dalej. Następnie chcemy policzyć, ile razy (w najgorszym przypadku) wykonywana będzie dana instrukcja przez komputer. Dla przykładu: instrukcja `wczytaj a` wykona się 1 raz, natomiast instrukcja `c := c + 1` wykona się $a \cdot b$ razy. Można obliczyć, że program będzie wykonywać się przez następującą liczbę milisekund:

$m_1 + m_1 + m_2 + a \cdot m_3 + a \cdot m_4 + a \cdot b \cdot m_3 + a \cdot b \cdot m_5 + a \cdot b \cdot m_6 + a \cdot m_6 + m_7$,
co można zapisać krócej jako:

$$a \cdot b \cdot (m_3 + m_5 + m_6) + a \cdot (m_3 + m_4 + m_6) + 2 \cdot m_1 + m_2 + m_7.$$

Teraz będziemy się zastanawiać, co się będzie działo, gdy wartości a oraz b będą bardzo duże. Można zauważyć wtedy, że pierwszy i drugi składnik będą tak dużo większe od trzeciego, że trzeci będzie w porównaniu z nimi pomijalnie mały. Pomińmy go zatem:

$$a \cdot b \cdot (m_3 + m_5 + m_6) + a \cdot (m_3 + m_4 + m_6).$$

Teraz spróbujemy sobie wyobrazić, co się stanie, gdy wartości a oraz b będą naprawdę bardzo, bardzo duże. Wtedy pierwszy składnik sumy będzie na tyle duży, że wartość drugiego składnika stanie się w porównaniu z nim pomijalnie mała. Zatem i ją pomińmy:

$$a \cdot b \cdot (m_3 + m_5 + m_6).$$

Ponieważ, jak wielokrotnie autorzy książki już wspominali, chcemy zajmować się algorytmami, a nie komputerami – pomińmy dodatkowo współczynnik w nawiasie:

$$a \cdot b.$$

Otrzymaliśmy coś, co informatycy nazywają asymptotyczną złożonością obliczeniową algorytmu. Mówi się czasem, że algorytm działa w czasie $O(a \cdot b)$, albo że algorytm ma złożoność $O(a \cdot b)$. Metoda ta ma dwie podstawowe zalety. Po pierwsze – bardzo łatwo ją zastosować. Tak naprawdę nie potrzebujemy nawet powtarzać wszystkich tych kroków, które poczyniliśmy. Wystarczy, że spojrzymy na algorytm i zastanowimy się, która instrukcja będzie wykonywana najczęściej przez program. W naszym przykładzie jest to linijka `c := c + 1` i faktycznie jest ona wykonywana dokładnie $a \cdot b$ razy. Po drugie, łatwo na podstawie złożoności określić, który algorytm będzie działał szybciej. I to jeszcze przed napisaniem go na komputerze! Dla przykładu: algorytm działający w czasie $O(a \cdot b)$ działa wolniej od algorytmu $O(a + b)$, a ten z kolei od algorytmu ze złożonością $O(a)$. Oczywiście, metoda ta ma również wady. Po pierwsze, mówi ona, co się dzieje dla dużych danych. O tym, który algorytm działa szybciej dla małych danych, nie mówi nic. Po drugie, jeśli dwa algorytmy mają taką samą złożoność – nie dowiemy się, który działa krócej.

Uzbrojona w nową wiedzę Agatka postanowiła wyzwać swojego brata na pojedynek. Założyła się z bratem, że jej program sortujący zadziała na jej wolnym komputerze szybciej niż program sortujący Bartka na jego superkomputerze. Bartek bez zastanowienia przyjął zakład. Napisanie programu zajęło mu 5 minut. Agatce natomiast zajęło to cały dzień. Bartek nie wiedział jednak, że Agatka wie, że Bartek zna tylko jeden algorytm sortowania. W książce przeczytała też, że złożoność tego algorytmu to $O(n^2)$. W rozdziale dalej z kolei był podany algorytm sortowania o złożoności $O(n \log_2 n)$.

Kto wyjdzie z tego pojedynku zwycięsko? Bartek jest świetnym programistą. Stała ukryta w złożoności programu Bartka wynosi $1/10$. Ponadto Bartek tak zaprogramował swój algorytm, że jest on w stanie pracować równolegle na wszystkich czterech rdzeniach jego komputera bez żadnych

Dodatkowo pomija się stałe lub niektóre elementy sumy. Na przykład, jeśli najczęściej wykonywaną instrukcją komputer wykonywałby $2 \cdot a \cdot b + a$ razy, to złożoność wciąż wynosiłaby $a \cdot b$.

Logarytm to operacja odwrotna do potęgowania: $\log_2 a = b \iff a = 2^b$.

dotychczasowych narzutów czasowych. Każdy z rdzeni jego komputera taktuje z częstotliwością 2,5 GHz. Agatka nie jest jeszcze taką dobrą programistką jak jej starszy brat. Stała ukryta w złożoności programu Agatki wynosi 20. Komputer Agatki to bardzo stary Commodore 64 z procesorem taktującym z częstotliwością 1 MHz. Wydawać by się mogło, że Agatka nie ma żadnych szans. Jednak sprytna siostra zażądała, żeby sortowali oboje wszystkich ludzi na świecie. W sumie około 8 000 000 000 nazwisk.

Komputery będą działały długo i trochę wody w Wiśle upłynie, zanim rodzeństwo dowie się, kto wygrał zakład. My to obliczymy już teraz. Przyjmując dodatkowe założenia, możemy obliczyć, że program Agaty będzie się liczył około $3,6 \cdot 10^6$ sekund, natomiast program Bartka $6,4 \cdot 10^8$ sekund. Mówiąc bardziej obrazowo: program Agatki skończy się liczyć w półtora miesiąca, natomiast program Bartka będzie się liczył ponad 20 lat.

$$(1/10) \cdot (8 \cdot 10^9)^2 / 10 \text{ GHz} = 64 \cdot 10^{17} / 10^{10} = 6,4 \cdot 10^8$$

Krzysztof PIECUCH

Resztki

– *Skończyłam!* – krzyknęła triumfalnie Agatka do swojego brata, Bartka. Dziewczynka regularnie domaga się od starszego chłopca rozmaitych ciekawostek matematycznych, których ten dowiaduje się w liceum. Tym razem Bartek, aby uzyskać chwilę spokoju, przykazał jej (twierdząc, że jest w tym jakiś głębszy sens) umieścić w tabelce 21×10 liczby od 1 do 210 w taki sposób, aby numery wiersza i kolumny, w jakich znajdzie się dana liczba, odpowiadały jej resztom z dzielenia odpowiednio przez 21 i 10. – *To było dość żmudne i jakoś nie wydaje mi się, by kryło się tu coś ciekawego... na pewno nie chciałeś się mnie po prostu pozbyć na chwilę?*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 22 | 43 | 64 | 85 | 106 | 127 | 148 | 169 | 190 |
| 2 | 191 | 2 | 23 | 44 | 65 | 86 | 107 | 128 | 149 | 170 |
| 3 | 171 | 192 | 3 | 24 | 45 | 66 | 87 | 108 | 129 | 150 |
| 4 | 151 | 172 | 193 | 4 | 25 | 46 | 67 | 88 | 109 | 130 |
| 5 | 131 | 152 | 173 | 194 | 5 | 26 | 47 | 68 | 89 | 110 |
| 6 | 111 | 132 | 153 | 174 | 195 | 6 | 27 | 48 | 69 | 90 |
| 7 | 91 | 112 | 133 | 154 | 175 | 196 | 7 | 28 | 49 | 70 |
| 8 | 71 | 92 | 113 | 134 | 155 | 176 | 197 | 8 | 29 | 50 |
| 9 | 51 | 72 | 93 | 114 | 135 | 156 | 177 | 198 | 9 | 30 |
| 10 | 31 | 52 | 73 | 94 | 115 | 136 | 157 | 178 | 199 | 10 |
| 11 | 11 | 32 | 53 | 74 | 95 | 116 | 137 | 158 | 179 | 200 |
| 12 | 201 | 12 | 33 | 54 | 75 | 96 | 117 | 138 | 159 | 180 |
| 13 | 181 | 202 | 13 | 34 | 55 | 76 | 97 | 118 | 139 | 160 |
| 14 | 161 | 182 | 203 | 14 | 35 | 56 | 77 | 98 | 119 | 140 |
| 15 | 141 | 162 | 183 | 204 | 15 | 36 | 57 | 78 | 99 | 120 |
| 16 | 121 | 142 | 163 | 184 | 205 | 16 | 37 | 58 | 79 | 100 |
| 17 | 101 | 122 | 143 | 164 | 185 | 206 | 17 | 38 | 59 | 80 |
| 18 | 81 | 102 | 123 | 144 | 165 | 186 | 207 | 18 | 39 | 60 |
| 19 | 61 | 82 | 103 | 124 | 145 | 166 | 187 | 208 | 19 | 40 |
| 20 | 41 | 62 | 83 | 104 | 125 | 146 | 167 | 188 | 209 | 20 |
| 0 | 21 | 42 | 63 | 84 | 105 | 126 | 147 | 168 | 189 | 210 |

– *Ależ skąd!* – odpowiedział brat z udawanym oburzeniem. – *Zauważ najpierw, że żadne dwie liczby nie zostały wpisane w tę samą komórkę. Gdyby bowiem tak się stało, to te dwie liczby dawałyby tę samą resztę z dzielenia przez 10 i 21. W tej sytuacji ich różnica byłaby podzielna przez 10 i 21, a zatem przez 210 (byłaby więc zerem), gdyż... – i tu Bartek teatralnie zawiesił głos.*

– *... gdyż są to liczby względnie pierwsze!* – dokończyła prędko Agatka, ponieważ niedawno omawiali ten temat na kółku matematycznym. Po chwili dodała: – *A skoro zarówno liczb, jak i komórek jest 210, więc w każdej komórce wylądzuje jakaś liczba!*

– *Doskonale.* – pochwalił siostrę Bartek. – *Udowodniłaś właśnie Chińskie Twierdzenie o Resztach: każdy układ reszt z dzielenia przez parami względnie pierwsze liczby jest możliwy do zrealizowania. A skoro jesteśmy przy liczbach względnie pierwszych, zwróć uwagę na kolejną rzecz. Otóż jeśli wybierzesz dowolną liczbę względnie pierwszą z 210, to jej wierszowa współrzędna jest względnie pierwsza z 21, a kolumnowa z 10 i odwrotnie: każda taka para współrzędnych określa liczbę względnie pierwszą z 210 (dowód nie jest trudny, spróbuj sama!). – mówiąc to, Bartek zamalował na kolorowo wszystkie liczby, które nie były względnie pierwsze z 210. – *W tej sytuacji, jeśli przez $\varphi(n)$ oznaczymy liczbę liczb mniejszych od n i względnie pierwszych z n , to musi zachodzić $\varphi(210) = \varphi(10) \cdot \varphi(21)$. Podobna zależność zachodzi z tych samych względów dla iloczynu dowolnych dwóch liczb względnie pierwszych.**

– *Wspaniale!* – wykrzyknęła Agatka. – *W tej sytuacji $\varphi(210)$ wynosi $1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6$, czyli 48. Nie mogłeś mi tego wszystkiego powiedzieć bez tej upiornej tabelki...?*

Łukasz RAJKOWSKI

25 lat Olimpiady Informatycznej

Krzysztof DIKS

3 stycznia 1994 roku rozpoczęły się zawody I stopnia I Olimpiady Informatycznej, w których wystartowało 528 uczniów z całej Polski. Uczniowie mieli trzy tygodnie na rozwiązanie trzech zadań. 64 uczniów z najlepszymi rozwiązaniami awansowało do zawodów II stopnia, które odbyły się 18–20 marca 1994 roku w Ośrodku Edukacji Informatycznej i Zastosowań Komputerów w Warszawie. Finały I Olimpiady Informatycznej miały miejsce w dniach 18–22 kwietnia 1994 roku, także w gościnnych murach Ośrodka Edukacji Informatycznej i Zastosowań Komputerów. W gronie finalistów znalazło się 33 uczniów. Pierwszym zwycięzcą Olimpiady Informatycznej został Michał Wala z I LO im. J. Kasprowicza z Raciborza.

Tak to w roku szkolnym 1993/1994 narodziła się najmłodsza olimpiada przedmiotowa w Polsce, dynamicznie rozwijająca się, której uczestnicy z sukcesami rywalizują na wiedzę i umiejętności informatyczne ze swoimi rówieśnikami z całego świata. Olimpiada Informatyczna to realizacja marzeń naukowców, edukatorów i popularyzatorów informatyki, którzy weszli w skład pierwszego Komitetu Głównego Olimpiady Informatycznej utworzonego „Aktem powołania Olimpiady Informatycznej” z dnia 10 grudnia 1993 roku, podpisanego przez ówczesnego dyrektora Instytutu Informatyki w Uniwersytecie Wrocławskim, profesora Macieja Sysłę. Siedzibą Olimpiady Informatycznej po dzień dzisiejszy jest Ośrodek Edukacji Informatycznej i Zastosowań Komputerów w Warszawie. Oto skład pierwszego Komitetu Głównego:

prof. dr hab. Jacek Błazewicz (Politechnika Poznańska),
prof. dr hab. Jan Madey (Uniwersytet Warszawski),
prof. dr hab. Andrzej W. Mostowski (Uniwersytet Gdański),
prof. dr hab. Wojciech Rytter (Uniwersytet Warszawski),
prof. dr hab. Maciej M. Sysło (Uniwersytet Wrocławski),
prof. dr hab. inż. Stanisław Waligórski (Uniwersytet Warszawski),
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel (Uniwersytet Warszawski),
dr Andrzej Walat (Ośrodek Edukacji Informatycznej i Zastosowań Komputerów),
dr Bolesław Wojdyło (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu),
mgr Jerzy Dalek (Ministerstwo Edukacji Narodowej),
mgr Krzysztof J. Święcicki (Ministerstwo Edukacji Narodowej),
Tadeusz Kuran (Ośrodek Edukacji Informatycznej i Zastosowań Komputerów),
mgr Krystyna Kominek (II LO im. St. Batorego, Warszawa).

Pierwszym przewodniczącym Komitetu Głównego został prof. dr hab. inż. Stanisław Waligórski, sekretarzem naukowym – dr Andrzej Walat, kierownikiem organizacyjnym – Tadeusz Kuran, który pełni tę funkcję do dziś.

Twórcy Olimpiady Informatycznej opracowali standardy organizacji i przeprowadzania Olimpiady, które w swoich podstawach obowiązują do dziś. W przyjętym regulaminie określono następujące cele Olimpiady Informatycznej:

1. Stworzenie motywacji dla zainteresowania nauczycieli i uczniów nowymi metodami informatyki.
2. Rozszerzenie współdziałania nauczycieli akademickich z nauczycielami szkół w kształceniu młodzieży uzdolnionej.
3. Stymulowanie aktywności poznawczej młodzieży informatycznie uzdolnionej.
4. Kształtowanie umiejętności samodzielnego zdobywania i rozszerzania wiedzy informatycznej.
5. Stwarzanie młodzieży możliwości szlachetnego współzawodnictwa w rozwijaniu swoich uzdolnień, a nauczycielom – warunków twórczej pracy z młodzieżą.
6. Wylanianie reprezentacji Rzeczypospolitej Polskiej na Międzynarodową Olimpiadę Informatyczną.

Jak już wspomnieliśmy, Olimpiada Informatyczna jest konkursem przedmiotowym dla uczniów szkół średnich, ale mogą w niej startować także młodszy uczniowie. Olimpiada składa się z trzech etapów. W każdym etapie uczniowie dostają pewną liczbę zadań do rozwiązania z użyciem komputera, z których każde składa się z krótkiej historyjki przedstawiającej sytuację problemową. Rozwiązaniem zadania jest zazwyczaj algorytm zapisany w postaci programu w wybranym przez zawodnika języku programowania. Poprawnie kompilujące się programy są następnie uruchamiane na nieznanym zawodnikom testach przygotowanych przez organizatorów. Testy są tak dobrane, żeby wykrywały programy niepoprawne i różnicowały rozwiązania o różnej złożoności obliczeniowej, przy czym głównie chodzi o złożoność czasową, a złożoność pamięciowa jest wymuszana przez podane *explicit* ograniczenia na wielkość wykorzystywanej przez program pamięci. W Olimpiadzie liczba punktów otrzymana za zadanie zależy od jakości zaproponowanego algorytmu i jego implementacji.

Pierwszy etap Olimpiady jest etapem szkolnym rozgrywanym na przełomie października i listopada i obecnie gromadzi około tysiąca uczestników. W pierwszym etapie uczniowie mają do rozwiązania zazwyczaj pięć zadań i pracują nad nimi w domu. Wyniki swojej pracy przesyłają przez Internet organizatorom do oceny. Do drugiego etapu awansuje około 350 najlepszych zawodników z etapu pierwszego. Drugi etap jest organizowany w kilku ośrodkach regionalnych współpracujących ściśle z najlepszymi uczelniami informatycznymi w kraju i trwa trzy dni. Pierwszy dzień jest poświęcony na zapoznanie się z warunkami rozgrywania zawodów. W każdym z następujących dwóch dni uczestnicy mają do samodzielnego rozwiązania zazwyczaj po dwa zadania w trakcie pięciogodzinnej, kontrolowanej sesji. Rozwiązania z całej Polski są zbierane centralnie i wszystkie oceniane w takim samym środowisku i na tych samych testach. Około 80 najlepszych uczestników drugiego etapu awansuje do finału Olimpiady. Finał jest rozgrywany w jednym miejscu i trwa pięć dni. Trzy dni są przeznaczone na same zawody, a dwa dni na rekreację i turystykę oraz zajęcia popularnonaukowe. Sposób rozgrywania finału jest podobny do tego z etapu drugiego (każdego dnia zawodnicy rozwiązują od dwóch do trzech zadań).

Najlepsi zawodnicy z finałów reprezentują Polskę na międzynarodowych zawodach informatycznych, w tym Międzynarodowej Olimpiadzie Informatycznej.

Międzynarodowa Olimpiada Informatyczna jest rozgrywana latem każdego roku i gromadzi najlepszych w świecie młodych informatyków – uczniów szkół średnich. Biorą w niej udział zwycięzcy (pierwsza czwórka) krajowych olimpiad informatycznych. Pierwsza Międzynarodowa Olimpiada Informatyczna miała miejsce w roku 1989. W latach 2006 i 2007 Polacy, odpowiednio, Filip Wolski i Tomek Kulczyński, zostali absolutnymi zwycięzcami Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej. Do polskich multimedalistów Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej należą: Filip Wolski (4 medale złote), Andrzej Gąsienica-Samek (3 medale złote, 1 medal srebrny), Marcin Andrychowicz i Jarosław Kwiecień (po 3 medale złote). Cała czwórka znajduje się w pierwszej dziesiątce multimedalistów Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej. Osiągnięcia reprezentantów Polski w Międzynarodowej Olimpiadzie Informatycznej świadczą dobrze nie tylko o młodych polskich informatykach, ale także o jakości samej Olimpiady Informatycznej. Wyniki laureatów Olimpiady Informatycznej w rywalizacji z rówieśnikami z całego świata sytuują naszą Olimpiadę wśród najlepszych krajowych olimpiad przedmiotowych. Pod względem liczby wszystkich medali zdobytych w Międzynarodowej Olimpiadzie Informatycznej (<http://stats.ioinformatics.org/countries/>) Polska ze 105 medalami zajmuje drugie miejsce w świecie po Chinach (115 medali). Na 105 medali Polaków składa się 38 medali złotych, 38 medali srebrnych i 29 medali brązowych, co w klasyfikacji medalowej daje nam czwartą pozycję w świecie po Chinach (77 medali złotych, 26 medali srebrnych, 12 medali brązowych), Rosji (odpowiednio 56, 36, 12) i Stanach Zjednoczonych (46, 34, 15).

Sukces Olimpiady Informatycznej wynika przede wszystkim z niezwykle wysokiego poziomu organizacyjnego i merytorycznego samego konkursu, który pełni rolę nie do przecenienia w wyławianiu i kształceniu uczniów wyjątkowo uzdolnionych informatycznie. Uczestnictwo z sukcesami w Olimpiadzie wymaga od uczniów wiedzy i umiejętności wybiegających daleko poza to, co jest uczone w szkole. Olimpiada dotyka jądra informatyki – algorytmiki i programowania, a wiedza i umiejętności w niej zdobyte nie są ulotne i dają niezbędne podwaliny dalszego dziedzinowego rozwoju. Jeszcze ważniejsze jest to, że konkurs kształci w młodych ludziach umiejętności, które są niezbędne w ich późniejszej aktywności zawodowej: pracowitość, systematyczność, samodyscyplinę, dociekliwość, samodoskonalenie, pracę w zespole, uczciwość, ambicję, chęć konkurowania, dążenie do sukcesu. Startowanie w Olimpiadzie jest dla młodego człowieka wyzwaniem intelektualnym, a sukces nobilituje. Z drugiej strony organizatorzy Olimpiady dbają o to, żeby jej uczestnicy mieli okazję poznać się i nawiązać bliskie kontakty, które później mogą zaowocować w ich życiu zawodowym.

Na sukces Olimpiady ma także wpływ ścisła, systemowa współpraca Ministerstwa Edukacji Narodowej, najlepszych uczelni w kraju (Uniwersytet Warszawski, Uniwersytet

Jagielloński, Uniwersytet Wrocławski, Uniwersytet im. Mikołaja Kopernika w Toruniu, Politechnika Białostocka, Politechnika Gdańska, Politechnika Poznańska, Akademia Górniczo-Hutnicza, Politechnika Śląska), nauczycieli i firm IT w wyławianiu uczniów utalentowanych informatycznie i rozwijaniu ich talentów. Cele te są realizowane poprzez umożliwienie uczniom szlachetnej rywalizacji w rozwiązywaniu ambitnych, a przy tym inspirujących zadań informatycznych. Zadania są przygotowywane zarówno przez naukowców-informatyków o światowej renomie, jak i byłych uczestników Olimpiady, osiągających sukcesy w konkursach studenckich. Co więcej, byli olimpijczycy aktywnie uczestniczą w pracach Olimpiady, przygotowując rozwiązania wzorcowe zadań olimpijskich, i są autorami wyrafinowanego oprogramowania olimpijskiego służącego do automatyzacji prac w Olimpiadzie, w szczególności automatycznego sprawdzania rozwiązań zawodników.

Olimpiada prowadzi intensywną działalność edukacyjną. Co roku wydawane są materiały poolimpijskie zawierające szczegółową dyskusję rozwiązań zadań olimpijskich oraz wzorcowe programy (dostępne on-line pod adresem <http://oi.edu.pl/1/40/>). Byli olimpijczycy prowadzą portal edukacyjny dla początkujących adeptów programowania i algorytmiki (<http://szkopul.edu.pl>), dzięki któremu nawet uczniowie z małych miejscowości spoza ośrodków akademickich mogą poznać tajniki „prawdziwej” informatyki. Finaliści Olimpiady mają co roku okazję uczestniczyć w wakacyjnych obozach naukowo-treningowych, na których wysłuchują wykładów przygotowywanych przez pracowników naukowych i starszych kolegów. Mogą też doskonalić swoje umiejętności algorytmiczno-programistyczne, biorąc udział w praktycznych warsztatach programistycznych.

Przez 25 lat Olimpiady Informatycznej łącznie w pierwszych etapach wystartowało 21989 uczniów (niektórzy wielokrotnie), do drugich etapów awansowało 7259 uczniów, a w finałach znalazło się 1590 uczniów (bez finalistów XXV Olimpiady Informatycznej, których w momencie pisania tego tekstu jeszcze nie znamy). Przez te wszystkie lata uczniowie zmagali się z 387 oryginalnymi zadaniami, których opisy rozwiązań wzorcowych są publicznie dostępne i są znakomitym materiałem dydaktycznym dla przyszłych olimpijczyków, a także każdego, kto chce podjąć intelektualne wyzwanie i spróbować rozwiązać zadania olimpijskie.

Bardzo wiele zadań olimpijskich dotyczy problemów, które powstają w wymyślnym królestwie Bajtocji. Kraj ten po raz pierwszy pojawił się w treści zadania „Gońcy” z III Olimpiady Informatycznej. Cztery lata później, w zadaniu „Labirynt studni”, ujawnił się mieszkaniec Bajtocji – Bajtazar, który od tego czasu stał się główną postacią bardzo wielu zadań olimpijskich. Z okazji XXV-lecia Olimpiady Informatycznej przygotowaliśmy publikację *Przygody Bajtazara*, zawierającą subiektywny wybór 50 zadań olimpijskich wraz z rozwiązaniami wzorcowymi, która może posłużyć jako wprowadzenie do udziału w zawodach Olimpiady (patrz okładka). Niech Bajtocja i Bajtazar rozwijają się tak jak do tej pory dla dobra Olimpiady Informatycznej i jej uczestników.

Jak wykryć salamandrę?

Anna LEŃ*, Marcin MICHORZEWSKI**

*studentka, Międzyobszarowe Studia Matematyczno-Przyrodnicze, UW
**student, Wydział MIM UW

W dniach 6–17 września 2017 r. odbyła się druga edycja międzynarodowego obozu **Maths Beyond Limits**. W czasie obozu 60 uczestników z Polski, Węgier, Czech i Słowacji wzięło udział w warsztatach matematycznych prowadzonych przez studentów i pracowników naukowych najlepszych polskich i zagranicznych uczelni. Uczestnicy mieli także okazję do zaprezentowania własnych referatów oraz do uczestnictwa w ogólnorozwojowych zajęciach wieczornych. Ponadto, na obozie odbyły się: mecz matematyczny, zawody Relays (oparte na konkursie Náboj), Olympic Challenge, a także zajęcia sportowe i integracyjne.

Wszelkie szczegóły na temat obozu można znaleźć na stronie mathsbeyondlimits.eu. Kolejna edycja odbędzie się w dniach 9–21 września 2018 roku. Licealistów zainteresowanych matematyką zachęcamy do udziału w rekrutacji, która ruszyła 1 kwietnia.

Poniższy artykuł prezentuje przykładową tematykę poruszaną podczas obozu.

W Δ_{17}^{10} dowiedziono, że nie da się wyłonić zwycięzcy w wyborach, nie łamiąc co najmniej jednej z zasad sprawiedliwości.

Przyjrzyjmy się problemowi, przed którym staje legislator wyborczy: **podział kraju na okręgi wyborcze**. Ordynacja wyborcza występująca w Stanach Zjednoczonych przy *House of Representative* polega na wybraniu 435 kandydatów z 50 stanów. Każdy stan podzielony jest na jednomandatowe okręgi zwane też *dystryktami*. W każdym dystrykcie dokładnie jedna partia wygrywa, zdobywając miejsce w *House of Representative*. Okręgi są zdefiniowane przez terytorium, powinny być spójne oraz mieć taką samą populację. Liczba okręgów w danym stanie podyktowana jest populacją i już ona jest przedmiotem wielu dyskusji. Więcej na ten temat można znaleźć w literaturze pod nazwą *apportionment*. Upraszczając nieco problem, przeanalizujemy, w jaki sposób sprawiedliwie dokonać podziału na okręgi wyborcze.

Okazuje się, że manipulując podziałem na okręgi, nie zmieniając liczby wyborców w okręgach, można zmienić wyniki wyborów. Manipulacja w tym zakresie nazywa się *gerrymanderingiem*. Nazwa jest zbitką nazwiska amerykańskiego polityka **Elbridge'a Gerry'ego** oraz **salamandry**. W 1812 roku E. Gerry, jako gubernator stanu Massachusetts, zarządził podział stanu na dystrykty w taki sposób, aby zapewnić przewagę Partii Demokratyczno-Republikańskiej. Jeden z okręgów przypominał mityczną salamandrę i został określony przez *Boston Gazette* jako Gerry-mander. Od tego czasu problem nie zniknął, Stany Zjednoczone stale podejmują działania mające walczyć z tym problemem.

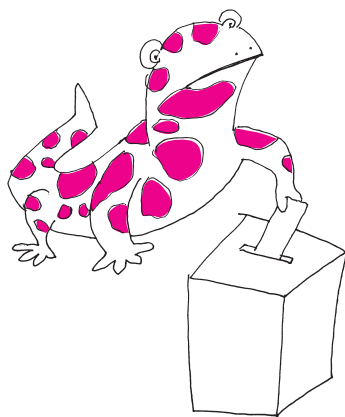
Wprowadzenie wskaźnika

Dla uproszczenia przyjmijmy, że w wyborach kandydują tylko 2 partie: *A* i *B*. Wygrywają one miejsca w rządzie, które potem we własnym zakresie rozdzielają. Zakładamy, że okręgi są jednomandatowe (ich liczba *S* jest ustalona z góry), że w każdym jest taka sama liczba wyborców oraz że w każdym ważne głosy oddaje dokładnie tyle samo osób. Zbiór okręgów oznaczmy przez $D = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_S\}$. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

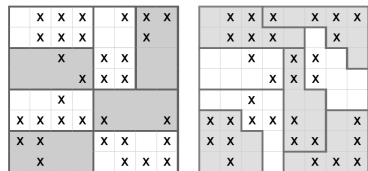
- $D^P \subset D$ – zbiór okręgów, w których wygrała partia *P*,
- V_i^P – liczba głosów zdobytych przez partię *P* w okręgu δ_i ,
- V^P – całkowita liczba głosów oddanych na partię *P*,
- V_i – liczba wszystkich głosów oddanych w okręgu δ_i ,
- S_i^P – liczba miejsc zdobytych przez partię *P* w *i*-tym okręgu ($S_i^P \in \{0, 1\}$),
- S^P – liczba wszystkich miejsc zdobytych przez partię *P*,
- V – liczba wszystkich głosów oddanych w wyborach.

Zatem głosów oddanych w każdym okręgu jest dokładnie $V_i = \frac{V}{S}$, dla $i = 1, 2, \dots, S$. Wskaźniki ν i σ oznaczają przewagę partii *A* odpowiednio w głosach, które oddali wyborcy oraz miejscach, które uzyskała:

$$\nu = \frac{V^A - V^B}{V}, \quad \sigma = \frac{S^A - S^B}{S}.$$



Przykład 1. Każde pole planszy przedstawia jednego głosującego. \times oznacza głos oddany na partię A , puste pole to głos oddany na partię B . Na rysunku z lewej obie partie zdobywają taką samą liczbę mandatów. Jeśli jednak zmienimy kształt okręgów tak jak na rysunku z prawej strony, to wygra partia A , zdobywając 5 mandatów.



Z lewej współczynnik $EG = 0$, z prawej wynosi $-\frac{1}{8}$.

Przykład 2. Można znaleźć przykład takich wyników głosowania na dwie partie, żeby w jednym układzie okręgów wygrała partia A , a w innym B .

Przykład 3. Czy możliwe jest, żeby sytuacja z przykładu 2 miała miejsce, gdy okręgi są dwumandatowe? W 2015 roku w USA odbyła się rozprawa pod nazwą „Gill v. Whitford”, w której sąd najwyższy zgodnie z radą pomysłodawców *efficiency gap* zasądził, że maksymalny dopuszczalny poziom EG to 0,07. Tym samym stwierdzono, że wybory z 2012 i 2014 roku w Wisconsin były niekonstytucyjne (EG wyniosło odpowiednio 0,13 oraz 0,1).

Przykład 4. W wyborach startują dwie partie. Przyjmując, iż sprawiedliwy jest taki podział, że $EG = 0,07$, jakie jest najmniejsze procentowe poparcie dla jednej z partii, żeby miała ona większość w parlamencie?

Głosami zmarnowanymi (*wasted votes*) nazywamy wszystkie głosy na przegraną partię oraz na wygraną powyżej progu 50% (tzn. te, które były zbędne do zwycięstwa). Oznacza to, że zawsze połowa głosów jest zmarnowana.

Analogicznie jak poprzednio, niech W_i^P to będzie liczba głosów zmarnowanych w okręgu δ_i przez głosujących na partię P , zaś W^P – liczba zmarnowanych głosów we wszystkich okręgach. Zachodzi następująca zależność $W_i^A = V_i^A - S_i^A \cdot \frac{V_i}{2}$ (przypomnijmy, że okręgi są jednomandatowe). Spójrzmy, jak wyglądają głosy zmarnowane na partię A i B . W tym celu zdefiniujmy współczynnik *efficiency gap*

$$EG = \sum_{i=1}^S \frac{W_i^A - W_i^B}{V} = \frac{W^A - W^B}{V}.$$

Jeżeli EG jest dodatnie, oznacza ono niesprawiedliwość wobec partii A , gdy ujemne, to dla B . Gdy $EG \approx 0$, wówczas obie partie straciły podobną liczbę głosów i taką sytuację uznaje się za sprawiedliwą.

Przyjrzyjmy się bliżej informacji, którą niesie współczynnik EG . Zauważmy, że

$$W_A = \sum_{i=1}^S W_i^A = V^A - S^A \frac{V}{2S},$$

stąd

$$EG = \frac{V^A - V^B}{V} - \frac{1}{2} \frac{S^A - S^B}{S} = \nu - \frac{1}{2}\sigma.$$

Niektóre usterki współczynnika EG :

- Współczynnik EG nie odwzorowuje proporcji głosów w liczbie zdobytych miejsc. Tzn. jeśli partia A zdobywa w całym kraju 66% głosów, zaś partia B uzyskuje 34%, to wówczas $\nu = 0,32$. Aby współczynnik EG był jak najbliższy 0, to $\sigma = 0,64$, czyli partia A powinna zdobyć 82% miejsc, zaś partia B tylko 18%.
- Jeśli partia A będzie miała co najmniej 79% poparcia w społeczeństwie, to niezależnie jak wybierzemy okręgi, będzie

$$\nu - \frac{1}{2}\sigma \geq 0,58 - 0,5 > 0,07;$$

wybory zawsze byłyby więc niesprawiedliwe (jeśli uznamy, że takie są wtedy, gdy EG przekracza 0,07). Wynika to z tego, że *przewaga wygranych miejsc* ma 2 razy mniejsze znaczenie od *przewagi głosów* w społeczeństwie.

- Dla okręgu i poziom sprawiedliwości $EG_i = \frac{W_i^A - W_i^B}{V_i}$ wynosi zero tylko wtedy, gdy jedna partia zdobędzie 3 razy więcej głosów od drugiej. Wtedy sprawiedliwym podziałem jest taki, w którym w każdym z okręgów proporcje głosów wynoszą 3 : 1.

Zachęcamy do przyjrzenia się nieco poprawionej metodzie mierzenia niesprawiedliwości

$$\widetilde{EG} = \frac{W^A}{V^A} - \frac{W^B}{V^B}.$$

Nie istnieje jednoznaczny, powszechnie stosowany sposób sprawdzania, czy podział jest sprawiedliwy. W Stanach Zjednoczonych powoływane są specjalne zespoły czuwające nad takimi podziałami. Zauważmy, że nie wszystkie założenia przytoczonego modelu daje się spełnić (np. równa liczba wyborców w każdym okręgu i jednocześnie równa liczba oddanych głosów), stąd pole do poprawy modelu jest jeszcze spore.



Zadania

Przygotował Michał NAWROCKI

F 949. Cegła spada na piłkę tenisową z wysokości 1 m i odskakuje, praktycznie biorąc, na taką samą wysokość, z jakiej spadła. Na jaką wysokość podskoczy piłka?

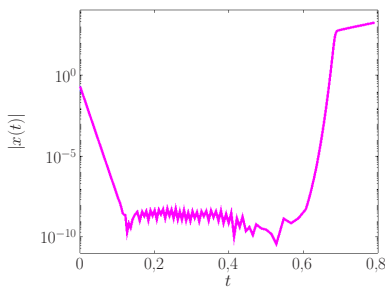
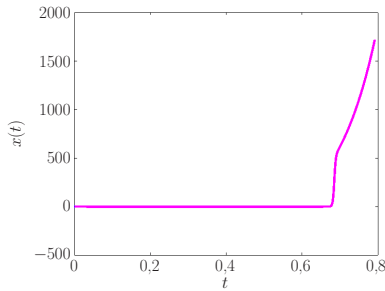
Rozwiązanie na str. 7

F 950. Przy fotografowaniu tygrysa nie zaleca się do niego zbliżać bardziej niż na odległość $L = 20$ m. Jaką głębokość powinna mieć camera obscura z otworem o średnicy $d = 1$ mm, aby na fotografii były widoczne pręgi na skórze tygrysa? Przyjąć, że odległość między pręgami wynosi $l = 20$ cm.

Rozwiązanie na str. 7

Patrzysz, ale czy widzisz?

W *Małej Delcie* (P. Biecek, *Pokaż im to!*, Δ_{17}^8) mogliśmy przeczytać o tym, jak ważne jest graficzne przedstawienie danych w *przekonujący* sposób. Ale zdarza się też na odwrót: niewinnie wyglądający i *bardzo* przekonujący wykres może sprowadzić nas na manowce.



Rozważmy równanie różniczkowe

$$x'(t) = x(t) \cdot (e^{At} - B - x(t)),$$

wywodzące się z pewnego modelu matematycznego przebiegu choroby zakaźnej. Nie wnikając w szczegóły modelu i w konkretne wartości parametrów $A, B > 0$, uznajmy, że szukana funkcja $x(t)$ odpowiada (przeskalowanej) liczbie osób zarażonych przypadającej na jednostkę powierzchni w chwili czasu t . Zakładamy, że w chwili $t = 0$ liczba chorych jest niewielka, ale dodatnia.

Traktując to równanie standardowym pakietem komputerowym MATLAB, dostajemy rozwiązanie o „rozsądnym” przebiegu, o czym możemy *przekonać się*, *patrzac* na rysunek na górze: na początku, przez dłuższy czas populacja chorych $x(t)$ utrzymuje się na poziomie bliskim (kto wie, może nawet równym?) zeru, a następnie zaczyna szybko rosnąć.

Jednak gdy dokładnie to samo rozwiązanie zobrazujemy inaczej: na wykresie, którego pionowa oś jest w skali logarytmicznej (rysunek na dole) – ujawnią się dodatkowe informacje. Okazuje się (czego wcześniej nie widzieliśmy), że na początku rozwiązanie maleje, ale potem na dłużej stabilizuje się na poziomie 10^{-10} , by na koniec (co wszak widzieliśmy na poprzednim obrazku) szybko urosnąć. Ze względu na skalę logarytmiczną możemy mieć złudzenie, że ostatnia faza wzrostu jest dosyć wolna – lecz to właśnie jest tylko złudzenie.

No dobrze, dzięki użyciu innej skali zyskaliśmy wgląd w zachowanie się rozwiązania dla bardzo małych wartości (skala liniowa to uniemożliwiła) – ale czy cokolwiek więcej z tego wynika? Owszem! Niepokój może budzić to, że w zakresie bardzo małych wartości funkcja $x(t)$ zachowuje się nieregularnie: teoria równań różniczkowych przewiduje zaś, że nasze rozwiązanie powinno mieć *ładki* przebieg, niezależnie od tego, czy skala osi jest logarytmiczna, czy liniowa. Jednak z drugiej strony, wahania są przecież bardzo drobne, oscylujące wokół wartości 10^{-10} , czyli prawie zera – więc może nie ma czym się przejmować?

Może lepiej nie szukać dziury w całym, tzn. nie przyglądać się *aż tak* dokładnie – w końcu przecież sensownie i estetycznie wyglądającemu – wykresowi na górze? Odpowiemy w następnym numerze *Delty*.

Piotr KRZYŻANOWSKI

Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1561. Nieujemne liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność $a + b + c \geq abc$. Udowodnić, że $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$.

Rozwiązanie na str. 3

M 1562. Punkt D leży na boku BC trójkąta ostrokątnego ABC . Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AC i AB .

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Udowodnić, że pole czworokąta $AEOF$ jest równe połowie pola trójkąta ABC .

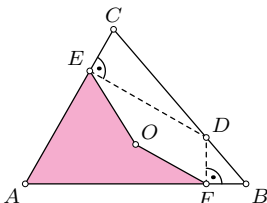
Rozwiązanie na str. 2

M 1563. Dana jest liczba pierwsza p . Funkcja $f(x) = ax + b$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi, ma tę własność, że liczby

$$f(0), f(f(0)), \dots, \underbrace{f(f(\dots f(0)\dots))}_p$$

dają parami różne reszty przy dzieleniu przez p . Wykazać, że $p \mid a - 1$.

Rozwiązanie na str. 2



Informatyczny kącik olimpijski (114): *Magic*

Tym razem omówimy zadanie z pierwszego dnia Pierwszej Olimpiady Informatycznej Juniorów (EJOI), która odbyła się w Sofii we wrześniu 2017 roku.

Zadanie: *Dane jest słowo $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ o długości n , w którym występuje k różnych liter alfabetu angielskiego. Magicznym podslowem nazywamy niepuste podslowo (czyli spójny fragment słowa), które zawiera taką samą liczbę wystąpień każdej z k liter. Należy policzyć liczbę magicznych podslów w słowie s . Podslowa, które są takie same, ale znajdują się na różnych pozycjach, uznajemy za różne.*

Na potrzeby tego artykułu przyjmijmy dodatkowe założenie, że słowo s zawiera wyłącznie litery ze zbioru k -początkowych liter alfabetu angielskiego. Aby uzyskać to założenie, wystarczy po wczytaniu słowa nadać literom nowe identyfikatory będące kolejnymi małymi literami alfabetu angielskiego.

Rozwiązanie $O(n^3)$

Najprostsze rozwiązanie polega na rozpatrzeniu każdego podslowa niezależnie. Aby sprawdzić, czy dane podslowo jest magiczne, należy zliczyć liczbę wystąpień każdej litery w podslowie, a następnie sprawdzić, czy wszystkie otrzymane wartości są równe.

Liczba wszystkich podslów jest rzędu $O(n^2)$. Sprawdzenie, czy podslowo jest magiczne, wymaga $O(n)$ operacji. Zatem całe rozwiązanie wykonuje $O(n^3)$ operacji.

Rozwiązanie $O(n^2)$

Powyższe rozwiązanie można w łatwy sposób przyspieszyć. Każdą z możliwych początkowych pozycji $\{1, 2, \dots, n\}$ podslowa słowa s rozpatrzmy niezależnie. Załóżmy, że rozpatrujemy początkową pozycję x . Przeiterujemy wszystkie potencjalne końce podslów zaczynających się na tej pozycji. Niech s_x, s_{x+1}, \dots, s_y będzie aktualnie rozpatrywanym podslowem. Zauważmy, że aby policzyć liczbę wystąpień poszczególnych liter w tym podslowie, wystarczy skorzystać z wyniku dla podslowa $s_x, s_{x+1}, \dots, s_{y-1}$ oraz zaktualizować go o wystąpienie litery s_y . Zatem, dla ustalonego podslowa potrafimy wyznaczyć te wartości w stałej liczbie operacji $O(1)$. Natomiast sprawdzenie, czy dane podslowo jest magiczne, wymaga $O(k)$ operacji (należy sprawdzić, czy liczba wystąpień każdej z k liter jest taka sama). Zauważmy, że słowa, których długość nie jest podzielna przez k , na pewno nie są magiczne. Zatem dla tych słów możemy pominąć fazę sprawdzania licznosci poszczególnych liter. Słów, dla których wykonamy fazę sprawdzania licznosci liter, jest $O(\frac{n^2}{k})$. Sumarycznie wykonamy $O(n^2)$ operacji.

Przypadek dla $k = 1$

Przypadek dla $k = 1$ jest trywialny. Każde podslowo jest magiczne, zatem wynikiem jest $\frac{n(n+1)}{2}$.

Przypadek dla $k = 2$

Najpierw słowo s zamienimy na ciąg liczb a . Pierwszą literę słowa oraz wszystkie jej wystąpienia zamienimy na 1. Pozostałe litery zamienimy na -1 . Zauważmy teraz, że każde magiczne podslowo ma sumę 0.

Policzmy sumy prefiksowe p , gdzie $p(i) = \sum_{j=1}^i a_j$ dla $0 \leq i \leq n$. Zauważmy, że podslowo s_x, s_{x+1}, \dots, s_y jest magiczne, jeśli $a_x + a_{x+1} + \dots + a_y = p(y) - p(x-1) = 0$, czyli jeśli $p(y) = p(x-1)$. Wystarczy zatem policzyć liczbę par indeksów, dla których sumy prefiksowe są równe. W tym celu zliczmy wystąpienia elementów w ciągu p . Niech $w(x)$ oznacza liczbę wystąpień x w ciągu p . Wówczas wynikiem jest $\sum_{x \in [-n, n]} \frac{w(x)(w(x)-1)}{2}$. Rozwiązanie wykonuje $O(n)$ operacji.

Rozwiązanie $O(nk \cdot \log(n))$

Zacznijmy od przypisania każdej literze jej unikalnego identyfikatora ze zbioru $\{1, 2, \dots, k\}$. Następnie przekształćmy słowo s na ciąg liczb a , zamieniając każdą literę na odpowiadający jej identyfikator. Np. słowo **kajak** możemy zamienić na ciąg $a = 2, 1, 3, 1, 2$ (a otrzymało identyfikator 1, k otrzymało identyfikator 2, zaś j otrzymało identyfikator 3). Od teraz będziemy operowali na ciągu liczb naturalnych.

Niech:

- $w(x, i)$ będzie równe 1, jeśli na x -tej pozycji występuje wartość i oraz 0 w przeciwnym przypadku;
- $p(x, i) = \sum_{j=1}^x w(j, i)$ (liczba wystąpień wartości i na x -elementowym prefiksie ciągu a);
- $v(x) = [p(x, 1), p(x, 2), \dots, p(x, k)]$; (wektor reprezentuje liczbę wystąpień poszczególnych liter na x -elementowym prefiksie ciągu a);
- $v'(x) = v(x) - [p(x, 1), p(x, 1), \dots, p(x, 1)]$.

Podslowo a_x, a_{x+1}, \dots, a_y jest magiczne, jeśli:

$$v(y) - v(x-1) = [c, c, \dots, c]$$

dla pewnego $c \in \mathbb{Z}$. Po przekształceniach, które pozostawiam Czytelnikowi jako ćwiczenie, otrzymujemy równoważną definicję magicznego podslowa:

$$v'(y) - v'(x-1) = [0, 0, \dots, 0]$$

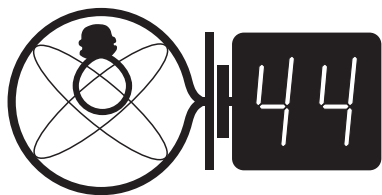
Zatem każda taka para $x, y \in \mathbb{N}$ ($1 \leq x \leq y \leq n$), że $v'(y) - v'(x-1) = [0, 0, \dots, 0]$ oznacza magiczne podslowo. Policzmy zatem, ile jest par takich samych wektorów w ciągu $v'(0), v'(1), \dots, v'(n)$. W tym celu posortujemy ten ciąg leksykograficznie. Wówczas wektory, które są równe, będą tworzyły spójny blok. Spośród bloku m takich samych wektorów można wybrać $\frac{m(m-1)}{2}$ par.

Obliczenie wektorów $v'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{N}$ ($1 \leq x \leq n$) wymaga $O(nk)$ operacji, zaś sortowanie $O(nk \cdot \log(n))$ operacji. Zatem całe rozwiązanie wykonuje $O(nk \cdot \log(n))$ operacji.

Bartosz ŁUKASIEWICZ

Skrót regulaminu

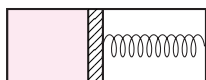
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



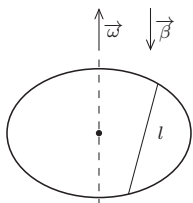
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2018

Zadania z fizyki nr 656, 657

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*



Rys. 1



Rys. 2

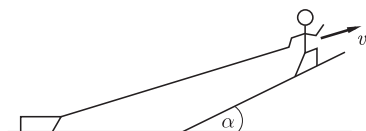
656. Naczynie odizolowane cieplnie od otoczenia rozdzielone jest na dwie części tłokiem, który może przemieszczać się bez tarcia (rys. 1). Tłok połączony jest z prawą ścianką naczynia za pomocą sprężyny. Gdy tłok styka się z lewą ścianką naczynia, sprężyna jest nieodkształcona. W lewej części naczynia znajduje się n moli jednoatomowego gazu doskonałego, w prawej części jest próżnia. Ile ciepła musi pobrać gaz (np. od umieszczonej w naczyniu spirali grzewczej), aby jego temperatura wzrosła o ΔT ? Pojemność cieplną naczynia, tłoka i sprężyny zaniedbujemy.

657. Na nieprzewodzącym dysku o promieniu R umocowany jest wzdłuż cięciwy drut o długości l (rys. 2). Dysk obraca się ze stałą prędkością kątową ω . Wektor indukcji jednorodnego pola magnetycznego \vec{B} skierowany jest prostopadle do dysku. Znaleźć siłę elektromotoryczną indukcji między środkiem a końcem drutu.

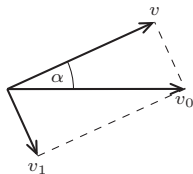
Rozwiązania zadań z numeru 12/2017

Przypominamy treść zadań:

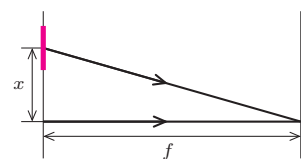
648. Człowiek wchodzi ze stałą prędkością v na zbozcze nachylone pod kątem α do poziomu (rys. 3) i ciągnie sanki o masie m za pomocą nierozciągliwej, lekkiej linki o długości l . Sanki ślizgają się bez tarcia po powierzchni poziomej. Jakie jest napięcie linki, gdy tworzy ona z poziomem kąt α ?



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

649. Na bardzo cienką przezroczystą płytkę naniesiono nieprzezroczyste, koncentryczne pierścienie. Położenia i rozmiary pierścieni są tak dobrane, że równoległa wiązka światła o długości fali $\lambda = 500$ nm, padająca prostopadle na płytkę, ogniskuje się w odległości $f = 25$ cm od płytki. Rozmiary płytki są małe w porównaniu z odległością f .

- Wyznaczyć promień wewnętrzny i zewnętrzny dwóch najbliższych centrum nieprzezroczystych pierścieni.
- W jakiej odległości od płytki powstanie obraz punktowego źródła światła monochromatycznego o tej samej długości fali co wiązka równoległa, umieszczonego w odległości a od płytki na jej osi przechodzącej przez środki pierścieni?

648. Prędkość sanek v_0 jest pozioma, możemy rozłożyć ją na składowe v równoległą do linki i v_1 prostopadłą do linki (rys. 4). Zachodzi związek $v_1 = vtg\alpha$. W układzie inercyjnym, związanym z człowiekiem, sanki poruszają się po okręgu o promieniu l z prędkością v_1 i przyspieszeniem dośrodkowym $a_d = v_1^2/l$. Jedyną siłą działającą na sanki w kierunku poziomym jest składowa siły napięcia linki N . Nadaje ona sankom przyspieszenie $a = (N \cos \alpha)/m$. Składowa tego przyspieszenia równoległa do linki jest przyspieszeniem dośrodkowym: $a_d = a \cos \alpha = (N \cos^2 \alpha)/m = v_1^2/l$. Stąd siła napięcia linki dana jest wzorem: $N = (mv^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)/(l \cos^2 \alpha)$.

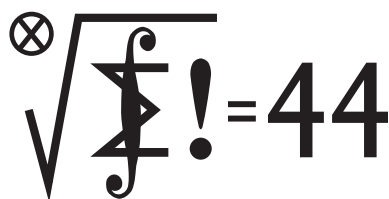
649. a) Różnica dróg promieni biegnących od centrum płytki i z punktu odległego o x od centrum płytki do środka ekranu umieszczonego w odległości f od płytki (rys. 5) wynosi: $\Delta s = \sqrt{f^2 + x^2} - f$. W przybliżeniu $x \ll f$, $\Delta s = f\sqrt{1 + x^2/f^2} - f \approx x^2/(2f)$. Miejsca, z których biegnące fale osłabiałyby falę biegnącą z centrum płytki, powinny być nieprzezroczyste. Zachodzi dla nich związek: $\lambda/4 + k\lambda < \Delta s < 3\lambda/4 + k\lambda$, gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$. Stąd

$$\sqrt{\lambda f(1 + 4k)/2} < x_k < \sqrt{\lambda f(3 + 4k)/2}.$$

Pierwszy nieprzezroczysty pierścień ($k = 0$) ma promień wewnętrzny $r_0 = \sqrt{\lambda f/2} = 0,25$ mm, zewnętrzny $R_0 = \sqrt{3\lambda f/2} = 0,43$ mm, drugi $r_1 = 0,56$ mm, $R_1 = 0,66$ mm. b) niech szukana odległość wynosi b . Chcemy, żeby różnica dróg promieni przechodzących przez punkt odległy o x od środka płytki i przechodzących przez środek płytki była taka sama, jak w przypadku wiązki równoległej:

$$\Delta s = \left(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + x^2} \right) - (a + b) \approx x^2 \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \right) = \frac{x^2}{2f}.$$

Stąd $1/a + 1/b = 1/f$.



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2018

Zadania z matematyki nr 759, 760

Redaguje Marcin E. KUCZMA

759. Ciąg nieskończony x_0, x_1, x_2, \dots jest określony wzorem rekurencyjnym $x_{n+1} = 2^{2-x_n}$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$; wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą z przedziału $(3/2, 2)$. Wyznaczyć wszystkie liczby, będące granicami zbieżnych podciągów ciągu (x_n) .

760. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych x , dla których każda z liczb $x^{1/2} + x^{-1/2}$ oraz $x^{1/3} + x^{-1/3}$ jest całkowita.

Zadanie 760 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2017

Przypominamy treść zadań:

751. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkątów o boku 1 (trójkątów jednostkowych). Wierzchołkom powstałej siatki zostały przyporządkowane różne liczby rzeczywiste $((n+1)(n+2)/2$ różnych liczb). Trójkąt jednostkowy nazwiemy zorientowanym dodatnio, jeśli – idąc wzdłuż jego brzegu, w kierunku wzrastania liczb przy wierzchołkach (tj. startując od najmniejszej i idąc przez średnią do największej) – mamy jego wnętrze po lewej stronie. Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć najmniejszą i największą wartość liczby trójkątów jednostkowych zorientowanych dodatnio.

752. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich, których średnia arytmetyczna i średnia geometryczna różnią się o 1.

751. Utworzona siatka składa się z $K = 3n(n+1)/2$ krawędzi i rozcina płaszczyznę na $T+1$ obszarów: $T = n^2$ trójkącików jednostkowych oraz składową nieograniczoną, nazywaną oceanem. Każdą krawędź traktujemy jako odcinek skierowany, od końca, oznaczonego liczbą mniejszą, do końca, oznaczonego liczbą większą. W pobliżu każdej krawędzi kładziemy marker na obszarze, który do niej przylega po stronie lewej (względem zwrotu strzałki).

Łącznie położyliśmy K markerów. Rysunek ilustruje sytuację, gdy $n = 4$ (więc $K = 30$, $T = 16$), wraz z przykładowym ponumerowaniem wierzchołków; kropki oznaczają markery; zacienione są trójkąci zorientowane dodatnio (w sensie sprecyzowanym w treści zadania).

Na każdym trójkąci zorientowanym dodatnio znalazły się dwa markery; na trójkąci zorientowanym ujemnie – jeden marker. Więc jeśli mamy D trójkątów zorientowanych dodatnio, to w obrębie całego dużego trójkąta znalazło się $T + D$ markerów. Pozostałe, w liczbie $K - T - D$, są na oceanie.

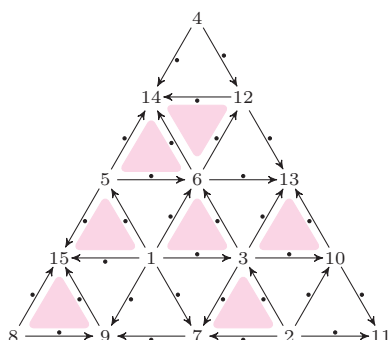
Każdy marker na oceanie odpowiada krawędzi zorientowanej ujemnie względem wnętrza dużego trójkąta – czyli takiej, że obchodząc cały jego brzeg i mając jego wnętrze po lewej stronie, idziemy niezgodnie ze zwrotem strzałki (odnotowujemy spadek wartości przy wierzchołkach). Może być tylko jeden taki odcinek, mogą to też być wszystkie z wyjątkiem jednego (czyli $3n - 1$). Dostajemy nierówność $1 \leq K - T - D \leq 3n - 1$; po podstawieniu $K = 3n(n+1)/2$, $T = n^2$ i prostym przekształceniu uzyskujemy dwustronne oszacowanie

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} \leq D \leq \frac{n^2 + 3n - 2}{2}.$$

Po obu stronach jest możliwa realizacja równości: wystarczy oznaczyć wierzchołki siatki, leżące na brzegu dużego trójkąta, liczbami tworzącymi ciąg monotoniczny (po wystartowaniu z dowolnie wybranego wierzchołka oraz ustaleniu kierunku obchodzenia), z jedynym zakłóceniem monotoniczności przy zamknięciu cyklu. Liczby po obu stronach napisanej nierówności stanowią odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu. [Warto zauważyć, że liczby, przyporządkowane wierzchołkom wewnętrznym, nie mają już dla wartości D żadnego znaczenia].

752. Niech a, b będą liczbami naturalnymi, spełniającymi warunek $\sqrt{ab} + 1 = (a + b)/2$. Wymierny pierwiastek z liczby naturalnej jest liczbą naturalną. Zatem ab musi być kwadratem liczby naturalnej. Oznaczając przez d największy wspólny dzielnik liczb a, b (tak, że $a = a'd, b = b'd$; a', b' względnie pierwsze) widzimy, że czynniki a', b' muszą być kwadratami: $a = x^2d, b = y^2d$ (x, y naturalne). Badane równanie przybiera postać $dxy + 1 = (x^2d + y^2d)/2$; po przekształceniu: $d(x - y)^2 = 2$. Stąd wniosek, że $d = 2, |x - y| = 1$.

Uzyskaliśmy odpowiedź: liczby a, b to podwojone kwadraty dwóch kolejnych liczb naturalnych. Proste sprawdzenie pokazuje, że każda taka para spełnia wymagany warunek.



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
642 (WT = 2,2), 643 (WT = 2,2)
z numeru 9/2017

| | | |
|--------------------|---------|-------|
| Marian Łupieżowicz | Gliwice | 38,33 |
| Jacek Konieczny | Poznań | 29,80 |
| Ryszard Woźniak | Kraków | 28,77 |
| Krzysztof Magiera | Łosiów | 28,70 |
| Karol Łukanowski | Niemcz | 23,89 |
| Tomasz Wietecha | Tarnów | 22,30 |

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
745 (WT = 2,25) i 746 (WT = 1,75)
z numeru 9/2017

| | | |
|------------------------|----------|-------|
| Marcin Kasperski | Warszawa | 43,83 |
| Adam Dzedzej | Gdańsk | 43,22 |
| Roksana Słowik | Knurów | 41,91 |
| Franciszek S. Sikorski | Warszawa | 39,71 |

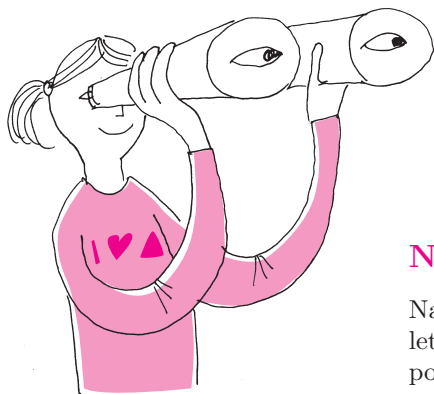
Jasność Proximy Centauri to jedynie 0,0017 L_{\odot} , a jej masa wynosi 0,122 M_{\odot} . Została odkryta jako gwiazda najbliższa Słońcu w 1915 roku przez Roberta Innesa z obserwatorium w Johannesburgu w RPA.

Prosto z nieba: Proxima Centauri

System α Centauri (Alpha Cen) jest najbliższym nam układem gwiazd: znajduje się zaledwie 4,37 lat świetlnych od Ziemi, i składa z trzech ciał: Alpha Centauri A i B, które tworzą układ podwójny (widoczny z Ziemi jako najjaśniejsza gwiazda w konstelacji Centaura: z jasnością $-0,27^m$ zajmuje trzecie miejsce w tej kategorii na niebie), oraz z Alpha Centauri C, zwanej również Proximą Centauri. Proxima Centauri jest niezbyt jasnym czerwonym karłem, grawitacyjnie luźno związanym z układem AB: orbituje w odległości 0,21 lat świetlnych (430 odległości Słońce-Neptun), a jej odległość od Słońca wynosi 4,25 lat świetlnych (1,30 parseka), co oznacza, że jest naszym najbliższym gwiazdowym sąsiadem. Jej jasność w paśmie widzialnym to około $11,1^m$, czyli o wiele za mało, by można było zobaczyć ją gołym okiem. W 2016 roku na 11-dniowej orbicie wokół Proxima Centauri odkryto planetę. Proxima b jest nieco masywniejsza od Ziemi i znajduje się dostatecznie blisko (odległość do gwiazdy to tylko 0,05 j.a.), by na jej powierzchni mogła istnieć woda w stanie ciekłym.

To jednak nie wszystko, co można zaobserwować w okolicy Proximy Centauri. Obserwatorium ALMA (*Atacama Large Millimeter/submillimeter Array*), obecnie największy zestaw radioteleskopów na Ziemi, znajdujący się na pustyni Atacama w Chile, donosi o istnieniu pierścieni pyłowych wokół tej gwiazdy. W odległości około 4 j.a. widać pierścien o temperaturze 50 K – analog pasa Kuipera z Układu Słonecznego – a jeszcze dalej (30 j.a.) kolejny. Najprawdopodobniej istnieje też trzeci, wewnętrzny pierścień, położony tuż za orbitą Proximy b w odległości 0,4 j.a., który składa się z pyłu rozgrzanego do 90 K. Dane nie wykluczają ponadto istnienia drugiego orbitującego ciała, które – jak wynika z dostępnych do tej pory danych – mogłoby być rozmiaru Saturna i świecić światłem odbitym od jego systemu pierścieni. Obserwacje pierścieni (wokół gwiazdy, ale także śledzenie tajemniczego „Saturna”) mają na celu zrozumienie pochodzenia Proximy b i lepsze określenie parametrów orbitalnych.

Michał BEJGER



Niebo w kwietniu

Nastał kwiecień, a zatem wiosna w pełni, a dodatkowo – po zmianie czasu na letni – Słońce zachodzi około godziny 20 i wznosi się w południe na ponad 50° , pozostając na nieboskłonie przez prawie 15 godzin. Zatem na obserwacje nocnego nieba, a zwłaszcza słabszych obiektów, pozostaje coraz mniej czasu.

Wśród planet Układu Słonecznego ostatnie dwie z nich, Uran i Neptun, znajdują się zbyt blisko Słońca i znikną w jego blasku. Neptun przeszedł przez koniunkcję ze Słońcem na początku marca, natomiast Uran zrobi to samo w drugiej połowie kwietnia. Następnie obie planety wyjdą na niebo poranne, lecz niekorzystne nachylenie ekliptyki do widnokregu o tej porze doby i jasne tło nieba sprawi, że na dobre warunki obserwacyjne obu planet trzeba zaczekać do połowy lipca, gdy nocne niebo odpowiednio się ściemni i wzniosą się one wyżej ponad linię horyzontu.

Jak pisałem miesiąc temu, planeta Merkury pod koniec kwietnia znajdzie się w maksymalnej elongacji zachodniej wynoszącej 27° . Jednak mimo tego na dużych północnych szerokościach geograficznych planeta zginie w zorzy porannej. Bardzo dobrze widoczne są natomiast pozostałe cztery planety Układu Słonecznego. Wenus w trakcie miesiąca przemierzy na niebie dystans ponad 35° ,

przecinając cały gwiazdozbiór Barana, 24 kwietnia mijając Plejady i kończąc miesiąc niecałe 7° na północny zachód od Aldebarana, 1° na zachód od pary gwiazd 4. wielkości κ i ν Tauri, wznosząc się godzinę po zmierzchu na wysokość wyraźnie ponad 10°. Do końca kwietnia Wenus oddali się od Słońca na 27° (widać od razu, co oznacza korzystne wieczorem i niekorzystne rano nachylenie ekliptyki do widnokregu), lecz wygląd tarczy planety zmieni się bardzo niewiele: jasność nadal wyniesie $-3,9^m$, średnica 11". Troszeczkę spadnie faza, do 89%. 17 kwietnia Wenus minie Księżyc w wieku niecałych 2 dni i fazy 4%. Wieczorem oba ciała oddzieli dystans 6,5 stopnia.

Następna po Wenus na nieboskłonie pojawi się planeta Jowisz, zbliżająca się do majowej opozycji. Początkowo Jowisz wszędzie niecałe 2 godziny po Wenus, ale już w trzeciej dekadzie kwietnia obie planety będzie można dostrzec o tej samej porze, choć nie jednocześnie, ponieważ znajdują się one po przeciwnych stronach widnokregu, i – przenosząc wzrok z jednej planety na drugą – trzeba sporo przekręcić głowę. Do końca miesiąca Jowisz zbliży się do gwiazdy Zuben Elgenubi (α Lib) na odległość 4°. Jednocześnie blask planety urośnie do $-2,5^m$, natomiast średnica tarczy zwiększy się do 45". W kwietniu Jowisza czekają dwa spotkania ze Srebrnym Globem: najpierw 3 kwietnia wieczorem Księżyc w fazie 87% znajdzie się 4,5 stopnia na lewo od Jowisza; drugi raz 30 kwietnia Księżyc prawie w pełni przejdzie 3° na północ od niego.

W drugiej części nocy coraz wyżej nad widnokregiem wznoszą się planety Mars i Saturn. Obie planety zaczną miesiąc efektywnie, od bliskiego spotkania. 2 kwietnia Mars zbliży się na mniej niż 1,5 stopnia do Saturna, pojawiając się razem z nim na nieboskłonie przed godziną 3 i górując o wschodzie Słońca. Potem Czerwona Planeta powędruje na wschód i do końca kwietnia oddali się od Saturna na prawie 15°. Ale nadal o świcie obie planety będą bliskie południka centralnego.

Obie planety zbliżają się do opozycji. Pierwszy przez nią przejdzie Saturn pod koniec czerwca, a następnie Mars – dokładnie miesiąc później. W związku z tym Saturn – jak przystało na planetę zewnętrzną – 18 kwietnia zmieni kierunek swojego ruchu wśród gwiazd na wsteczny i przez cały miesiąc przesunie się o mniej niż 0,5 stopnia. Dzięki temu przez tak samo długi czas łatwa do odnalezienia będzie świecąca z jasnością $+6,5^m$ gromada kulista M22, znajdująca się w kwietniu i maju niecałe 100' na południe i południowy wschód od planety z pierścieniami. Jeszcze bliżej M22 przejdzie Mars. 2 kwietnia, podczas koniunkcji z Saturnem, gromada znajdzie się tylko 22' na południe od Czerwonej Planety. W kwietniu jasność Saturna urośnie do $+0,3^m$, ale średnica tarczy utrzyma się na poziomie 17". W tym samym czasie blask Marsa zwiększy się do $-0,4^m$, średnica jego tarczy urośnie do 11", nie zmieni się przy tym faza, która pozostanie na poziomie 88%. Obie planety spotkają się z Księżycem w dniach 7 i 8 kwietnia. Najpierw Księżyc w fazie 61% dotrze na 5° na zachód od

Saturna (Mars znajdzie się 3° dalej), do późniejszej fazy Srebrnego Globu spadnie do 52%, a tym razem bliżej Księżycy znajdzie się Mars, zaś same planety oddzieli dystans 3°.

Mars, jako najbliższa Ziemi planeta zewnętrzna, porusza się ruchem wstecznym najkrócej, tylko od miesiąca przed do miesiąca po opozycji. Za to w tym czasie pokonuje największy dystans, około 10,5 stopnia. Saturn, poruszając się ruchem wstecznym przez 4,5 miesiąca przesunie się o 4 stopnie mniej. Jowisz podczas ruchu wstecznego, trwającego 4 miesiące, pokonuje odległość niewiele mniejszą od Marsa, niecałe 10°. Uran na ruch wsteczny przeznacz 5 miesięcy, pokonując 4°, zaś Neptun w ciągu ponad półrocznego ruchu wstecznego przesunie się o niecałe 3°.

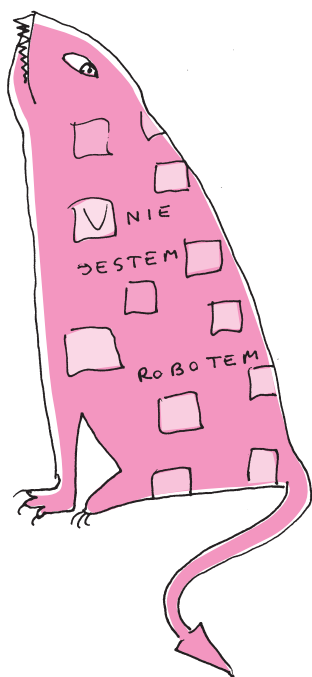
Księżyc zacznie miesiąc od pełni w gwiazdozbiorze Panny, 8 kwietnia przejdzie przez ostatnią kwadrę, 16 kwietnia przez now, 22 przez I kwadrę i 30 ponownie przez pełnię. Po drodze zakryje kilka gwiazd o jasnościach od 3 do 5 magnitudo. W nocy z 3 na 4 kwietnia dojdzie do zakrycia gwiazdy 4. wielkości γ Lib, przy fazie Księżycy 87%. Niestety, w Polsce Srebrny Glob wszędzie, już ją zasłaniając i około 23:15 da się dostrzec tylko odkrycie, lecz kilka godzin później Księżyc dotrze do położonej 2° dalej gwiazdy 5. wielkości η Lib. Gwiazda zniknie za księżycową tarczą od około godziny 3:30 do 4:45.

4 i 5 dni później Księżyc zakryje trzy dość jasne gwiazdy Strzelca. 7 kwietnia dojdzie do powtórki: jaśniejsza, świecąca blaskiem $+3,9^m$ gwiazda μ Sgr wszędzie około godziny 1:45, już zakryta przez Księżyc w fazie 62%. Do jej odkrycia trzeba poczekać mniej więcej godzinę. Tuż po tym za księżycową tarczą zniknie gwiazda 5. wielkości 15 Sgr. W tym przypadku Polskę przetnie północna granica zjawiska i do zakrycia dojdzie na południe od linii Gorzów Wlkp. – Częstochowa – Tarnów – Krosno. Do późniejszej fazy naturalnego satelity Ziemi spadnie do 52%, a tej nocy Księżyc zakryje gwiazdę 3. wielkości Albaldiah (π Sgr). Zjawisko potrwa od 4:30 do 5:50.

Kwiecień to miesiąc, w którym co roku promieniuje rój meteorów Lirydów. Radiant roju znajduje się 8° na południowy zachód od Węgi, a jego maksimum spodziewane jest około 22 kwietnia. Prognozuje się wtedy około 20 meteorów na godzinę. W tym roku w obserwacjach przeszkodzi Księżyc w fazie 40%, lecz zajdzie on około godziny 1:30 i potem przez 2,5 godziny meteory powinny być bardzo dobrze widoczne. Zwłaszcza że ich radiant wzniesie się do tego czasu na prawie 70°.

W tym miesiącu maksimum swojej jasności osiąga miryda R Leo. Jej okres zmian blasku to 310 dni, a podczas maksimum może pojaśnieć do nawet $+4,5^m$. R Leo jest łatwa do odnalezienia, gdyż znajduje się 5° na zachód od jasnej gwiazdy Regulus. Dodatkowo wyróżnia się ona wyraźnie czerwoną barwą. R Leo góruje około godziny 21.

Ariel MAJCHER



Bestiariusz informatyczny (4)

W czwartym odcinku przyjrzymy się kilku akronimom o specyficznej budowie lub historii. Zaczniemy od dwóch dłuższych, a zarazem uroczych w wymowie: **WYSIWYG** (*What You See Is What You Get*, czyt. łyżylig) oznacza edytor prezentujący dane na monitorze komputera w sposób jak najbardziej zbliżony do tego, jak będą one wyglądać po wydrukowaniu, zaś **CAPTCHA** (*Completely Automated Public Turing test to tell Computers and Humans* czyt. kapcza) oznacza program komputerowy generujący test w zamierzeniu odróżniający ludzi od maszyn.

Ciekawą rodziną skrótowców są tzw. akronimy rekursywne, w których pełna nazwa odwołuje się do akronimu. Przykładami są tu **GNU** – system operacyjny zbliżony budową do systemu Unix (*GNU is Not Unix*), program do kompresji dźwięku **LAME** (*LAME Ain't an Mp3 Encoder*) czy biblioteka do rysowania **TikZ** (*TikZ ist kein Zeichenprogramm*), której nazwa pokazuje też, że nie wszystko musi być po angielsku. Niektóre z akronimów nie od zawsze miały rekursywne rozwinięcie, np. popularny język programowania dynamicznych stron internetowych **PHP** wziął swój akronim od *Personal Home Page*, ale teraz rozwija się go jako *PHP: Hypertext Preprocessor*.

Część akronimów straciło swoje pierwotne znaczenie i zyskało nowe wskutek rozwoju technologicznego. Dla przykładu **HD**, który oznaczał gęstość zapisu na dyskach (*High Density*) lub potocznie dysk twardy (*Hard Disk*), dziś funkcjonuje w powszechnej świadomości jako określenie wysokiej rozdzielczości obrazu (*High Definition*). Z kolei **DOS**, oznaczający nazwę popularnego w latach 80. i 90. systemu operacyjnego (*Disk Operating System*), obecnie występuje częściej jako atak na system komputerowy w celu uniemożliwienia jego działania **DoS** (*Denial of Service*). W końcu niegdyśjszy standard komunikacji pamięci masowych **IDE** (*Integrated Drive Electronics*) dziś jest używany jako ogólna nazwa na środowisko programistyczne (*Integrated Development Environment*).

Niektóre nazwy, które wyglądają na akronimy, wcale początkowo nimi nie były, a ewentualne ich rozwinięcie zostało dodane później (po angielsku taki akronim to *backronym*). Najlepszym przykładem jest **Wi-Fi** – nazwa zestawu standardów do budowy bezprzewodowych sieci komputerowych – aktualnie tłumaczone jako *Wireless Fidelity*, na wzór hi-fi. W roku 1996 firma Intel wprowadziła na rynek procesor Pentium z nowym zestawem instrukcji wektorowych, które ochrzciła technologią **MMX**. Oficjalnie akronim ten nic nie znaczył, ale niektórzy rozwijali go jako *MultiMedia eXtension*, gdyż nowe instrukcje były używane przede wszystkim do przyspieszania przetwarzania dźwięku i obrazu.

Podobnie było z protokołem **TWAIN** standaryzującym komunikację pomiędzy komputerami a urządzeniami pracującymi z grafiką (skanerami, cyfrowymi aparatami fotograficznymi). Jego nazwa pochodzi od wersu „Oh, East is East, and West is West, and never the twain shall meet” z wiersza *The Ballad of East and West* Rudyarda Kiplinga, co miało nawiązywać do trudności w komunikacji między tymi urządzeniami. Pojawiło się jednak humorystyczne rozwinięcie *Technology Without An Interesting Name*. Kontrastuje z nim nazwa innego standardu komunikacji ze skanerami – **SANE** (*Scanner Access Now Easy*).

Karierę robią też skróty, w których rozszyfrowaniu może pomóc wiedza o przyrostkach jednostek miar. I tak w ubiegłym stuleciu straszono nas pluskwą milenijną, czyli problemem **Y2K** (*Year 2 Kilo*), zaś teraz producenci telewizorów przekonują nas, że od zawsze marzyliśmy o technologii **4K** (*4 Kilo*;

ogólna nazwa standardu dla rozdzielczości obrazu 4 tysięcy pikseli szerokości). Takie skróty zawierające liczby zwane są numeronimami. Inne przykłady z tej rodziny to przymiotnik oznaczający trójwymiarowość **3D** (*Three-Dimensional*) i nazwa organizacji standaryzującej strony internetowe **W3C** (*World Wide Web Consortium*).

Dość oryginalne są też numeronimy powstałe z pojedynczych (ale za to długich) słów. Najpopularniejsze z nich to **I18N** (*InternationalizatioN*), oznaczający internacjonalizację oprogramowania, czyli dodanie możliwości wyświetlania komunikatów w różnych językach, oraz **L10N** (*LocalizatioN*), oznaczający lokalizację, czyli dostosowanie programu do cech charakterystycznych w danym kraju (tj. jednostki miary czy format daty).

Tomasz IDZIASZEK



Wysokości czworokąta Joanna JASZUŃSKA

Wysokości czworokąta nazwijmy prostą przechodzącą przez środek jego boku i prostopadłą do boku przeciwnego. W niektórych czworokątach wszystkie cztery wysokości przecinają się w jednym punkcie – *ortocentrum czworokąta*. Przykładowo kwadrat ma ortocentrum, a romb niebędący kwadratem nie ma.

Rozważmy czworokąt $ABCD$. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach 1 i 2.

Lemat. $KLMN$ to równoległobok, a jego środek S jest też środkiem odcinka PQ .

W dowodzie można wykorzystać np. linię środkową (*deltoid* 5/2017) lub środki ciężkości (*deltoid* 12/2011), a przy okazji wykazać, że punkt S jest środkiem ciężkości układu punktów A, B, C, D .

Twierdzenie. Czworokąt ma ortocentrum wtedy i tylko wtedy, gdy można na nim opisać okrąg.

Dowód. Na mocy lematu, symetria środkowa względem S przeprowadza punkt M na K , a wysokość z M na prostą przez K i prostopadłą do AB , czyli na symetralną boku AB . Analogicznie obrazami pozostałych wysokości są odpowiednie symetralne boków. Wobec tego ortocentrum czworokąta istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wspólny punkt symetralnych jego boków, czyli środek okręgu opisanego. \square

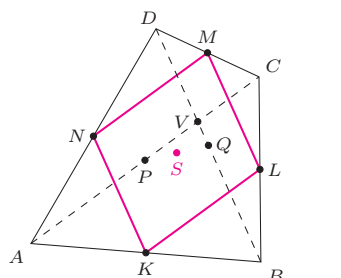
Wniosek. Punkty H, S, O leżą na jednej prostej, w tej kolejności i $HS = SO$.

W zadaniach 1, 2, 4 i 5 zakładamy, że czworokąt $ABCD$ ma ortocentrum.

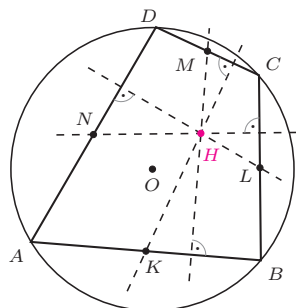
1. Udowodnij, że punkt H jest ortocentrum trójkąta PQV .

2. Niech proste AB i CD przecinają się w punkcie W . Wykaż, że $WH \perp KM$.

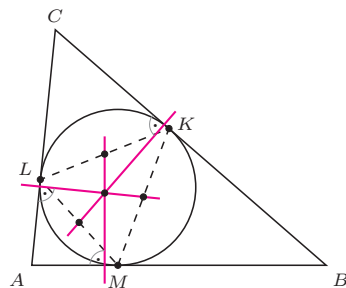
3. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M . Udowodnij, że proste przechodzące przez środki odcinków KL, LM, MK i prostopadłe odpowiednio do boków AB, BC, CA przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 1. K, L, M, N, P, Q są środkami odpowiednich boków i przekątnych.



Rys. 2. H – ortocentrum czworokąta



Rys. 3

Polecam hasła *multitudes* i *anticenter* na stronie www.cut-the-knot.org.

Rozwiązania

R1. Wiemy, że symetria względem S zamienia punkty P i Q oraz punkty O i H . Symetralna odcinka AC jest do niego prostopadła, przechodzi przez jego środek P i przez O – środek okręgu, w którym AC jest cięciwą. Jej obrazem w symetrii względem S jest więc prosta prostopadła do AC , przechodząca przez Q (czyli wysokość trójkąta PQV) i przez H . Analogicznie wysokość trójkąta PQV z wierzchołka P też przechodzi przez H , co kończy dowód. \square

R2. Proste KH i MH są wysokościami trójkąta KMW , więc WH też jest. \square

R3. Niech S oznacza środek ciężkości trójkąta KLM (rys. 3). Wówczas jednokładność o środku S i skali -2 przeprowadza środek odcinka KL na punkt M . Wobec tego przy tej jednokładności obrazem prostej przechodzącej przez tenże środek i prostopadłej do AB jest prosta przechodząca przez punkt M i prostopadła do AB , czyli prosta przechodząca przez środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Analogicznie obrazami pozostałych opisanych w zadaniu prostych też są proste przez I . Stąd również wyjściowe proste są współpękowe. \square

Zadania domowe

4. Niech H_A, H_B, H_C, H_D będą odpowiednio ortocentrami trójkątów BCD, CDA, DAB, ABC . Wykaż, że odcinki AH_A, BH_B, CH_C, DH_D mają wspólny punkt.

Wskazówka. Punkt H jest ich wspólnym środkiem.

Wynika stąd dodatkowo, że czworokąty $ABCD$ oraz $H_AH_BH_CH_D$ są przystające, co daje inne rozwiązanie zadania 4 z *deltoidu* 3/2010.

5. Niech O' i O'' oznaczają odbicia symetryczne punktu O względem prostych AB i CD . Udowodnij, że punkt H leży na prostej $O'O''$.

6. Udowodnij, że płaszczyzny przechodzące przez środki krawędzi czworościanu i prostopadłe do przeciwległych krawędzi mają wspólny punkt (*punkt Monge'a*).

7. Wykaż, że w każdym trójkącie ortocentrum H , środek ciężkości S i środek okręgu opisanego O leżą na jednej prostej (*prostej Eulera*), w tej kolejności i $HS = 2 \cdot SO$.

Dowód znaleźć można m.in. w *deltoidzie* 2/2010.

8. Wykaż, że w dowolnym trójkącie proste równoległe do dwusiecznych poprowadzone przez środki przeciwległych boków przecinają się w jednym punkcie.

OLIMPIADA INFORMATYCZNA MA JUŻ 25 LAT!

21989 UCZESTNIKÓW WSZYSTKICH EDYCJI
1590 FINALISTÓW
387 ORIGINALNYCH ZADAŃ



Od roku szkolnego 1993/1994 uczniowie polskich szkół mogą rywalizować w Olimpiadzie Informatycznej, wykorzystując wiedzę i umiejętności kluczowe w pracy każdego informatyka. Należą do nich przede wszystkim projektowanie efektywnych algorytmów i programowanie.

Książka *Przygody Bajtazara* prezentuje wybór 50 zadań z najważniejszymi zagadnieniami ze wszystkich 25 edycji Olimpiady Informatycznej.

Książka zawiera:

- zadania pogrupowane tematycznie i uporządkowane od najprostszych do najtrudniejszych
- szczegółowy opis rozwiązania każdego zadania
- odnośniki do podobnych zadań olimpijskich
- opisy wybranych zagadnień takich jak: drzewa przedziałowe, kolejka minimów, haszowanie napisów, drzewo palindromów.

Zadania zawarte w książce stanowią znakomity materiał dydaktyczny dla przyszłych olimpijczyków, a także dla każdego, kto chce podjąć się ciekawych i oryginalnych wyzwań algorytmicznych.

Wyboru zadań i ich redakcji dokonali wytrawni algorytmicy, popularyzatorzy informatyki, od wielu lat zaangażowani w informatyczny ruch olimpijski: doktorzy Tomasz Idziaszek, Jakub Łącki oraz Jakub Radoszewski, we współpracy z profesorem Krzysztofem Diksem.

SPRAWDŹ SIĘ

Mamy daną wieżę z klocków. Na każdym klocku jest napisana liczba: na i -tym od dołu klocku jest napisana liczba a_i . Powiemy, że klocek z liczbą a_i znajduje się na swoim miejscu, jeśli występuje jako a_i -ty od dołu. Początkowo tylko klocek z liczbą 3 znajduje się na swoim miejscu.

Możemy usunąć niektóre klocki z wieży. Chcemy to zrobić tak, by na koniec jak najwięcej klocków było na swoich miejscach. Pozostałych w wieży klocków nie możemy zamieniać miejscami.



Obliczmy dla każdego klocka wartość $b_i = i - a_i$.

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|-------|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| a_i | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 2 | 5 | 6 | 5 | 8 | 10 |
| b_i | -1 | 1 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 2 | 1 |

Następnie uporządkujmy klocki niemalejąco według wartości b_i . Klocki, dla których zachodzi $b_i < 0$, pomijamy. Remisy rozstrzygamy na podstawie wartości a_i .

| b_i | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 |
|-------|-----|---|-----|----|-----|-----|-----|---|---|---|
| a_i | (3) | 1 | (4) | 10 | (5) | (6) | (8) | 1 | 2 | 5 |

Wynikiem jest najdłuższy podciąg rosnący w tak porządkowanym ciągu a_i .

O tym, dlaczego tak jest oraz jak efektywnie wyznaczyć najdłuższy podciąg rosnący w ciągu liczb, przeczytasz właśnie w tej książce!