



Nakład: 3500 egz.

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

NR 2 (525) 2018

CENA 4 ZŁ VAT 5%
PL ISSN 1770-1371 NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

**Jakie fale
nas kręcą?**
str. 1

W następnym numerze piszemy, jak zabić hydrę.



SPIS TREŚCI NUMERU 2 (525)

Jakie fale nas kręcą?
Szymon Charzyński str. 1


 Zadania str. 3

Ciekawe rodzaje błędów
programistycznych
Krzysztof Piecuch str. 4


Programowanie liniowe
w geometrii
Anna Wójcik str. 6

Wpisywanie w przestrzeni str. 7

Złociaków nigdy dosyć
*Kamila Łyczek,
Mariusz Skalba* str. 8

 Pierwiastkowanie pod
kreską
Karol Gryszka str. 10

Przesuwanie w zadaniach
olimpijskich
Michał Kieza str. 12


 Kłopoty z postępem
Magdalena Fikus str. 15

Informatyczny kącik
olimpijski (112):
Ciąg arytmetyczny
i Kamyczki str. 16

Klub 44 str. 17

Niebo w lutym str. 22

Bestiariusz informatyczny (3) str. 24

 Koła, półkola i pola
Joanna Jaszuska str. 25

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia;
rysunki techniczne: Stanisław Walczak.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2018 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

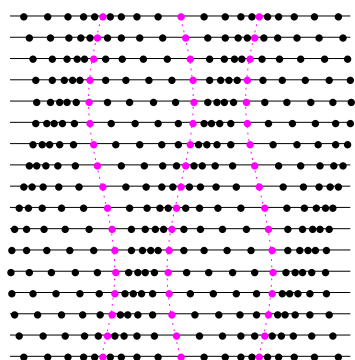
Jakie fale nas kręcą?

Szymon CHARZYŃSKI

Zapraszamy na stronę www.deltami.edu.pl, gdzie wszystkie rysunki ilustrujące artykuł można zobaczyć w wersji animowanej.



Fale mogą przenosić pęd i energię. Fala niosąca pęd, oddziałując na obiekt materialny, może mu swój pęd przekazać (czyli zmienić pęd obiektu), a więc będzie działać na niego z pewną siłą (zmiana pędu w czasie to przecież siła). Przykładem takiego zjawiska jest ciśnienie promieniowania elektromagnetycznego – światło pochłaniane przez obiekt materialny wywiera na niego ciśnienie, przekazując mu swój pęd. Efekt ten, choć mierzalny w laboratorium, w życiu codziennym jest praktycznie niezauważalny, ale ciśnienie wywierane na obiekty materialne, na przykład przez fale dźwiękowe, może być naprawdę duże. Dźwięk silników startującej rakiety potrafi kruszyć szyby w budynkach w odległości kilku kilometrów od niej, a fale, których źródłem są potężne eksplozje, potrafią przewracać budynki. Fale grawitacyjne, które zostały bezpośrednio zaobserwowane w 2015 roku, również przenoszą pęd. Symulacje numeryczne procesu zlewania się dwóch czarnych dziur sugerują, że pęd wynoszony w tym procesie z układu przez promieniowanie może być tak duży, iż powstająca w wyniku złania się czarna dziura może uzyskać prędkość rzędu kilkuset, a czasami nawet kilku tysięcy km/s względem środka masy układu podwójnego przed połączeniem czarnych dziur. Jej pęd oraz pęd unoszony przez promieniowanie dają w sumie zero w tym układzie, zgodnie z zasadą zachowania pędu. (O zjawisku tym pisaliśmy więcej w Δ_{15}^2 .)

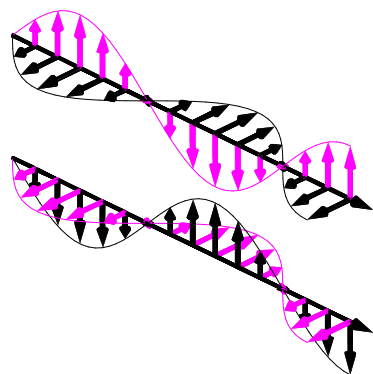


Rys. 1. Schematyczny rysunek fali podłużnej (np. dźwiękowej). Cząsteczki umieszczone na jednej linii wykonują drgania wokół swoich położenia równowagi (trzy cząsteczki zostały wyróżnione kolorem). Kolejne linie reprezentują kolejne chwile. Zakładając, że czas płynie z dołu do góry, widać, jak zagęszczenia i rozrzedzenia przemieszczają się w prawo.

Skoro fala może przenosić pęd, to nie powinno nikogo dziwić, że może też przenosić moment pędu (w niektórych rejonach Polski nazywany *krętem*). Skoro fala przekazując materialnemu ciału pęd popycha je, działając z pewną siłą, to przekazując mu moment pędu będzie je rozkręcać, działając momentem siły. Okazuje się, że nie każda fala niesie moment pędu. Powstaje więc naturalne pytanie, jak scharakteryzować te fale, które go przenoszą, i czym one się różnią od tych, które momentu pędu nie noszą, czyli jak wyobrazić sobie fale, które mogą nas rozkręcić.

Jak się za chwilę przekonamy, temat ten jest bardzo ciekawy i bogaty, między innymi dlatego, że istnieją dwa różne mechanizmy odpowiedzialne za przenoszenie momentu pędu przez fale. Mówimy, że fala może mieć *spinowy moment pędu* związany z *polaryzacją* lub *orbitalny moment pędu* związany z kształtem *frontu falowego*, przy czym fale *poprzeczne* mogą nieść oba rodzaje, natomiast fale *podłużne* mogą przenosić tylko orbitalny. Wyjaśnimy sobie teraz wszystkie te pojęcia i związki między nimi w sposób intuicyjny, odwołując się tylko do wyobraźni geometrycznej, bez użycia żadnych wzorów.

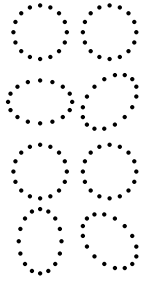
Fala podłużna to taka, dla której drganie ośrodka, w którym się rozchodzi, odbywa się wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali. Przykładem takiej fali jest fala dźwiękowa, dla której wielkością, która waha się w czasie, jest ciśnienie. Nasze ucho odbierając dźwięk, rejestruje cykliczne oscylacje ciśnienia wokół wartości średniej, przy czym częstość tych oscylacji odbieramy jako wysokość dźwięku. Gdybyśmy nagle zamrozili powietrze, w którym rozchodzi się fala, albo zrobili jakąś techniką jego zdjęcie, to zobaczylibyśmy zagęszczenia (tam ciśnienie jest większe) i rozrzedzenia (tam ciśnienie jest mniejsze). Cząsteczki powietrza, żeby się zagęszczać i rozrzedzać, muszą się zbliżać i oddalać, przemieszczając się właśnie wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali (rys. 1).



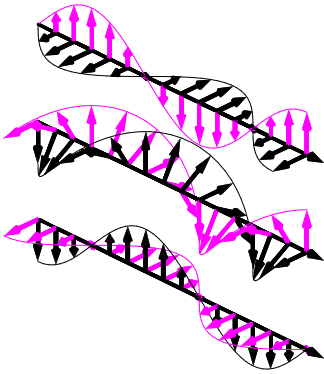
Rys. 2. Polaryzacje liniowe fali elektromagnetycznej. Pole elektryczne (kolor) i magnetyczne (czarne) są prostopadłe. Pole elektryczne górnej fali i dolnej też są prostopadłe. Mówimy, że płaszczyzny polaryzacji tych fal są prostopadłe.

W przypadku **fali poprzecznej** drganie ośrodka odbywa się w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali. Jeżeli szarpniemy napiętą strunę, to znacznie ona drgać wokół położenia równowagi, przy czym zaburzenie, które zapoczątkowaliśmy, będzie rozchodzić się wzdłuż struny. Jest to więc przykład fali poprzecznej, ponieważ wyróżniony punkt na strunie waha się w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali. Bardzo ważnym przykładem fali poprzecznej jest fala elektromagnetyczna. Fala taka nie potrzebuje żadnego materialnego ośrodka, żeby się rozchodzić i nawet najprościej jest opisywać jej rozchodzenie się właśnie w próżni. To, co w tym przypadku drga, to natężenie pola elektrycznego i magnetycznego. Okazuje się, że pola te są prostopadłe zarówno do siebie, jak i do kierunku rozchodzenia się fali. Dodatkowo wartości natężeń tych pól są proporcjonalne, czyli znajomość wektora jednego z nich (np. elektrycznego) wyznacza jednoznacznie wektor tego drugiego (rys. 2).

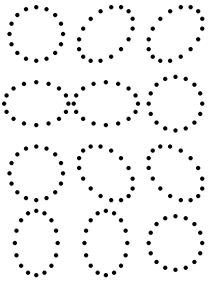
Fala grawitacyjna również jest falą poprzeczną. Żeby taką falę zarejestrować, można mierzyć odległość między dwiema swobodnymi masami próbnymi, spoczywającymi względem siebie w pewnej odległości (np. dwa swobodnie orbitujące satelity). Jeżeli



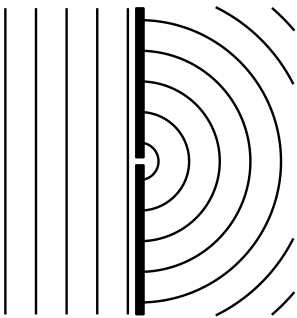
Rys. 3. Polaryzacje „+” (po lewej) i „x” (po prawej) fali grawitacyjnej. Kiedy nie ma fali, cząstki spoczywają na obwodzie okręgu. Kiedy przechodzi fala, cząstki również spoczywają, ale odległości między nimi się zmieniają, co wygląda, jakby cząstki się poruszały tak jak na rysunku.



Rys. 4. Ze złożenia fal elektromagnetycznych o prostopadłych polaryzacjach przesuniętych w fazie o 90° (na górze i na dole) otrzymujemy falę spolaryzowaną kołowo (w środku).



Rys. 5. Ze złożenia fal grawitacyjnych o polaryzacji „+” (po lewej) i „x” (po prawej) przesuniętych w fazie o 90° otrzymujemy falę spolaryzowaną kołowo (w środku).



Rys. 6. Fala płaska (po lewej) pada na przeszkodę, w której znajduje się mały otwór. Otwór staje się źródłem fali kulistej (po prawej).

odcinek łączący te masy będzie leżał wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali, to żadnego efektu nie zarejestrujemy. Jeżeli będzie w poprzek, to zaobserwujemy, że odległość między masami próbnymi oscyluje. To, co tutaj drga, to czasoprzestrzeń, co manifestuje się właśnie w zmiennej odległości między spoczywającymi względem siebie ciałami. Tradycyjnie ilustruje się to zjawisko wpływem fali grawitacyjnej na masy próbne rozmieszczone na obwodzie okręgu, tak jak na rysunku 3.

Polaryzacja to zjawisko związane z faktem, że dla fali poprzecznej drganie odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali, czyli może odbywać się w dowolnym spośród nieskończenie wielu kierunków. Jeżeli odbywa się wzdłuż jednego ustalonego kierunku, to mówimy o polaryzacji *liniowej*. Można wyróżnić dwa prostopadłe kierunki w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali (rys. 2) i dowolną polaryzację liniową przedstawiać jako złożenie drgań wzdłuż tych dwóch wyróżnionych kierunków. Dlatego mówi się, że dla fali poprzecznej są dwie możliwe polaryzacje, bo każda inna jest złożeniem tych dwóch.

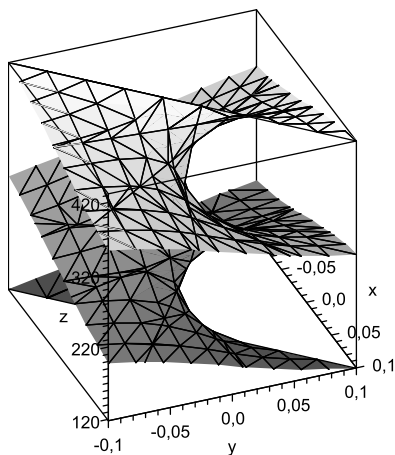
Jednak na polaryzacjach liniowych zabawa się nie kończy. Ze złożenia dwóch prostopadłych drgań o równych amplitudach, ale przesuniętych w fazie o $\pi/2$ (czyli 90°), uzyskujemy tzw. *polaryzację kołową* (rys. 4). Składając drgania o różnych amplitudach, możemy otrzymać każdą z polaryzacji eliptycznych. Dla przykładu, wektor pola elektrycznego dla fali elektromagnetycznej spolaryzowanej liniowo waha się wzdłuż jednego kierunku, a dla fali spolaryzowanej kołowo zatacza okrąg, czyli po prostu się kręci. Ponieważ pole elektryczne pomnożone przez wartość ładunku elektrycznego to siła, jaka działa na ten ładunek, więc pod wpływem fali spolaryzowanej liniowo ładunek wykonuje drgania wzdłuż jednego kierunku, a pod wpływem fali spolaryzowanej kołowo będzie wykonywał ruch po okręgu – fala po prostu go rozkręci.

Fala grawitacyjna jako fala poprzeczna ma podobnie jak fala elektromagnetyczna dwie niezależne polaryzacje, schematycznie przedstawione na rysunku 3. Tradycyjnie oznacza się je „+” i „x”. Dla obu polaryzacji, kiedy odległość między masami próbnymi maleje wzdłuż jednego kierunku prostopadłego do kierunku rozchodzenia się fali, rośnie odległość wzdłuż drugiego kierunku (prostopadłego do pierwszego). Polaryzacje „+” i „x” różnią się obrotem o 45° . Ze złożenia obu polaryzacji przesuniętych w fazie o 90° (tak samo jak dla fali elektromagnetycznej) otrzymujemy się polaryzację kołową (rys. 5).

Spinowy moment pędu jest związany z polaryzacją kołową w sposób opisany w poprzednim paragrafie. Jest jasne, że skoro fala elektromagnetyczna spolaryzowana kołowo rozkręca elektron, to przekazuje mu moment pędu. Żeby mu coś przekazać, sama najpierw musi to coś w sobie mieć. Jasne jest również, że skoro spinowy moment pędu jest przenoszony przez fale spolaryzowane kołowo, to fale, których zjawisko polaryzacji nie dotyczy, czyli podłużne, nie mogą tego rodzaju momentu pędu przenosić. Mogą to robić tylko fale poprzeczne, spolaryzowane w szczególny sposób. Fala poprzeczna spolaryzowana liniowo ma zerowy spinowy moment pędu.

Front falowy, zwany inaczej *powierzchnią stałej fazy*, to powierzchnia, na której wszystkie punkty ośrodka, w jakim rozchodzi się fala o pewnej ustalonej częstotliwości, są w jednej chwili w tej samej fazie ruchu drgającego. Może to być, na przykład, chwila maksymalnego wychylenia z położenia równowagi albo chwila przejścia przez stan równowagi. Dla ustalenia uwagi skupmy się na powierzchniach złożonych z punktów, w których akurat następuje przejście przez stan równowagi (wychylenie jest równe zero). Od kształtu tych powierzchni biorą się takie nazwy jak *fala płaska*, czyli taka, dla której front falowy jest płaszczyzną, czy *fala kulista*, dla której front falowy jest sferą (może trafniej byłoby nazywać je falami sferycznymi?). Te dwa wymienione przykłady są szczególnie ważne, ponieważ fale kuliste rozchodzą się z punkтового źródła, natomiast fale płaskie są dobrym przybliżeniem wtedy, gdy rozpatrujemy falę w małej objętości znajdującej się w dużej odległości od źródła (rys. 6). Gdy popatrzymy, jak zmienia się front falowy w czasie, to zobaczymy, że po prostu przesuwa się w kierunku rozchodzenia się fali (w szczególności dla fali płaskiej płaszczyzny przesuwa się wzdłuż kierunku do nich prostopadłego, a dla fali kulistej sfery puchną).

Orbitalny moment pędu jest związany z własnościami frontu falowego – po prostu front falowy musi się w pewnym sensie kręcić. Ani fale płaskie, ani kuliste nie mogą nieść orbitalnego momentu pędu, ponieważ nic tam się nie kręci, a ściślej, nie widać, żeby się kręciło, ponieważ zarówno płaszczyzna, jak i sfera, obracając się, ślizgają



Rys. 7. Kształt frontu falowego fali niosącej orbitalny moment pędu.

się po sobie. Nie da się więc odróżnić frontu falowego w kształcie sfery obracającej się od sfery nieobracającej się. Typowy kształt frontu falowego niosącego orbitalny moment pędu przedstawia rysunek 7. Ma on charakterystyczny helikoidalny kształt. Powierzchnia ta jest nawinięta wokół pewnej osi (tzw. osi wirowej), na której amplituda fali zanika. Oś wirowa leży wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali i kiedy front falowy przesuwa się wzdłuż tego kierunku, to jego ruch wygląda jak obrót tej powierzchni wokół osi wirowej (śruba, która się obraca i śruba, która się przesuwa, wyglądają tak samo). Oba rodzaje fal (podłużne i poprzeczne) mogą przenosić orbitalny moment pędu, ponieważ nie ma on związku z polaryzacją. Wiązki fal, niosące orbitalny moment pędu, mogą mieć różną naturę (dźwiękowe, elektromagnetyczne, grawitacyjne) i bardzo różne własności, ale to, co je wyróżnia, to właśnie charakterystyczny kształt frontu falowego, który zawsze jest podobny do tego z rysunku 7.

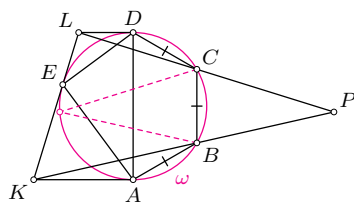
Z tego, co zostało powyżej przedstawione, widać już, że temat momentu pędu fali jest bardzo bogaty, a to dopiero wierzchołek góry lodowej. Wiemy, na przykład, że fala płaska albo kulista nie niesie orbitalnego momentu pędu, ale jeżeli jest falą poprzeczną (która może mieć różne polaryzacje) to może nieść spinowy moment pędu. W ogólności wiązki fal poprzecznych mogą być nośnikami obu typów momentu pędu i dla skomplikowanych wiązek problem rozdzielenia całkowitego momentu pędu niesionego przez falę na składowe spinową i orbitalną jest trudny i czasem może nie mieć jednoznacznego rozwiązania. Okazuje się również, że wiązki fal, niosące moment pędu, mają dużo więcej ciekawych własności, niż to, że potrafią rozkręcać cząstki z nimi oddziałujące. Więcej o własnościach i zastosowaniach fal niosących moment pędu napiszemy w następnym numerze *Delty*.



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

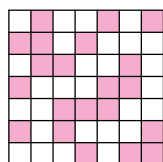
M 1555. Mamy do dyspozycji cztery wycięte z papieru przystające trójkąty prostokątne. Możemy wielokrotnie wykonywać operację polegającą na wybraniu jednego z kawałków i rozcięciu go wzdłuż wysokości, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego, na dwa mniejsze trójkąty prostokątne. Wykazać, że po wykonaniu skończonej liczby cięć zawsze co najmniej dwa kawałki będą przystające. Rozwiązanie na str. 23



Rys. 1

M 1556. Pięciokąt wypukły $ABCDE$ jest wpisany w okrąg ω o średnicy AD , przy czym $AB = BC = CD$ (rys. 1). Styczne do okręgu ω w punktach A i D przecinają styczną do okręgu ω w punkcie E odpowiednio w punktach K i L . Proste BK i CL przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że punkt symetryczny do P względem prostej BC leży na okręgu ω . Rozwiązanie na str. 22

M 1557. Dane są liczby całkowite $n > k \geq 2$ oraz tablica $n \times n$. Wyróżniono nk pól tej tablicy w taki sposób, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest dokładnie k wyróżnionych pól, a ponadto każda para kolumn tej tablicy ma w dokładnie jednym wierszu obydwa pola wyróżnione (np. jak na rysunku 2). Udowodnić, że każda para wierszy tej tablicy ma w dokładnie jednej kolumnie obydwa pola wyróżnione. Rozwiązanie na str. 23



Rys. 2

Przygotował Michał NAWROCKI

F 945. Akwarium w kształcie półsfery o średnicy 30 cm napełniono po brzegi wodą. W wyniku parowania poziom wody po dwóch dobach obniżył się o 1 cm. Przyjmując, że temperatura i wilgotność powietrza w pomieszczeniu, w którym znajduje się akwarium, są stałe, znaleźć czas, w ciągu którego woda z akwarium całkowicie wyparuje. Rozwiązanie na str. 8

F 946. Eksperymentator umieścił w zamrażarce mokry śnieg, zmierzył jego temperaturę, która wynosiła 0°C i powtarzał jej pomiar w równych odstępach czasu. Dziesiątemu i jedenastemu pomiarowi odpowiadały odpowiednio temperatury $-0,5^\circ\text{C}$ i -4°C . Jaki ułamek masy mokrego śniegu stanowiła woda? Ciepło właściwe lodu c wynosi $2,1 \cdot 10^3 \text{J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$, a ciepło topnienia lodu λ wynosi $3,35 \cdot 10^5 \text{J}/\text{kg}$. Rozwiązanie na str. 8

Ciekawe rodzaje błędów programistycznych

Krzysztof PIECUCH*

*doktorant, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

Mówi się, że nie ma ludzi nieomylnych. Zgubiony minus w równaniu może doprowadzić do szału niejednego matematyka czy fizyka. Podobnie jak zgubiony średnik, znak równości czy inna literówka potrafi sprawić, że informatycy poświęcają pisaniu programu więcej czasu, niż mieli zamiar. Dziś chciałbym porozmawiać o błędach w programowaniu. Ale nie takich zwykłych. W niniejszym artykule przedstawię kilka kategorii błędów, które zdarzają się bardzo rzadko, ale gdy już się zdarzą, wprawiają w zdumienie nawet doświadczonych programistów.

Moim ulubionym rodzajem błędu jest tak zwany *Heisenbug*. Gdy w naszym programie pojawia się błąd, próbujemy go znaleźć za pomocą specjalnych programów albo wypisując po kolei wartości pewnych zmiennych. Proces znajdowania błędów w oprogramowaniu nazywany debugowaniem. Heisenbug to błąd, który znika, gdy próbujemy debugować nasz program. Nazwa pochodzi od zasady nieoznaczoności Heisenberga. Pierwszy raz spotkałem się z tym błędem na studiach, gdy pisałem projekt w języku C. Napisany przeze mnie program nie wypisywał oczekiwanych wyników. Aby znaleźć w nim błąd, wypisałem na ekran poszczególne kroki algorytmu. Gdy to zrobiłem, program – ku mojemu zaskoczeniu – wypisał poprawne wyniki. Okazało się, że program zawierał zmienną, która nie była zainicjowana (nie nadałem jej wartości na początku programu). Gdy uruchamiamy funkcję, jej zmienne umieszczane są na tak zwanym stosie. Jeśli zmienna nie jest inicjowana, ma wartość w pewnym sensie „losową”.

System operacyjny przydziela naszej zmiennej miejsce w pamięci RAM. W tym miejscu mogą znajdować się jakieś dane, które były wykorzystywane przez nas albo inny program. Jeśli zapomnimy nadać zmiennej wartość – będzie ona zawierać właśnie takie „śmieci”. No dobrze. Ale dlaczego program zaczął działać, gdy wyświetlałem dodatkowe informacje? Aby wyświetlić informację na ekran, użyłem specjalnej funkcji. Ona również ma swoje zmienne i one również zostają umieszczone na stosie. Gdy funkcja wypisująca zakończyła działanie, uruchamiałem swoją funkcję z niezainicjowaną zmienną. Okazało się, że funkcja wypisująca zerowała to miejsce, gdzie później trafiała moja nieszczęsna zmienna. Niezwykły zbieg okoliczności sprawił, że program zaczął działać poprawnie.

Kolejnym rodzajem błędu jest *Ghost in the Code*, czyli duch w programie. Jest to rodzaj błędu, który może pozostać nieodkryty przez wiele, wiele lat. Jak powszechnie wiadomo, programiści nie dowodzą poprawności swoich programów. Oni je testują. Może się zdarzyć, że pomimo wielu testów błąd w programie nadal pozostanie. Może się też zdarzyć, że informatycy nawet udowodnią poprawność swojego algorytmu, a błąd w jego implementacji nadal pozostanie. Tak było w przypadku bardzo popularnego algorytmu. *Wyszukiwanie binarne*, bo o nim mowa, polega na znajdowaniu zadanego elementu w posortowanej tablicy poprzez dzielenie tablicy na połowę i sprawdzanie

środkowego elementu. Jeśli środkowy element jest mniejszy od naszej szukanej wartości, to musi się ona znajdować w prawej części tablicy, w przeciwnym przypadku – w lewej części. Algorytm został wymyślony w 1946 roku. Jak podaje Jon Bentley w swojej książce *Perelki oprogramowania* – pierwsza poprawna implementacja tego algorytmu została przedstawiona w 1962 roku. Książka została wydana w 1986 roku. Zawiera ona implementację tego algorytmu wraz z dowodem poprawności. Twórcy języka Java skorzystali z tej implementacji w swoim języku. Jakie było zdziwienie społeczności informatyków, gdy okazało się, że w 2006 roku algorytm wyszukiwania binarnego w Javie uległ awarii. Feralną liniijką okazała się instrukcja licząca średnią arytmetyczną dwóch liczb. Informatycy korzystali z prostego wzoru $(l + r)/2$. Zastosowany wprost, na komputerach niekoniecznie działa poprawnie. Komputery 32-bitowe przeznaczają na zapisanie liczby naturalnej 32 bity. Umożliwia to komputerom zapisanie liczby z przedziału od 0 do $2^{32} - 1$. Jeżeli zarówno wartość zmiennej l , jak i r jest bliska prawemu krańcowi tego przedziału, może się okazać, że suma nie zmieści się w 32 bitach. Aby pozbyć się tego problemu, informatycy obecnie korzystają z następującego wzoru na średnią arytmetyczną: $(r - l)/2 + l$. Ponieważ algorytm gwarantuje, że wartość zmiennej r jest zawsze większa od zmiennej l , więc wszystkie operacje możemy wykonać na 32 bitowych zmiennych.

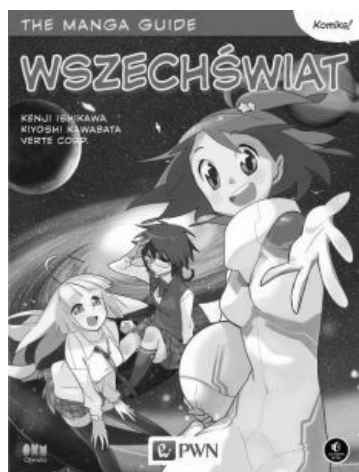
Ostatnim rodzajem błędu, jaki chciałem przedstawić, jest *Phase of the Moon*. Nazwa wzięła się z żartu o tym, że błąd występuje tak bardzo nieregularnie, że najwyraźniej musi zależeć od fazy księżyca. Jak wspominałem wcześniej – informatycy zazwyczaj nie dowodzą poprawności swoich programów, oni je testują. Kłopot w tym, że czasami bardzo trudno przetestować wszystkie błędy w programach. Przykłady? Proszę bardzo. Do każdego programu zwyczajowo dołącza się dziennik zmian (tak zwane changelogi). Są to pliki tekstowe opisujące, jakie dodatkowe funkcje zostały dodane, albo jakie błędy zostały usunięte w kolejnych wersjach programu. Moim faworytem jest tutaj program *Radiorecorder Web GUI*. W jego changelogu możemy przeczytać – „Naprawiono błąd: od teraz można nagrywać także w październiku”. Najwyraźniej twórcy zapomnieli przetestować, czy ich program będzie działał w październiku, bo w sumie

kto normalny by to sprawdzał. Jaki błąd popełnili twórcy oprogramowania i dlaczego akurat październik – możemy się tylko domyślać. Inny program działał dobrze przez 362 dni w roku. Problemem były tylko środy, tylko we wrześniu i tylko po 9-tym dniu tego miesiąca. Program daty zapisywał po angielsku w formacie: „Wednesday, September 22 2008”, ale programista zarezerwował o jeden bajt za mało dla tego napisu. Dlatego problem pojawiał się tylko, gdy napis był najdłuższy w danym roku – a to zdarzało się tylko trzy razy w roku. Tylko wtedy, gdy nazwa tygodnia była najdłuższa, nazwa miesiąca była najdłuższa i numer dnia w miesiącu zajmował dwa bajty. Inne błędy związane z czasem dotyczą tego, w jaki sposób komputery go liczą. Niektóre systemy operacyjne umożliwiają mierzenie czasu za pomocą specjalnych funkcji. Trzeba na nie czasami bardzo uważać. Na przykład liczą one ilość milisekund, które minęły od czasu włączenia się systemu operacyjnego.

Licznik liczy modulo 2^{32} , dodanie jedynki do $2^{32} - 1$ i otrzymanie zera nazywamy przekreśnieniem się licznika.

Jeśli zmienna, w której ta wartość jest przechowywana, jest 32 bitowa to przekreśli się ona po 49 dniach działania non-stop systemu. Mało osób zostawia komputer włączony na tak długo. Z pewnością też nie robią tego wszyscy testerzy oprogramowania. Dlaczego warto mówić o takich rzeczach? Dlatego, że może to mieć kolosalne konsekwencje. Na przykład z powodu błędów w liczeniu czasu, 25 lutego 1991 roku zawiódł amerykański system obrony przeciwlotniczej PATRIOT. Tego dnia iracka rakietą typu SCUD trafiła w barak w Dhahranie (Arabia Saudyjska), zabijając 28 amerykańskich żołnierzy.

Warto również pamiętać, jaki strach wywołał tak zwany problem roku 2000. Problem ten związany był z faktem, że w pierwszych komputerach rok zapisywano, używając jedynie ostatnich dwóch cyfr co czasem powodowało pomylenie roku 1900 z rokiem 2000. Do dzisiaj inni naukowcy śmieją się z nas, że informatyka to jedyna dziedzina nauki, która nie przewidziała nadejścia XXI wieku.

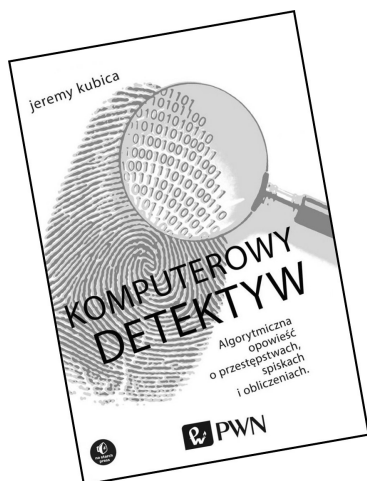


The Manga Guide Wszechświat

Bardzo lubię komiksy i bardzo się ucieszyłam, jak tata dał mi nowy komiks do przeczytania. Tym większa była moja radość, gdy okazało się, że jest to manga. Akcja komiksu jest wciągająca. Zainteresowały mnie japońskie legendy, jak, na przykład, legenda o zbieraczu bambusów. Bohaterowie komiksu w ciekawy sposób dyskutują na temat odkryć naukowych, np. o tym, czy Słońce krąży wokół Ziemi, czy Ziemia wokół Słońca, albo jak Eratostenes doszedł do przekonania, że Ziemia jest kulista. Bardzo przyjemna czcionka pozwala szybko czytać.

Kiedy mój tata zaczął przeglądać książkę, to też długo nie mógł się od niej oderwać. Bardziej od komiksów interesowały go teksty naukowe wplecione między nimi. Jego zdaniem dobór tematów jest bardzo dobry. Są opisane bardzo przystępnie, przejrzysto, w sposób przemawiający do wyobraźni. Jak powiedział, nie znalazł niczego, do czego mógłby się przyczepić i nawet sam się czegoś ciekawego dowiedział.

Zosia CHARZYŃSKA, 10 lat



Szukajcie (mądrze), a znajdziecie (szybko)

Cyberprzestępcy, strzeżcie się! Najmniejszy Wasz ślad nie ukryje się bowiem przed Frankiem Bieżącym, prywatnym detektywem, specjalizującym się w algorytmach wyszukiwania. Nic zatem dziwnego, że po kradzieży dokumentów z posterunku policji jej kapitan zwraca się właśnie do Bieżącego z prośbą o pomoc w ujęciu sprawców. O jego przygodach na drodze do wyjaśnienia zagadkowego rabunku możecie przeczytać na stronach *Komputerowego Detektywa* autorstwa Jeremy'ego Kubicy. Śledząc zmagania detektywa z przeciwnościami losu (często w uroczy sposób absurdalnymi), Czytelnik mimochodem opanuje podstawowe algorytmy wyszukiwania oraz związane z nimi struktury danych (dowie się, na przykład, dlaczego lepiej mieć kolejkę brudnych naczyń niż ich stos). Książka lekka, nietrudna i pouczająca – warto ją wyszukać (dowolnym algorytmem) w pobliskiej księgarni!

L. R.

Oczywiście, interesujący nas obszar znajduje się „pod” powyższą prostą, a zatem pierwsza z opisujących go nierówności powstaje poprzez zamianę znaku „=” w powyższej równości na „≥”. To samo robimy dla kolejnych sześciu boków wybranego wielokąta.

Gdy już znajdziemy siedem półpłaszczyzn, których przecięcie tworzy interesujący nas wielokąt, możemy w prosty sposób sprowadzić zadanie do programowania liniowego. Najpierw nierówności, które uzyskaliśmy w poprzednim kroku, przedstawiamy w postaci

$$A_i x + B_i y \leq C_i,$$

gdzie $i \in \{1, \dots, 7\}$. Wybrany wielokąt wypukły można więc zapisać jako:

$$W = \{(x, y) : A_i x + B_i y \leq C_i, i = 1, \dots, 7\}.$$

Zadanie polega, jak pamiętamy, na znalezieniu środka Czebyszewa (x_c, y_c) oraz promienia r koła K o środku w (x_c, y_c) – największego koła mieszczącego się w naszym wielokącie. Mamy zatem trzy nieujemne zmienne (x_c, y_c, r) oraz funkcję celu równą r , którą będziemy maksymalizować na pewnym ograniczonym zbiorze.

Zwróćmy uwagę, że nierówność $A_i x + B_i y \leq C_i$ dla każdego punktu (x, y) w kole K zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność:

$$(*) \sup_{(x,y)} \{A_i(x_c + x) + B_i(y_c + y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\} \leq C_i.$$

Na mocy nierówności Cauchy’ego–Schwarza dostajemy $A_i x + B_i y \leq \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \sqrt{x^2 + y^2}$. W tej sytuacji nierówność (*) może zostać zapisana jako

$$A_i x_c + B_i y_c + \sqrt{A_i^2 + B_i^2} r \leq C_i,$$

a nasz problem można sformułować w prostej do rozwiązania przez program postaci: „Znajdź trójkę (x_c, y_c, r) w zbiorze

$$\{A_i x_c + B_i y_c + \sqrt{A_i^2 + B_i^2} r \leq C_i : i = 1, \dots, 7\},$$

dla której wartość r jest możliwie największa”.

Powyższe zagadnienie można łatwo zaimplementować i szybko obliczyć w programie Sage (<http://sagecell.sagemath.org/?q=egjobr>). Okazuje się, że obliczając w ten sposób, miejsce w Polsce najbardziej oddalone od wszystkich granic jest położone we wsi Jackowice w województwie łódzkim, w odległości 24 km od uważanego za geometryczny środek Polski punktu w miejscowości Piątek.

Programowanie liniowe okazuje się skuteczną i prostą w użyciu metodą rozwiązywania wielu zagadnień. Tutaj pokazaliśmy, jak można stosować tę metodę do rozwiązywania ciekawych zadań geometrycznych, a pośrednio również problemów geograficznych.



Wpisywanie w przestrzeni

W poprzednim numerze przedstawiliśmy cykl wzajemnie wpisanych trójkątów i dwa wzajemnie wpisane pięciokąty. To było na płaszczyźnie. A teraz będzie przykład wzajemnego wpisania w przestrzeni trójwymiarowej.

Jeśli kartkę z widocznym obok rysunkiem zegnijemy wzdłuż poziomej prostej, to zobaczymy dwa wzajemnie wpisane czworokąty – ten z kolorowymi wierzchołkami i ten z szarymi. Sprawdźmy to.

To, że S' leży na płaszczyźnie PQR jest oczywiste – są na tej samej części kartki.

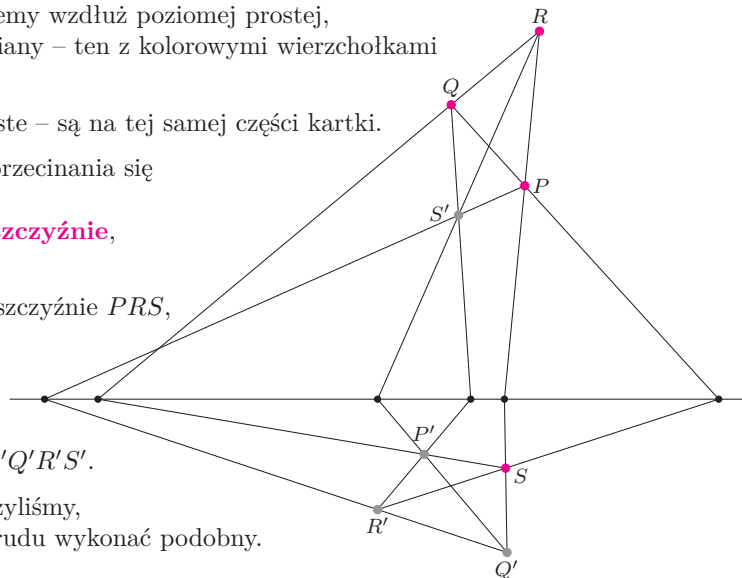
To, że P' leży na płaszczyźnie QRS , wynika z przecinania się prostych $P'S$ i QR , bowiem **przecinające się proste leżą na jednej płaszczyźnie**, zresztą tak samo jest z prostymi równoległymi.

Ten sam argument uzasadnia, że Q' leży na płaszczyźnie PRS , a R' na płaszczyźnie PQS .

Tak więc czworokąt $P'Q'R'S'$ jest wpisany w czworokąt $PQRS$.

Analogicznie uzasadniamy wpisanie $PQRS$ w $P'Q'R'S'$.

Wypada też zauważyć, że w rysunku, którego użyliśmy, nie ma nic nadzwyczajnego – każdy może bez trudu wykonać podobny.

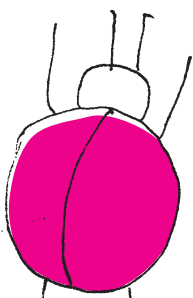


Oto przepis:

Rysujemy poziomą prostą, a nad nią byle jaki czworokąt, którego ani żaden bok, ani przekątna nie są poziome. I te boki, i przekątne przecinamy poziomą prostą. Następnie dowolnie nazywamy wierzchołki czworokąta literami P, Q, R, S' .

Teraz po drugiej stronie poziomej prostej wybieramy dowolnie punkt P' i łączymy go prostymi z jej punktami przecięcia z prostymi QR, RS' i $S'Q$. Na ostatniej z tak powstałych prostych wybieramy dowolnie punkt R' i łączymy go z punktem przecięcia prostej poziomej z prostą PS' . „Przy okazji” powstał punkt Q' . Gdy połączymy go z punktem przecięcia prostej poziomej z prostą PR , powstanie punkt S . Ku naszemu zaskoczeniu prosta $R'S$ trafi tam, gdzie należy.

M. K.



Złociaków nigdy dosyć

Kamila ŁYCZEK*, Mariusz SKAŁBA*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wyobraźmy sobie, że trafiliśmy do dziwnego kraju, w którym jedynymi dostępnymi środkami płatniczymi są monety o nominałach a i b . Formy płatności nie rozwinęły się na tyle, żeby płacić kartą lub czekiem, na domiar złego wybraliśmy się do cukierni, w której kasa jest zupełnie pusta i sprzedawca nie może wydać nam reszty. Nie chcąc tracić swoich złociaków, rozglądamy się za pysznościami w cenach $a + a$, $a + b$, $xa + yb \dots$. Niektórych kwot, oczywiście, nie daje się uzyskać z nominałów a i b , a niektóre można otrzymać na wiele sposobów.

Dla wszystkich względnie pierwszych liczb naturalnych $a, b \geq 2$ istnieje taka *największa niewygodna kwota* n , że wszystkie kolejne $n + 1$, $n + 2$, $n + 3 \dots$ mogą być uzyskane za pomocą tych nominałów. Wyjaśnienie, że taka największa niewygodna n faktycznie istnieje, jej postać oraz parę innych obserwacji użytkowania tylko dwóch nominałów można znaleźć w Δ_{14}^4 . A teraz rzucimy na sprawę nowe światło.



Rozwiązanie zadania F 945.

Proces parowania zachodzi powoli i z dobrym przybliżeniem można przyjąć, że woda w akwarium jest w równowadze termicznej z otoczeniem o stałej temperaturze, od którego pobiera ciepło uzupełniające ubytek energii związany z parowaniem. Masa wody Δm , która wyparuje w ciągu bardzo małego czasu Δt , przy stałej temperaturze, stałej wilgotności powietrza i braku wiatru, zależy tylko od pola powierzchni wody S :

$$\Delta m = \alpha S \Delta t,$$

gdzie α jest współczynnikiem proporcjonalności. Zmiana poziomu wody Δh jest związana z Δm zależnością $\Delta m = \rho S \Delta h$, gdzie ρ to gęstość wody. Stąd

$$\Delta h = \frac{\alpha}{\rho} \Delta t.$$

Ponieważ warunki parowania są stałe, więc zmiana poziomu wody zależy liniowo od czasu i nie zależy od innych parametrów, w szczególności od kształtu naczynia. Skoro po dwóch dobach poziom wody obniżył się o 1 cm, to całkowicie wyparuje ona z naczynia po 30 dobach.



Rozwiązanie zadania F 946.

Jeżeli przyjmiemy, że odstęp czasu pomiędzy kolejnymi pomiarami temperatury wynosi Δt , to temperatura śniegu wyniosła $T_1 = -0,5^\circ$ po czasie $9\Delta t$, a $T_2 = -4^\circ$ po czasie $10\Delta t$, przy czym po czasie $9\Delta t$ cała zawarta w śniegu woda była już zamrożona. Zapiszemy bilans cieplny, przyjmując, że prędkość odprowadzania ciepła w zamrażarce jest stała:

- od początku eksperymentu do 10-go pomiaru

$$9 \Delta t P = km\lambda + cm|T_1|,$$

- od 10-go do 11-go pomiaru

$$\Delta t P = cm(|T_2| - |T_1|),$$

gdzie P jest energią odprowadzaną w jednostce czasu, m jest masą śniegu, a k określa ułamek masy wód w śniegu. Z powyższych równań mamy

$$k = \frac{c(9|T_2| - 10|T_1|)}{\lambda}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych dostajemy, że woda stanowiła 0,19 masy mokrego śniegu.

1. $n = n(a, b) = ab - a - b$ jest największą liczbą, która nie jest postaci $xa + yb$ dla $x, y \geq 0$ – mimo największych starań nie uzyskamy jej ze złociaków.
2. Dokładnie połowa liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ jest postaci

$$(*) \quad z = xa + yb, \quad \text{gdzie } x, y \geq 0.$$

3. Jeśli $z \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, to dokładnie jedna z liczb: z albo $n - z$ jest postaci (*).

Własności 1 i 2 zostały udowodnione w Δ_{14}^4 . Z obu tych własności wynika własność 3 na mocy następującego rozumowania: nie może się zdarzyć, że dla pewnego $z \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ obie liczby z oraz $n - z$ są postaci (*), gdyż wówczas ich suma $z + (n - z) = n$ też byłaby postaci (*), a to jest sprzeczne z własnością 1 (przecież n to największa liczba, której nie jesteśmy w stanie uzyskać!). Tak więc obie z i $n - z$ nie mogą jednocześnie być postaci (*) – zatem z własności 2 otrzymujemy, że w każdym zbiorze $\{z, n - z\}$ dokładnie jedna z liczb jest postaci (*)!

Dla $a = 9$, $b = 5$ mamy $n(9, 5) = 31$, a liczby przedstawialne w postaci (*) (ich zbiór oznaczmy przez $P(a, b)$), mniejsze od 31, to

$$P(9, 5) = \{5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30\}.$$

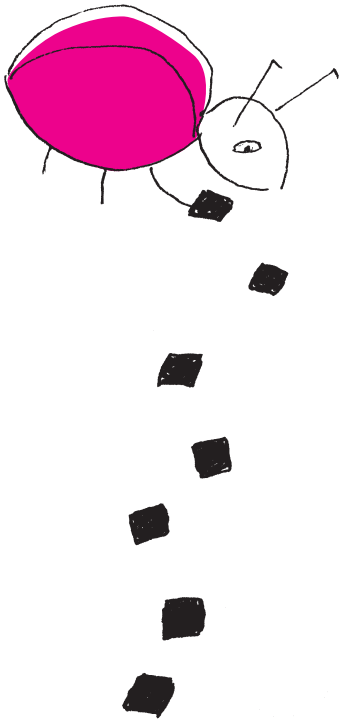
Natomiast liczby nieprzedstawialne w postaci (*) mniejsze od 31 to

$$N(9, 5) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 21, 22, 26\}.$$

Już na tym prostym przykładzie można zauważyć, że istnieją dość długie ciągi kolejnych liczb naturalnych, z których każda jest przedstawialna. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Dla dowolnych względnie pierwszych $a > b \geq 2$ w zbiorze $P(a, b)$ istnieje ciąg kolejnych $b - 1$ liczb naturalnych, ale nie istnieje taki ciąg długości b .

Dowód. Ponieważ liczby $1, 2, \dots, b - 1$ oczywiście nie są przedstawialne, więc na mocy własności 3 kolejne liczby $n - 1, n - 2, \dots, n - b + 1$ są przedstawialne. Gdyby w zbiorze $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ były kolejne liczby $m + 1, m + 2, \dots, m + b$, wszystkie należące do $P(a, b)$, to na mocy własności 3 żadna z liczb $n - m - 1, n - m - 2, \dots, n - m - b$ nie byłaby przedstawialna, co jednak jest sprzeczne z następującą obserwacją: odstępy między kolejnymi liczbami w $P(a, b)$ są nie większe od b (rzeczywiście, jeśli $xa + yb \in P(a, b)$, to następną liczbą naturalną s w $P(a, b)$ spełnia nierówność $s \leq xa + yb + b$). \square



Mówiąc zupełnie wprost jest to zachęta do uczestnictwa w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego, w którym należy przedstawić oryginalne matematyczne rozumowanie („uporanie” się z przedstawioną zachętą to dobry materiał na konkursową pracę). Konkurs jest skierowany do uczniów klas 7-8 oraz szkół ponadpodstawowych. Prace należy zgłaszać do 30 kwietnia. Informacje na temat Konkursu oraz niektóre dotychczas nagrodzone prace można znaleźć na stronie www.deltami.edu.pl.

W sformułowaniu kolejnego twierdzenia wielkość parametrów a, b nie odgrywa żadnej roli – w tym sensie ma ono charakter bardziej uniwersalny niż twierdzenie 1.

Twierdzenie 2. Ciąg kolejnych pięciu liczb z $P(a, b)$ zawsze zawiera podciąg arytmetyczny długości 3.

Zanim je udowodnimy w ogólności, zobaczmy, jak to działa na naszym przykładzie. Ciąg 5, 9, 10, 14, 15 zawiera podciąg arytmetyczny 5, 10, 15; ciąg 9, 10, 14, 15, 18 zawiera podciąg 10, 14, 18; ciąg 14, 15, 18, 19, 20 zawiera podciąg 18, 19, 20 itd.

Dowód. Niech $z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5$ będą kolejnymi liczbami w $P(a, b)$. Dla każdego $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ istnieją więc takie liczby całkowite nieujemne x_k, y_k , że

$$z_k = x_k a + y_k b.$$

Każdej parze liczb (x_k, y_k) przyporządkujemy parę ich reszt modulo 2, np. jeśli $(x_k, y_k) = (12, 15)$ to otrzymujemy parę reszt $(0, 1)$. Ponieważ wszystkie pary reszt modulo 2 to: $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ więc istnieją różne liczby $j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ takie, że x_j, x_k są tej samej parzystości oraz y_j, y_k są tej samej parzystości.

Wynika stąd, że liczba

$$\frac{z_j + z_k}{2} = \frac{x_j + x_k}{2} a + \frac{y_j + y_k}{2} b$$

jest postaci (*), a zatem

$$\frac{z_j + z_k}{2} = z_m, \quad \text{gdzie } m \in \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

gdyż liczby $z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5$ są kolejne w $P(a, b)$ □

Zachęta

Zachęcamy Czytelnika do napisania programu, który dla danych liczb względnie pierwszych $a > b \geq 2$ będzie generował zbiory $P(a, b)$. Wtedy można eksperymentować z różnymi konkretnymi parami a, b i na podstawie obserwacji dostrzegać różne prawidłowości. Niektóre z nich da się ująć w formę twierdzeń, czyli udowodnić – tak powstaje matematyka.

Pokusimy się o jeszcze jeden przykład. Skoro ostatnie $b - 1$ liczb z $P(a, b)$ są kolejnymi liczbami naturalnymi (dowód twierdzenia 1), to można zapytać o takie najmniejsze c , że obie liczby c oraz $c + 1$ należą do $P(a, b)$. Wiemy, że $c \leq ab - a - 2b + 1$, ale eksperymentując z różnymi wartościami a, b , dochodzimy do następującej hipotezy.

Hipoteza. Dla danych liczb względnie pierwszych $a > b \geq 2$ definiujemy $c(a, b)$ jako taką najmniejszą liczbę naturalną c , że obie liczby $c, c + 1$ należą do $P(a, b)$ (tzn. mają postać (*)). Wówczas $c(a, b)$ można otrzymać w następujący sposób.

Niech $a/b = [c_0; c_1, \dots, c_k]$ będzie takim rozwinięciem liczby a/b na ułamek łańcuchowy, że $c_k > 1$ (takie rozwinięcie jest jedyne). Niech $f/g = [c_0; c_1, \dots, c_{k-1}]$. Wówczas

$$c(a, b) = \min(ag, bf).$$

Teraz pojawiają się przynajmniej dwie możliwości: można próbować ją udowodnić lub obalić! Albo... rzucić się na głębszą wodę i zacząć badać pierwsze pojawienie się trójki kolejnych liczb w $P(a, b)$. Niech $d = d(a, b)$ będzie taką najmniejszą liczbą d , że $d, d + 1, d + 2 \in P(a, b)$ (zakładamy tu, oczywiście, że $b \geq 4$ – patrz twierdzenie 1). Na drodze eksperymentów komputerowych otrzymaliśmy

$$d(13, 8) = 63; \quad d(14, 9) = 54; \quad d(18, 11) = 108.$$

Niestety, nie potrafimy sformułować żadnej hipotezy dotyczącej „wzoru” na $d(a, b)$.



mała delta

Pierwiastkowanie pod kreską

Każdy z nas obcował z działaniami pisemnymi na liczbach naturalnych – dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem. Z pisemnym potęgowaniem można się rozprawić, wielokrotnie stosując pisemne mnożenie. Dzielać dwie liczby całkowite, możemy otrzymać pełne rozwinięcie dziesiętne (okresowe lub skończone) albo uzyskać dowolną dokładność wyniku. Tak, działania pisemne są sprytnie. A co z pierwiastkowaniem? Czy istnieje metoda na pisemne wyznaczenie kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnej liczby $\sqrt{17}$? Odpowiedź brzmi: tak.

Opis algorytmu

Algorytm zaprezentujemy na konkretnych przykładach.

Przykład 1: $\sqrt{1\ 048\ 576}$

$$\begin{array}{r|l}
 1\ 0\ 4\ 8\ 5\ 7\ 6 & a_1^2 \leq 1 \\
 -1 & \rightarrow a_1 = \boxed{1} \\
 \hline
 4 & a_2(20 \cdot \boxed{1} + a_2) \leq 4 \\
 -0 & \rightarrow a_2 = \boxed{0} \\
 \hline
 4\ 8\ 5 & a_3(20 \cdot 10 + a_3) \leq 485 \\
 -4\ 0\ 4 & \rightarrow a_3 = \boxed{2} \\
 \hline
 8\ 1\ 7\ 6 & a_4(20 \cdot 102 + a_4) \leq 8176 \\
 -8\ 1\ 7\ 6 & \rightarrow a_4 = \boxed{4} \\
 \hline
 0 & \\
 \hline
 \sqrt{1\ 048\ 576} = 1024 &
 \end{array}$$

Przykład 2: $\sqrt{17}$

$$\begin{array}{r|l}
 1\ 7 & a_1^2 \leq 17 \rightarrow a_1 = \boxed{4} \\
 -1\ 6 & \\
 \hline
 1\ 0\ 0 & a_2(20 \cdot \boxed{4} + a_2) \leq 100 \\
 -8\ 1 & \rightarrow a_2 = \boxed{1} \\
 \hline
 1\ 9\ 0\ 0 & a_3(20 \cdot 41 + a_3) \leq 1900 \\
 -1\ 6\ 4\ 4 & \rightarrow a_3 = \boxed{2} \\
 \hline
 2\ 5\ 6\ 0\ 0 & a_4(20 \cdot 412 + a_4) \leq 25600 \\
 -2\ 4\ 7\ 2\ 9 & \rightarrow a_4 = \boxed{3} \\
 \hline
 8\ 7\ 1\ \dots & \\
 \hline
 \sqrt{17} = 4,123\dots &
 \end{array}$$

Ideę algorytmu pierwiastkowania można opisać następująco (odwoływać się będziemy do przykładu 1):

1. Dzielimy liczbę na dwucyfrowe segmenty, począwszy od prawej strony – na przykładzie zaznaczone pionowymi liniami.
2. Dla pierwszego z lewej segmentu (może być jednocyfrowy) szukamy największej liczby naturalnej (oznaczymy ją a_1), której kwadrat nie przekracza wartości liczbowej tego segmentu (a_1 to pierwsza cyfra wyniku). Od wartości liczbowej segmentu odejmujemy a_1^2 .
W powyższych przykładach kolejne cyfry wyniku pierwiastkowania zostały wpisane w kwadraty.
3. Do wyniku odejmowania dopisujemy z prawej strony cyfry kolejnego segmentu – analogicznie jak w dzieleniu pisemnym – tę liczbę oznaczmy przez R_1 . W przykładzie 1. wynikiem odejmowania $1 - 1$ jest 0, nie wpisujemy go, stąd w trzeciej linii działania pisemnego pojawia się samo 4.
4. Szukamy takiej największej liczby naturalnej a_2 , że $a_2 \cdot (20a_1 + a_2) \leq R_1$ (u nas $a_2 \cdot (20 \cdot 1 + a_2) \leq 4$, stąd $a_2 = 0$). Liczba a_2 jest kolejną cyfrą wyniku pierwiastkowania.
5. Od R_1 odejmujemy liczbę $a_2 \cdot (20 \cdot a_1 + a_2)$ (w przykładzie jest $4 - 0$). Wynik odejmowania wraz

z dopisanymi dwoma cyframi kolejnego bloku to R_2 (w przykładzie $R_2 = 485$).

6. Przyjmijmy, że $R_i = R_{i-1} - a_i(20 \cdot a_1 a_2 \dots a_{i-1} + a_i)$ z dopisanymi po prawej stronie dwiema cyframi odpowiedniego segmentu. Przez a_i oznaczamy i -tą cyfrę (patrząc od lewej) wyniku pierwiastkowania. W kolejnych krokach szukamy takiej największej liczby a_j , że $a_j \cdot (20 \cdot a_1 a_2 \dots a_{j-1} + a_j) \leq R_{j-1}$.
7. Powtarzamy krok 6 do czasu, gdy jakieś R_j wyniesie 0 i wszystkie „niewykorzystane” bloki są zerowe, wynik jest wtedy dokładny (do bieżącego wyniku $a_1 a_2 \dots a_j$ należy dopisać jeszcze tyle zer, ile bloków zostało),

albo

kończymy algorytm w dowolnym innym momencie (wynik jest wtedy przybliżony). Jeśli na tym etapie pozostały niewykorzystane bloki, za każdy taki blok należy dopisać cyfrę 0 do wyniku,

albo

procedurę możemy kontynuować *ad infinitum*: jeśli wyczerpaliśmy wszystkie segmenty, a wynik odejmowania nie zeruje się, możemy dopisać nowy blok złożony z dwóch zer, a kolejne cyfry wyniku pierwiastkowania dopisywać po przecinku (analogicznie do dzielenia pisemnego).

Warto zaznaczyć, że zaprezentowana metoda jest w istocie dopełnianiem do kwadratu najbliższego danej liczbie. W ten sposób radzono sobie z pierwiastkowaniem przed erą maszyn liczących. Oczywiście, pierwiastki z wielu najważniejszych liczb były stabilizowane tak, aby można było szybko odwołać się do ich wartości bez konieczności każdorazowego wykonywania żmudnych obliczeń.

A tu dla niedowiarków dowód, że wartość $\sqrt{17}$ faktycznie jest liczbą niewymierną. Gdyby $\sqrt{17}$ był liczbą wymierną, czyli równałby się p/q , mielibyśmy $17q^2 = p^2$, a wtedy w rozkładzie obu stron na liczby pierwsze po lewej stronie występowałaby nieparzysta liczba siedemnastek, a po prawej parzysta. Sprzeczność.

Jeżeli stopień n jest liczbą złożoną, na przykład $n = p \cdot q$ dla pewnych liczb pierwszych p i q , to najpierw wykonujemy algorytm dla stopnia p , a następnie dla stopnia q .

Dlaczego to działa?

Spróbujemy krótko uzasadnić, dlaczego taki algorytm działa. Spójrzmy na problem następująco: dana jest pewna liczba n . Szukamy takiej liczby b_2 , że $(10b_1 + b_2)^2 \leq n$ oraz $10b_1 + b_2$ jest największą możliwą liczbą. Można, oczywiście, zgadywać, czego nie polecamy, zamiast tego dokonajmy prostego przekształcenia:

$$(10b_1 + b_2)^2 = 100b_1^2 + 20b_1b_2 + b_2^2 = b_1^2 \cdot 100 + b_2(2 \cdot b_1 \cdot 10 + b_2).$$

Gdy wrócimy do algorytmu, przekonamy się, że w oparciu o właśnie takie jak wyżej przekształcenie i jednocześnie zachowanie warunku maksymalizacji wyrażenia spełniającego $(10b_1 + b_2)^2 \leq n$ szukaliśmy liczb, które wpisywaliśmy w kwadraty.

Pierwiastki innych stopni

Pokazaliśmy, jak poradzić sobie z obliczaniem pierwiastka kwadratowego z dowolnej liczby całkowitej (nawet jeżeli ta wartość jest liczbą niewymierną). Ale przecież stopień pierwiastka może być inny! Możemy, na przykład, chcieć obliczyć $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{105}$. I cóż wtedy?

Autor niniejszego artykułu nie poddał się! Pierwszym spostrzeżeniem była redukcja problemu do pierwiastków, których stopień jest liczbą pierwszą. Kolejne spostrzeżenie to analogiczne przekształcenie wzoru na odpowiednią potęgę sumy dwóch liczb. Możemy mianowicie zastosować:

$$(10b_1 + b_2)^3 = (10b_1)^3 + b_2(300b_1^2 + b_2(30b_1 + b_2)),$$

$$(10b_1 + b_2)^5 = (10b_1)^5 + b_2(50\,000b_1^4 + b_2(10\,000b_1^3 + b_2(1000b_1^2 + b_2(50b_1 + b_2))))),$$

i tak dalej... Powyższe wzory pozwoliły skonstruować odpowiednie algorytmy. Niestety, nie są to już tak proste i szybkie procedury (zwłaszcza, gdy wymóg ręcznego wykonywania obliczeń nadal pozostaje w mocy). Złożoność obliczeniowa wzrasta, natomiast część, w której „zgadywana” jest liczba (kolejne cyfry), staje się tym trudniejsza, im wyższy jest stopień pierwiastka.

Przejdźmy od teorii do praktyki. Algorytm obliczania pierwiastków stopnia trzeciego prezentujemy na poniższym przykładzie. Zaczynamy od podzielenia pierwiastkowanej liczby na trzycyfrowe segmenty.

Przykład 3: $\sqrt[3]{2\,352\,637}$

2 3 5 2, 6 3 7	$a_1^3 \leq 1$
- 1	$\rightarrow a_1 = \boxed{1}$
1 3 5 2	$a_2(300 \cdot \boxed{1}^2 + a_2(30 \cdot \boxed{1} + a_2)) \leq 1352$
- 1 1 9 7	$3(300 \cdot \boxed{1}^2 + 3(30 \cdot \boxed{1} + 3)) = 1197$
1 5 5 6 3 7	$\rightarrow a_2 = \boxed{3}$
- 1 5 5 6 3 7	$a_3(300 \cdot 31^2 + a_3(30 \cdot 31 + a_3)) \leq 155\,637$
0	$3(300 \cdot 31^2 + 3(30 \cdot 31 + 3)) = 155\,637$

$$\sqrt[3]{2\,352\,637} = 13,3$$

Zachęcamy do prześledzenia powyższego przykładu – Czytelnik powinien zauważyć podobieństwo do poprzedniego algorytmu oraz ideę stojącą za obliczeniami.

Autor skonstruował również odpowiedni schemat w celu wyznaczenia liczby $\sqrt[5]{2}$, ale nawet sam po wyznaczeniu drugiej cyfry po przecinku miał już dosyć obliczeń ($\sqrt[5]{2} \approx 1,14$). Nie ma jednak powodu do rozpacz – otrzymany wynik jest lepszy od wyników, które można uzyskać prostym kalkulatorem. Te ostatnie bowiem potrafią zwykle obliczać jedynie pierwiastki kwadratowe...

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

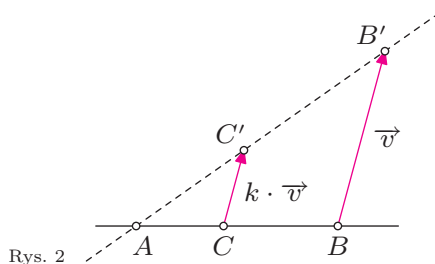
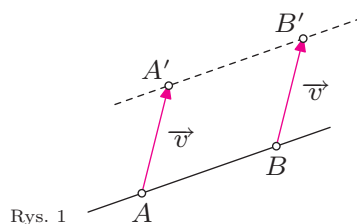
Małą Deltę przygotował Karol GRYSZKA*

Przesuwanie w zadaniach olimpijskich

Michał KIEZA

W tym artykule omówimy pewną bardzo pożyteczną technikę – tzw. *przesuwanie*. Polega ona na tym, że niektóre obiekty przesuwamy o pewien wektor i udowadniamy, że teza zadania jest niezmiennicza ze względu na wykonanie tej operacji. Ta metoda pozwala na sprowadzenie rozwiązywanego zadania do znacznie prostszego. Bardzo często ten prostszy przypadek ma jakiś rodzaj symetrii, z której łatwo wywnioskować tezę. Zanim przejdziemy do rozwiązywania zadań, odnotujmy dwie proste własności opisanej operacji.

Własność 1. Jeśli punkty A i B przesuniemy o wektor \vec{v} , otrzymując punkty A' i B' , to przesunięcie prostej AB o wektor \vec{v} da nam w rezultacie prostą $A'B'$ (rys. 1).



Własność 2. Dane są punkty A i B oraz taki punkt C na prostej AB , że $\frac{CA}{BA} = k$. Jeśli punkt B przesuniemy o wektor \vec{v} , otrzymując punkt B' , a punkt C' na prostej AB' spełnia $\frac{C'A}{B'A} = k$, to $\vec{CC'} = k \cdot \vec{v}$ (rys. 2).

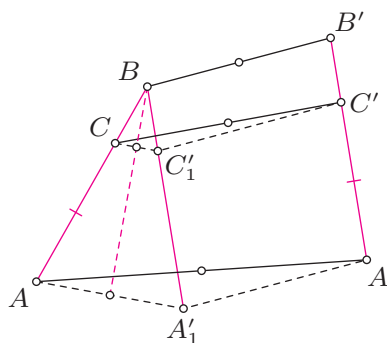
Łatwe dowody powyższych własności pozostawiamy Czytelnikowi. Zauważmy w szczególności, że z drugiej własności wynika, iż środek odcinka AB przesunie się o wektor $\frac{1}{2}\vec{v}$, zaś punkt symetryczny do B względem punktu A o wektor $-\vec{v}$.

Uzbrojeni w tytułową metodę i powyższe własności możemy przejść do rozwiązania kilku przykładów.

Przykład 1. (Twierdzenie Hjelmsleva) Dane są dwa odcinki AB i $A'B'$ jednakowej długości. Punkty C i C' leżą odpowiednio na odcinkach AB i $A'B'$, przy czym $AC = A'C'$. Udowodnić, że środki odcinków AA' , BB' i CC' leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie. Jeśli przesuniemy odcinek $A'B'$ o pewien wektor \vec{v} , to punkt C' także przesunie się o wektor v . Ponadto środki odcinków AA' , BB' i CC' przesuną się o wektor $\frac{1}{2}\vec{v}$. Zatem operacja przesuwania nie wpływa na prawdziwość tezy.

Przesuniemy zatem odcinek $A'B'$ o wektor $\vec{B'B}$ (rys. 3). Obrazem punktu B' jest, oczywiście, punkt B , zaś niech A_1 i C_1 będą obrazami odpowiednio punktów A' i C'



Rys. 3

w tym przesunięciu. Wystarczy udowodnić, że punkt B oraz środki odcinków CC_1 i AA_1 są współliniowe. Jednakże z równości

$$AB = A'B' = A_1B \quad \text{oraz} \quad AC = A'C' = A_1C_1$$

i twierdzenia Talesa wynika, że odcinki AA_1 i CC_1 są równoległe, a więc ich środki leżą na środkowej trójkąta AA_1B .

Twierdzenie Hjelmsleva można również sprawnie udowodnić, powołując się na fakt istnienia *symetrii z poślizgiem* (czyli złożenia symetrii i przesunięcia), która przekształca punkty A, B, C odpowiednio na A', B', C' . Wystarczy zauważyć, że wspomniane w treści środki boków muszą leżeć na osi wykorzystanej symetrii.

Nietrudno zauważyć, że opisaną metodą można rozwiązać zadanie ogólniejsze.

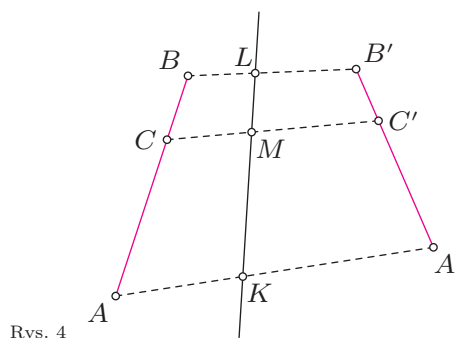
Dane są dwa odcinki AB i $A'B'$ (rys. 4). Punkty C i C' leżą odpowiednio na odcinkach AB i $A'B'$, przy czym

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

Niech K, L, M będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na odcinkach AA' , BB' i CC' , że

$$\frac{AK}{A'K} = \frac{BL}{B'L} = \frac{CM}{C'M}$$

Wykazać, że punkty K, L i M leżą na jednej prostej.



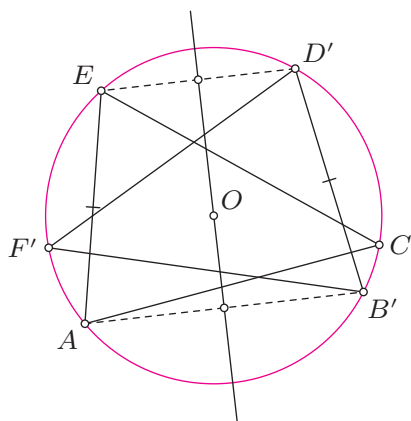
Rys. 4

Przejdźmy teraz do następnego przykładu.

Przykład 2. (III etap 57 OM) Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF$, $CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli przesuniemy trójkąt BDF o wektor \vec{v} , to środki wszystkich boków sześciokąta $ABCDEF$ przesuną się o wektor $\frac{1}{2}\vec{v}$. W takim razie każda z rozważanych w treści zadania prostych przesunie się także o wektor $\frac{1}{2}\vec{v}$, więc teza zadania jest niezmiennicza ze względu na tę operację.

Skoro trójkąty ACE i BDF są przystające, to mają jednakowe okręgi opisane (rys. 5). Przesuniemy więc tak trójkąt BDF , aby rozważane okręgi pokryły się. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ACE , zaś $B'D'F'$ obrazem trójkąta BDF w tym przesunięciu. Wystarczy udowodnić, że każda z prostych łączących środki przeciwległych boków sześciokąta $AB'CD'EF'$ przechodzi przez punkt O .



Rys. 5

Skoro $AE = BD = B'D'$, to czworokąt $AB'D'E$ jest trapezem równoramiennym o podstawach AB' i $D'E$. Prosta łącząca środki boków AB' i $D'E$ jest jego osią symetrii, a więc na niej musi leżeć środek okręgu opisanego na tym trapezie, czyli punkt O . Analogicznie dowodzimy, że punkt O należy do dwóch pozostałych prostych łączących środki przeciwległych boków sześciokąta $AB'CD'EF'$.

W kolejnym przykładzie przekonamy się, że metoda przesuwania może być także skuteczna w zadaniach o polach.

Przykład 3. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ przeciwległe boki są równoległe. Udowodnić, że trójkąty ACE i BDF mają równe pola.

Rozwiązanie. Wykażemy najpierw, że przesunięcie trójkąta BCD o wektor \vec{v} równoległy do boków AB i DE nie ma wpływu na prawdziwość tezy (rys. 6 i rys. 7). Niech bowiem h będzie odległością między prostymi AB i DE , zaś C_1 i F_1 takimi punktami odpowiednio na bokach AE i BD , że proste CC_1 , FF_1 są równoległe do prostej AB . Wtedy przed przesunięciem mamy

$$\Delta ACE = \frac{1}{2}CC_1 \cdot h \quad \text{oraz} \quad \Delta BDF = \frac{1}{2}FF_1 \cdot h,$$

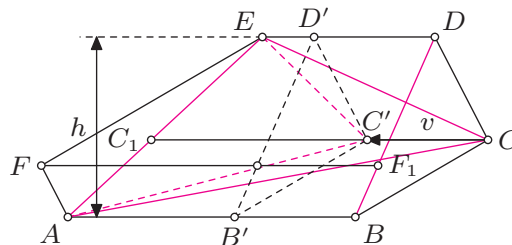
zaś po przesunięciu oba pola wynoszą odpowiednio

$$\frac{1}{2}(CC_1 \pm v) \cdot h \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}(FF_1 \pm v) \cdot h$$

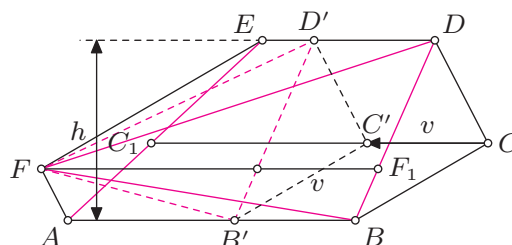
albo

$$\frac{1}{2}CC_1 \cdot h \pm \frac{1}{2}v \cdot h \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}FF_1 \cdot h \pm \frac{1}{2}v \cdot h.$$

Innymi słowy, podczas opisanej operacji oba pola zmieniają się o jednakową wielkość, a więc są równe przed przesunięciem wtedy i tylko wtedy, gdy są równe po przesunięciu.



Rys. 6



Rys. 7

Przyjmijmy bez straty dla ogólności, że $AB \geq DE$ i przesuniemy trójkąt BCD o wektor \overrightarrow{DE} , otrzymując w wyniku trójkąt $B'C'E$ (rys. 8). Wobec obserwacji poczynionej w pierwszym akapicie wystarczy udowodnić, że trójkąty $AC'E$ i $B'EF$ mają równe pola. Ponieważ przesunięcie zachowuje równoległość, to mamy

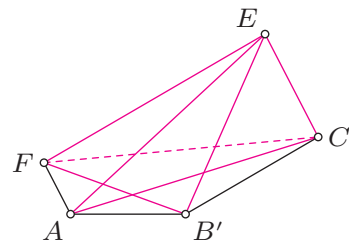
$$B'C' \parallel BC \parallel EF \quad \text{oraz} \quad C'E \parallel DE \parallel AF.$$

W takim razie

$$[AC'E] = [FC'E] = [B'EF].$$

Powyższe rozumowanie pozostaje, oczywiście, prawdziwe, gdy punkty A i B' pokrywają się.

Opisane rozwiązanie można dokończyć, inaczej wykonując jeszcze raz operacje z pierwszego akapitu rozwiązania, uzyskując trapez.



Rys. 8

Ostatni nasz przykład dotyczy sumy długości odcinków.

Przykład 4. (I etap 52 OM) Okrąg dzieli każdy bok rombu na 3 odcinki. Malujemy otrzymane odcinki kolejno na czerwono, zielono i biało, zaczynając od wierzchołka rombu i poruszając się po jego obwodzie w ustalonym kierunku. Wykazać, że suma długości odcinków czerwonych jest równa sumie długości odcinków białych.

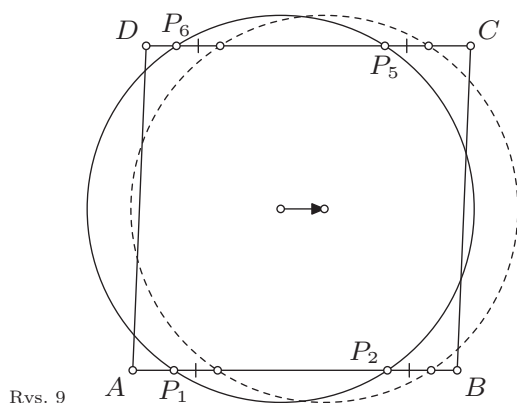
Rozwiązanie. Niech $ABCD$ będzie danym rombem. Oznaczmy przez P_1, P_2, \dots, P_8 kolejne punkty przecięcia danego okręgu z bokami rombu. Należy wykazać, że

$$AP_1 + BP_3 + CP_5 + DP_7 = BP_2 + CP_4 + DP_6 + AP_8$$

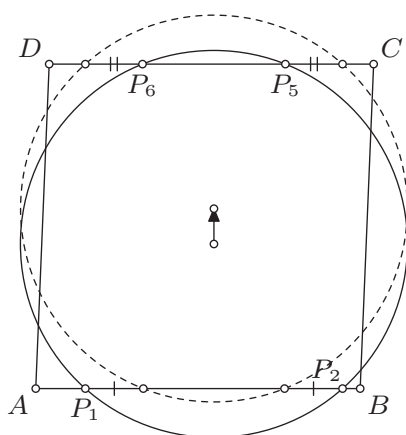
albo

$$AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6 = AP_8 + CP_4 - BP_3 - DP_7.$$

Jeśli przesuniemy dany okrąg o pewien wektor \vec{v} równoległy do boku AB (rys. 9), to odcinki AP_1 i DP_6 wzrosną o v (albo zmaleją, jeśli zwrot był przeciwny do zwrotu wektora \vec{AB}), zaś odcinki BP_2 i CP_5 zmaleją o v (albo wzrosną, jeśli zwrot był przeciwny do zwrotu wektora \vec{AB}). W takim razie przy takiej operacji liczba $AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6$ nie zmienia się. Jeśli teraz przesuniemy dany okrąg o pewien wektor \vec{v} prostopadły do boku AB (rys. 10), to odcinki AP_1 i BP_2 wzrosną o pewną wartość, zaś odcinki CP_5 i DP_6 zmaleją o pewną wartość (lub na odwrót w obu przypadkach, gdy zwrot wektora jest w kierunku AB). Zatem i w tym przypadku liczba $AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6$ nie zmienia się. Skoro dowolny wektor można przedstawić w postaci sumy wektora równoległego do AB i prostopadłego do AB , to przesuwanie danego okręgu nie zmienia wartości sumy $AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6$. To samo dotyczy sumy $AP_8 + CP_4 - BP_3 - DP_7$.



Rys. 9



Rys. 10

Przesuniemy zatem tak dany okrąg, aby jego środek pokrył się ze środkiem danego rombu. Wobec poprzednich rozważań wystarczy dowieść tezy w tym przypadku. To jednak natychmiast wynika z symetrii problemu.

Na koniec przedstawiamy kilka zadań, które można rozwiązać opisaną metodą.

Zadania

1. (I etap 62 OM) W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD , zaś przekątne przecinają się w punkcie E . Wykazać, że prosta zawierająca dwusieczną kąta BEC jest prostopadła do prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BD$.

2. (APZM 2005) Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $BC = AD$. Na bokach BC i AD zbudowano na zewnątrz takie trójkąty BEC i AFD , że $BE = AF$ oraz $CE = DF$. Udowodnić, że środki odcinków AB , EF i CD leżą na jednej prostej.

3. Na płaszczyźnie dane są kwadraty $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$, przeciwnie zorientowane o bokach odpowiednio długości a i b . Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na odcinkach AA', BB', CC', DD' , przy czym

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{BL}{LB'} = \frac{CM}{MC'} = \frac{DN}{ND'} = \frac{a}{b}.$$

Dowieść, że punkty K, L, M i N leżą na jednej prostej.

4. Częścią wspólną dwóch jednakowych kwadratów jest ośmiokąt. Boki jednego z kwadratów zostały narysowane na czerwono, drugiego zaś na niebiesko. Udowodnić, że suma długości czerwonych boków ośmiokąta jest równa sumie długości niebieskich boków.

5. Płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prostego o podstawie równoległoboku, tworząc w przekroju czworokąt wypukły $D_1D_2D_3D_4$. Niech d_i ($1 \leq i \leq 4$) będzie odległością punktu D_i od płaszczyzny ustalonej podstawy graniastosłupa. Udowodnić, że

$$d_1 + d_3 = d_2 + d_4.$$

6. (I etap 53 OM) Płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, tworząc w przekroju sześciokąt wypukły $D_1D_2 \dots D_6$. Niech d_i ($1 \leq i \leq 6$) będzie odległością punktu D_i od płaszczyzny ustalonej podstawy graniastosłupa. Dowieść, że

$$d_1^2 + d_3^2 + d_5^2 = d_2^2 + d_4^2 + d_6^2.$$

Wskazówki

1. Przesuń punkty B i D o wektor \vec{DC} .
2. Przesuń wierzchołki trójkąta BCE o wektor \vec{CD} .
3. Przesuń wierzchołki kwadratu $A'B'C'D'$ tak, by punkt A' przeszedł na punkt A .
4. Przesuń jeden kwadrat tak, aby jego środek pokrył się ze środkiem drugiego kwadratu.
5. Wykaż, że czworokąt $D_1D_2D_3D_4$ jest równoległobokiem i przesuń go tak, aby jego środek pokrył się ze środkiem podstawy.
6. Udowodnij najpierw, że $d_1 + d_3 + d_5 = d_2 + d_4 + d_6$ (wykorzystaj poprzednie zadanie).

Kłopoty z postępem

Ta audycja spadła mi z nieba, a dokładnie z radia (TOK FM), rozmowa profesor Magdaleny Popowskiej (UW) z redaktorem Cezarym Łasiczką. Słowa kluczowe: glifosat, Roundup, Monsanto. Ostatnio dla wielu z nas rzeczywiście kluczowe dzięki znakomitej książce Marcina Rotkiewicza „W królestwie Monszatanana”.

Firmę Monsanto utworzył w 1901 roku Amerykanin J.F. Queeny, który, zatrudniając kilkanaście osób i startując z kapitałem zakładowym 5 tys. dolarów, rozpoczął produkcję sacharyny, waniliny i kofeiny (główny odbiorca – Coca Cola). Od 1933 roku koncern Monsanto zmienił profil na ściśle chemiczny. Ta specjalizacja i specyficzne prawo amerykańskie sprawiły, że rząd zobowiązał firmę, bez możliwości odmowy, do wytwarzania na cele wojskowe (wojna w Wietnamie) wysoce toksycznej mieszanki dwu związków zabijających rośliny, użytych w Wietnamie pod nazwą Agent Orange. Udowodniono potem, że produkt ten miał także zgubny wpływ na ludzi, zabijając i niszcząc zdrowie wielu. To czarna karta w historii Monsanto.

W 1974 roku firma wypuściła na rynek nowy, niszczący chwasty preparat (herbicyd) glifosat, nazywając go Roundup. Związek ten, pod wieloma postaciami i odmianami, jest obecnie najczęściej stosowanym herbicydem w uprawach na całym świecie. Biotechnologiczny sukces firma odniosła także, wykorzystując bakterie do komercyjnej produkcji bydłowego hormonu wzrostu (1994), który po wprowadzeniu do hodowli powodował istotne zwiększenie mleczości krów.

Historia Roundupu ma swój dalszy ciąg wynikający z postępów w poznaniu fizjologii i biotechnologii roślin. Roundup hamuje aktywność jednego z enzymów szlaku syntezy białek (skutecznie zabija roślinę), a celowana zmiana takiego enzymu w roślinie (dokładnie – genu, który go koduje) stwarza rośliny odporne na Roundup. Rośliny uprawne są odporne, a chwasty zanieczyszczające uprawy – wrażliwe. W 1996 roku w pracowniach naukowych Monsanto opracowano metody wytwarzania soi, kukurydzy i bawełny niewrażliwych na Roundup (*Roundup Ready*) – nasiona te można było wysiewać na polach spryskanych herbicydem, który eliminował z uprawy chwasty.

Monsanto odnosi komercyjne sukcesy – w 2016 roku firma zatrudniała 21 tysięcy pracowników, miała zysk 2,38 miliarda dolarów (w tym samym roku, dla porównania, Apple osiągnął zysk 44,5 miliarda dolarów). Ruch Greenpeace, systematycznie występujący przeciw Monsanto, wydał 6 milionów dolarów na tę działalność w latach 1999–2012.

O wprowadzeniu do upraw roślin modyfikowanych genetycznie i stosowaniu Roundupu podejmowane są decyzje w skali państw i kontynentów. Ponieważ Roundup jest niezwykle wydajnym i skutecznym środkiem ochrony roślin, więc w masowej skali nie ma alternatywy. Po wielu debatach Komisja Europejska przedłużała wielokrotnie termin zgody na użycie w rolnictwie unijnym Roundupu, ostatni obowiązuje do końca listopada 2017 roku (w chwili gdy ukaże się ten numer *Delty*, decyzja będzie już znana). Doszła nowa okoliczność – związana z niekonkluzywnymi badaniami wielu instytucji i agencji nad potencjalną aktywnością rakotwórczą herbicydu. Niełatwo znaleźć formę dla takich badań na ludziach – wybrano badania dziesiątków tysięcy osób w rejonie USA, gdzie stosuje się Roundup na wielkich obszarach z podobną liczbą ludzi z obszarów wolnych od Roundupu. Uzyskano w dwu wielkich badaniach wiarygodne wyniki statystyczne z odpowiedzią na granicy TAK i NIE.

Obecnie w wielkotowarowym, „przemysłowym” rolnictwie stosuje się Roundup kilkakrotnie w ciągu roku. Jednym ze skutków jest wyjaławianie gleby z bakterii i grzybów, co jest dla mikrobiomu bardzo szkodliwe. Za to można zaprzestać tzw. głębokiej orki. Polscy rolnicy wielkoobszarowi (70% produkcji rolnej to zboża) mówią, że nie wyobrażają sobie dalszej produkcji bez Roundupu. . . Taki klincz.

Magdalena FIKUS



Informatyczny kącik olimpijski (112): Ciąg arytmetyczny i Kamyczki

Tym razem omówimy dwa zadania z jubileuszowej X Olimpiady Informatycznej Gimnazjalistów w roku szkolnym 2015/2016.

Ciąg arytmetyczny: Dany jest ciąg n liczb naturalnych a_1, a_2, \dots, a_n . Naszym zadaniem jest odpowiedzieć na q zapytań postaci: czy pod słowo $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j$ jest ciągiem arytmetycznym?

Zacznijmy od przypomnienia definicji ciągu arytmetycznego. Otóż, $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j$ jest ciągiem arytmetycznym, jeśli różnice między kolejnymi parami wyrazów są równe, czyli:

$$a_{i+1} - a_i = a_{i+2} - a_{i+1} = \dots = a_j - a_{j-1}.$$

Rozwiązanie $O(q \cdot n)$

Najprostsze rozwiązanie polega na sprawdzeniu dla każdego zapytania, wprost z definicji, czy dany ciąg jest arytmetyczny. W tym celu wyznaczamy różnicę ciągu jako $r = a_{i+1} - a_i$. Następnie sprawdzamy, czy różnica między każdymi dwoma sąsiednimi wyrazami jest równa r . Powyższe rozwiązanie działa w czasie $O(q \cdot n)$.

Rozwiązanie $O(n + q \cdot \log(n))$

Niech r będzie ciągiem różnic między kolejnymi wyrazami:

$$\underbrace{a_2 - a_1}_{r_1}, \underbrace{a_3 - a_2}_{r_2}, \underbrace{a_4 - a_3}_{r_3}, \dots, \underbrace{a_n - a_{n-1}}_{r_{n-1}}$$

Ciąg $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j$ jest arytmetyczny, jeśli odpowiadający mu ciąg różnic $r_i, r_{i+1}, \dots, r_{j-1}$ jest stały (wszystkie wyrazy są równe). Niech zatem x będzie najmniejszą liczbą w ciągu, zaś y największą. Wówczas wszystkie różnice znajdują się w przedziale $[x; y]$. Stąd, jeśli $x = y$, to ciąg różnic jest stały, czyli pierwotny ciąg jest arytmetyczny. Do wyznaczenia najmniejszego i największego elementu w przedziale można wykorzystać drzewo przedziałowe, które pozwala zrealizować tę operację w czasie $O(\log(n))$. Całe rozwiązanie działa w czasie $O(n + q \cdot \log(n))$.

Rozwiązanie $O(n + q)$

Okazuje się, że istnieje jeszcze szybsze rozwiązanie. Zauważmy, że ciąg różnic możemy podzielić na fragmenty o tych samych wartościach:

$$\underbrace{r_1, r_2}_{1}, \underbrace{r_3, r_4, r_5}_{2}, \dots, \underbrace{r_{n-2}, r_{n-1}}_k$$

Wówczas fragment $r_i, r_{i+1}, \dots, r_{j-1}$ jest stały, jeśli wszystkie jego wyrazy należą do jednej grupy. Przejdźmy teraz do opisu generowania grup. Ustalmy, że pierwsza różnica tworzy pierwszą grupę. Pozostałe różnice będziemy przeglądali od lewej do prawej. Jeśli rozpatrywana różnica jest równa poprzedniej, to rozszerzamy poprzednią grupę, w przeciwnym przypadku tworzymy nową grupę. Rozwiązanie działa w czasie $O(n + q)$.

Kamyczki: Danych jest n stosów kamyczków.

Wysokości kolejnych stosów to a_1, a_2, \dots, a_n . Celem Małgosi, bohaterki zadania, jest opróżnienie wszystkich stosów. Dziewczyna w jednym ruchu może opróżnić jeden dowolnie wybrany stos (nazwijmy ten ruch A) lub zabrać po jednym kamieniu z wszystkich niepustych stosów (nazwijmy ten ruch B). Ile minimalnie ruchów musi wykonać dziewczynka, aby opróżnić wszystkie stosy?

Obserwacja: Istnieje optymalne rozwiązanie, w którym najpierw wykonujemy ruchy typu A , a następnie ruchy typu B .

Dowód: Weźmy dowolne optymalne rozwiązanie. Jeśli w tym rozwiązaniu istnieje taki ruch x typu A , który występuje po jakimś ruchu typu B , to ruch x nie ma wpływu na pozostałe stosy oraz wcześniejsze ruchy typu B nie są konieczne do wykonania ruchu x . Stąd ruch x może zostać wykonany przed wszystkimi ruchami typu B .

Na mocy powyższej obserwacji w optymalnym rozwiązaniu najpierw wykonujemy ruchy typu A , a następnie ruchy typu B . Zauważmy, że maksymalna liczba ruchów typu A to n (jest co najwyżej n stosów do opróżnienia). Dla każdej możliwej liczby ruchów A (od 0 do n) obliczmy minimalną liczbę ruchów B , która pozwoli opróżnić wszystkie stosy.

Zastanówmy się teraz, jak dla ustalonej liczby k , oznaczającej liczbę ruchów A , wybrać k stosów do usunięcia tak, aby zminimalizować liczbę ruchów B . Zauważmy wcześniej, że po wykonaniu k ruchów typu A należy wykonać tyle ruchów B , ile wynosi wysokość najwyższego z pozostałych stosów. Stąd, aby zminimalizować liczbę ruchów typu B , należy wybrać k najwyższych stosów, co minimalizuje wysokość najwyższego z pozostałych stosów.

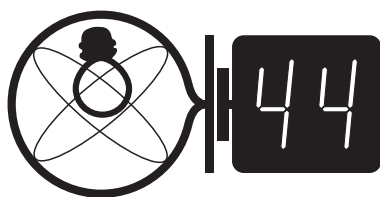
Przejdźmy teraz do opisu sposobu znajdowania k najwyższych stosów. Kolejność stosów nie ma znaczenia, dlatego zacznijmy od posortowania ciągu a rosnąco oraz ustalenia, że $a_0 = 0$. Wówczas k najwyższych stosów to: $a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \dots, a_n$. Zatem wynik dla ustalonego k to $k + a_{n-k}$ (wykonujemy k ruchów typu A , usuwając k najwyższych stosów, oraz a_{n-k} ruchów typu B , opróżniając wszystkie pozostałe stosy, z których najwyższy ma wysokość a_{n-k}).

Najmniejszą liczbą ruchów, potrzebną do opróżnienia wszystkich stosów, jest minimum z wyników dla każdego k od 0 do n . Rozwiązanie działa w czasie $O(n \cdot \log(n))$.

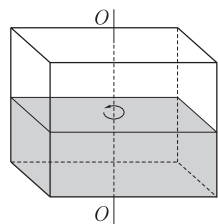
Bartosz ŁUKASIEWICZ

Skrót regulaminu

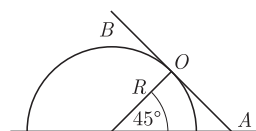
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



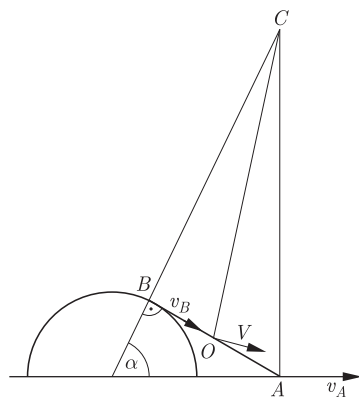
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2018



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania z fizyki nr 652, 653

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

652. Znaleźć przyspieszenie, z jakim spada pionowo w dół okrągła metalowa płytka o masie m w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B , równoległym do powierzchni Ziemi. Płaszczyzna płytki jest równoległa do linii pola magnetycznego i prostopadła do powierzchni Ziemi. Grubość płytki d jest dużo mniejsza od jej promienia R , przyspieszenie ziemskie ma wartość g .

653. Do wąskiego, prostopadłościennego naczynia nalano pewną ilość cieczy (rys. 1). Następnie naczynie zaczęto obracać wokół pionowej osi symetrii. Przy pewnej prędkości kątowej odsłonięta została k -ta część powierzchni dna. Jak zmieniła się w wyniku tego siła parcia na dno i wąskie ścianki boczne (w porównaniu z przypadkiem nieruchomego naczynia)? Ciecz nie wylewa się z naczynia. Napięcie powierzchniowe można zaniedbać.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2017

Przypominamy treść zadań:

644. Półwalec o promieniu R umocowany jest na poziomej płaszczyźnie (rys. 2). Jednorodny cienki pręt o długości $2R$ opiera się na walcu w połowie swojej długości, a jego dolny koniec A jest unieruchomiony. Po oswobodzeniu pręt ześlizguje się z walca. Nie ma tarcia. Jaka będzie prędkość górnego końca pręta B w chwili, gdy zetknie się on z powierzchnią walca?

645. Oszacować, jaka część ciepła parowania wody zużywana jest na zwiększenie jej energii wewnętrznej przy temperaturze $T = 373$ K? Ciepło parowania wody wynosi $q = 2,3 \cdot 10^6$ J/kg.

644. Oznaczmy prędkość środka masy pręta w chwili końcowej przez V , a prędkość kątową ruchu obrotowego wokół środka masy przez ω . Ruch pręta możemy też traktować jako czysty obrót wokół chwilowej osi obrotu z taką samą prędkością kątową ω . Prędkość v_B punktu B w chwili końcowej jest styczna do walca, a prędkość v_A punktu A ma kierunek poziomy (rys. 3). Punkt C , przez który przechodzi chwilowa oś obrotu, leży na przecięciu prostopadłych do prędkości v_A i v_B . Z podobieństwa trójkątów prostokątnych na rysunku 3 otrzymujemy, że długość odcinka BC wynosi $4R$. Z twierdzenia Pitagorasa długość odcinka OC jest równa $R\sqrt{17}$. Wynika stąd, że związek między prędkością środka masy i prędkością ruchu obrotowego dany jest wzorem $V = \omega R\sqrt{17}$. Ponieważ nie ma oporów ruchu, zachowana jest energia mechaniczna pręta

$$(1) \quad mg(h_1 - h_2) = mV^2/2 + I\omega^2/2,$$

gdzie m jest masą pręta, $I = mR^2/3$ jego momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek. Wysokości środka masy nad powierzchnią poziomą w chwilach początkowej i końcowej wynoszą odpowiednio $h_1 = R\sqrt{2}/2$ i $h_2 = R\sqrt{5}/5$. Podstawiając to do równania (1), otrzymujemy prędkość kątową

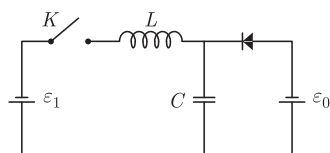
$$\omega = \sqrt{\frac{3}{26} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \frac{g}{R}}.$$

Szukana wartość prędkości punktu B dana jest wzorem $v_B = 4R\omega$.

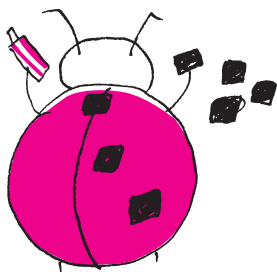
645. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki ciepło $Q = qm$ potrzebne do zamiany masy m wody w parę podczas wrzenia zużywane jest na zwiększenie energii wewnętrznej oraz pracę przeciw siłom zewnętrznego ciśnienia: $qm = \Delta U + p_n(V_p - V_w)$, gdzie V_w jest objętością wygotowanej wody, V_p objętością powstałej pary, $p_n = 1013$ HPa ciśnieniem pary nasyconej wody w temperaturze 373 K. Z równania Clapeyrona $p_n V_p = mRT/\mu$, gdzie $\mu = 18$ jest masą molową wody. Stosunek gęstości pary nasyconej i wody w temperaturze 373 K wynosi $5,7 \cdot 10^{-4}$, zatem objętość wygotowanej wody możemy pominąć w porównaniu z objętością powstałej pary. Stosunek zmiany energii wewnętrznej do pobranego ciepła dany jest wzorem

$$\frac{\Delta U}{Q} = \frac{1 - RT}{\mu q} \approx 0,9.$$

* * *



Na początku wyrazy skruchy. Na rysunku do treści zadania **636** odwrotnie zaznaczony został kierunek przewodzenia diody. Rozwiązanie zamieszczone w sierpniowym numerze *Delta* jest zgodne z rysunkiem zamieszczonym w niniejszym podsumowaniu. Prąd zaczyna płynąć przez źródło o sile elektromotorycznej $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$ dopiero wtedy, gdy napięcie na kondensatorze przewyższa ε_0 i to było istotą zadania. Błędny rysunek spowodował, że zadanie straciło sens, a szkoda, bo wydawało się dosyć interesujące. Większość uczestników zbojkotowała je bez komentarza. Początek jednego z nadesłanych rozwiązań sugerował, że autor milcząco zmienił rysunek na prawidłowy, ale przedstawione rozumowanie nie doprowadziło do pomyślnego finału. W tej sytuacji zadanie zostało unieważnione, a za zaistniałą sytuację wszystkich Czytelników bardzo przepraszam.



Najtrudniejsze w tym roku okazało się zadanie **625** ($WT = 3,6$) z elektrostatyki, w którym trzeba było obliczyć, o ile podnosi się ciecz dielektryczna, pod którą umieszczona jest naładowana płytką. Próby rozwiązania tego zadania podjęły tylko dwie osoby i były to rozwiązania obarczone istotnymi błędami. Współczynnik trudności $WT = 3,55$ miało zadanie **633** z optyki, gdzie należało wyznaczyć ogniskową zwierciadła sferycznego w układzie optycznym z soczewką rozpraszającą. Jedynym uczestnikiem, który przysłał rozwiązanie tego zadania i w dodatku poprawne, był pan **Jan Zambrzycki**. W zadaniu **628** z mechaniki, o takim samym WT , pytanie było o minimalną prędkość początkową żaby skaczącej przez półwalec. Większość klubowiczów przyjęła tu nieprawdziwe założenie, że punkt styczności żaby z półwalcem powinien znajdować się w najwyższym punkcie półwalca. Autorem poprawnego rozwiązania z pełną dyskusją był pan **Tomasz Wietecha**. Pan Tomasz jako jedyny rozwiązał też bezbłędnie zadanie **631** ($WT = 3,5$) na temat zderzenia sprężystego walców.

Kolejne miejsca w rankingu stopnia trudności zajęły zadania z mechaniki: **622** ($WT = 3,4$) i **635** ($WT = 3,35$). W pierwszym motocyklista miał rozpędzić się na torze kołowym, optymalnie wykorzystując siłę tarcia. Niektórzy uczestnicy nie uwzględniali tu faktu, że przy rozpędzaniu tarcie musi mieć zarówno składową dośrodkową, jak i styczną do toru, co było sporym zaskoczeniem. W drugim zadaniu należało wyznaczyć stan równowagi wahadła z tarcie. I znowu maksymalną liczbę punktów w obu przypadkach zdobył tu pan Wietecha, mistrz w rozwiązywaniu zadań z mechaniki.

W zadaniu **627** ($WT = 3,18$) z termodynamiki trzeba było znaleźć przyrost energii wewnętrznej gazu w izolowanym cieplnie naczyniu po obciążeniu tłoka dodatkowym ciężarkiem. Mimo że był to proces nieodwracalny, większość klubowiczów stosowała tu równanie przemiany adiabatycznej odwracalnej. Tego samego typu błędy pojawiły się rok temu, przy okazji zadania **595**.

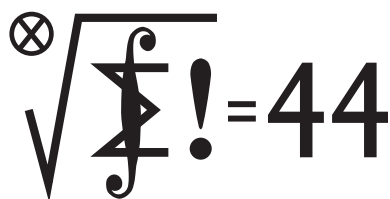
Ciekawostką jest pochodzenie zadania **624** ($WT = 2,5$), w którym należało wyznaczyć najmniejszą długość sprężyny obciążonej ciężarkiem spadającym w polu ciężkości po odchyleniu jej do poziomu i rozciągnięciu. Rozwiązywali je moi uczniowie na egzaminie do Cambridge. Udało się im to dopiero po powrocie do Warszawy, ale na uczelnię zostali przyjęci. W Klubie rozwiązali je poprawnie pan **Marian Łupieżowiec** i znowu pan Wietecha, który w tym roku po raz 12 zdobył 44 punkty.

Lista uczestników ligi zadaniowej Klubu 44F

po zakończeniu roku szkolnego 2016/17 (po 641 zadaniach)

Jan Zambrzycki	– 1–44+0,98
Marian Łupieżowiec	– 1–38,33
Jacek Konieczny	– 29,80
Ryszard Woźniak	– 28,77
Krzysztof Magiera	– 3–24,30
Karol Łukanowski	– 23,89
Tomasz Wietecha	– 12–17,90
Paweł Perkowski	– 2–14,81
Aleksander Surma	– 4–14,35
Jacek Grela	– 13,91
Jacek Piotrowski	– 2–12,75
Jerzy Witkowski	– 3–11,50
Andrzej Nowogrodzki	– 3– 9,49
Jędrzej Biedrzycki	– 7,44
Gerard Jachimowicz	– 5,10
Michał Koźlik	– 4– 4,57
Paweł Kubit	– 1,89

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2015–2017. Liczba przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2018

Zadania z matematyki nr 755, 756

Redaguje Marcin E. KUCZMA

755. Niech $P(x)$ będzie takim wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, że

$$P(x) + P''(x) \geq 2P'(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Dowieść, że $P(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

756. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Wykazać, że dla każdego układu dodatnich liczb całkowitych a_1, \dots, a_n zachodzi nierówność

$$\text{NWD}(a_1, \dots, a_n) \cdot \text{NWW}(a_1, \dots, a_n) \leq a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Scharakteryzować (dla ustalonego n) te układy a_1, \dots, a_n (dodatnich liczb całkowitych), dla których napisana nierówność staje się równością.

Zadanie 756 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2017

Przypominamy treść zadań:

747. Funkcja f , o wartościach rzeczywistych, jest określona, wypukła i różniczkowalna na zbiorze wszystkich liczb dodatnich; przy tym $|f'(n^2)| \geq 1/n^2$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Udowodnić, że funkcja f jest nieograniczona.

748. Czy można w pola tablicy o rozmiarach 8×8 wpisać liczby $-1, 0, 1$ (w każde pole jedną liczbę) tak, by sumy liczb w wierszach oraz sumy liczb w kolumnach utworzyły układ 16 różnych wartości? Czy odpowiedź zmieni się, gdy będziemy rozważali tablicę 14×14 (i wymagali 28 różnych wartości)?

747. Z wypukłości funkcji f wynika, że dla każdej pary liczb dodatnich x_0, x zachodzi nierówność

$$(1) \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Jeśli $f'(x_0) > 0$ w jakimkolwiek punkcie x_0 , to prawa strona (1) przedstawia funkcję nieograniczoną z góry i mamy tezę.

Dalej zakładamy, że $f' \leq 0$ (na całym przedziale $(0, \infty)$).

Warunek dany w założeniach mówi więc, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ mamy $f'(n^2) \leq -1/n^2$.

W nierówności (1) podstawiamy $x_0 = n^2$, $x = (n-1)^2$, i otrzymujemy

$$f((n-1)^2) \geq f(n^2) + f'(n^2)(-2n+1);$$

stąd

$$\begin{aligned} f(n^2) - f((n-1)^2) &\leq f'(n^2)(2n-1) \leq \\ &\leq \left(-\frac{1}{n^2}\right)(2n-1) \leq -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz przesumować te związki po $n = 1, \dots, N$:

$$f(N^2) - f(0) \leq -\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}\right).$$

Wyrażenie w nawiasie przybiera wartości dowolnie wielkie, zatem funkcja f jest (w rozważanym przypadku) nieograniczona z dołu.

748. Macierz (tabelkę) o wymaganej własności, rozmiaru $n \times n$, można utworzyć dla każdej liczby parzystej n (więc i dla 8, i dla 14). Przykładowa konstrukcja:

Niech $n = 2m$ i niech J oznacza macierz $m \times m$, złożoną z samych jedynek, zaś K – macierz $m \times m$, mającą jedynki na głównej przekątnej i nad nią, a poniżej przekątnej zera. Tworzymy macierz M rozmiaru $n \times n$ (o wyrazach $-1, 0, 1$):

$$M = \begin{bmatrix} K & J \\ -J & K-J \end{bmatrix} \quad (\text{postać blokowa}).$$

Nietrudno sprawdzić, że sumy liczb w kolejnych kolumnach macierzy M tworzą ciąg rosnący wszystkich liczb całkowitych od $-m+1$ do m , natomiast sumy liczb w kolejnych wierszach tworzą ciąg malejący wszystkich liczb całkowitych od $2m$ do $-2m+1$, z pominięciem tych uzyskanych już jako sumy kolumn. Macierz M ma więc żadaną własność.

* * *

Liga matematyczna żyje pełnią życia. Zamykamy jej trzydziesty szósty sezon. Pojawiło się w niej 766 uczestników. Najstarszy (stażem) wystartował przed trzydziestu sześciu laty, wraz ze startem ligi. Lider zaliczył 18 czterdziestoczworopunktowych rund; wiceliderzy – po 13. Lider łącznej (nieoficjalnej) klasyfikacji M+F: 11 + 12 (!). Wszyscy oni wciąż w świetnej formie.

Liga żyje. Nie wszyscy jej uczestnicy żyją. Chwila smutnej zadumy nad tymi, którzy odeszli...

* * *

Teraz wybrane zadania (w skrótowym omówieniu). Wyjaśnienie skrótów: WT – współczynnik trudności; LPR – liczba poprawnych rozwiązań.

Zadanie **727**. [Trójkąt foremny (bok $n \geq 2$) podzielony na n^2 trójkątików; wierzchołki siatki białe/czarne. Ruch: zmiana koloru punktów na prostej zawierającej bok jakiegoś trójkątika. Można od stanu: *wszystkie białe* dojść do stanu: *dokładnie jeden czarny?*] ($WT=3,22$; $LPR=4$). Jest to możliwe dla $n = 2, 3$, niemożliwe dla $n \geq 4$. Argumentację z rozwiązania firmowego (przez analizę sytuacji na wybranych sześciokątach o boku 1) przedstawili **Piotr Kumor** i **Janusz Olszewski**. Dwa pozostałe dobre rozwiązania (**Szymon Kitowski**

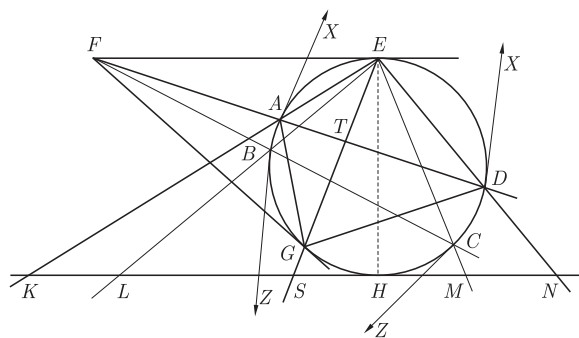
Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
 po zakończeniu sezonu
 (roku szkolnego) 2016/17

Marcin Kasperski	-	3-43,83
Adam Dzedzej	-	2-43,22
Roksana Słowik	-	1-41,91
Franciszek S. Sikorski	-	1-39,71
Marek Gałecki	-	5-37,76
Jędrzej Garnek	-	2-37,64
Krzysztof Maziarz	-	37,45
Michał Koźlik	-	30,59
Michał Miodek	-	2-30,30
Krzysztof Kamiński	-	2-28,37
Marek Spychała	-	2-27,55
Paweł Najman	-	7-27,41
Piotr Kumor	-	13-24,90
Bartłomiej Pawlik	-	24,60
Paweł Duch	-	1-24,10
Tomasz Wietecha	-	11-22,21
Piotr Lipiński	-	1-20,58
Paweł Kubit	-	6-20,54
Janusz Wojtal	-	18,58
Jędrzej Biedrzycki	-	17,62
Jakub Węgrecki	-	16,27
Szymon Kitowski	-	15,89
Andrzej Kurach	-	15,88
Stanisław Bednarek	-	14,78

Legenda (przykładowo): stan konta 6-20,54 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 20,54 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
 - stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 14 punktów;
 - przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2015, 2016 lub 2017.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!



i **Adam Dzedzej**) były oparte na formalnych rachunkach w \mathbf{Z}_2^3 i prowadziły do tezy poprzez wykazanie, że jeśli zostaje jedyny punkt czarny, to musi on być albo środkiem wyjściowego trójkąta, albo środkiem jego boku. Były ponadto próby dowodów indukcyjnych, jednak z problemem logicznym: przy mechanicznym stosowaniu przesłanki indukcyjnej (do trójkąta zanurzonego w wyjściowym) zmienia się zbiór ruchów zabronionych – chodzi o proste przechodzące przez dokładnie jeden wierzchołek.

Zadanie 731. $[f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}; f(xyf(x+y)) = f(x) + f(y) \Rightarrow f = ?]$ ($WT=3,13$; $LPR=5$ (7?)). Wychodzi $f(x) = 1/x$. Dobre rozwiązania (jak firmowe):

J. Cisko, M. Małogrosz, J. Olszewski, M. Spychała; zaś z niewielkimi usterkami – **R. Borkowski** (czy f jest „na”?), **J. Węgrecki** (zero pojawia się w przeciwdziedzinie). **Z. Skalik** rozpoznał zadanie jako pochodzące z konkursu Nordic Math. Competition.

Zadanie 735. $[0 < a < 1; \sup\{a^{\text{tg } \alpha} + a^{\text{ctg } \alpha} : \alpha \in (0, \pi/2)\} = ?]$ ($WT=2,82$; $LPR=5$ (6?)). Wszyscy rozpoczynali od pozbycia się zbędnej „trygonometrii”: chodzi o kres górny funkcji $f(x) = a^x + a^{1/x}$ po $x \in (0, \infty)$; równoważnie: po $x \in (0, 1]$ (bowiem $f(x) = f(1/x)$). Dalej – mniej lub bardziej zgrabnie – rachunkiem różniczkowym. Kandydatem na wartość $\sup f$ jest większa z liczb $f(1) = 2a$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Wystarczy wykazać, że $f(x)$ nie przekracza tej wartości, gdy $x \in (0, 1)$. **Janusz Olszewski** – króciutko: jeśli punkt $c \in (0, 1)$ jest taki, że $f'(c) = 0$, wówczas $a^{1/c} = c^2 a^c$; a ponieważ $2^c - c^2 > 1$ (co wynika z wklęsłości funkcji $2^t - t^2$ w $[0, 1]$), zatem

$$f(c) = a^c(1 + c^2) < a^c \cdot 2^c \leq \begin{cases} 1 & \text{gdy } 0 < a < 1/2, \\ 2a & \text{gdy } 1/2 \leq a < 1, \end{cases}$$

i gotowe! Autorzy dobrych rozwiązań: **W. Bednarek, P. Kumor, J. Olszewski** (drugi sposób), **M. Spychała, T. Wietecha** oraz (z małą luką) **J. Cisko**.

Zadanie 737. [Pięciokąt $ABCDE$ wpisany w okrąg; $F = BC \cap AD$, EF styczna do okręgu; druga równoległa styczna przecina EA, EB, EC, ED w punktach $K, L, M, N \Rightarrow |KL| = |MN|]$ ($WT=2,89$; $LPR=6$). Kilka ładnych metod. **Jakub Węgrecki**: wystarczy pokazać, że środkowe (z E) w trójkątach ELM i EKN pokrywają się; a to są symediany w $\triangle ECB$ ($\sim \triangle ELM$) i $\triangle EDA$ ($\sim \triangle EKN$). Jeśli styczne w punktach A, D przecinają się w X , a styczne w punktach B, C przecinają się w Z , wówczas owe symediany to EZ oraz EX ; zaś współliniowość X, E, Z wynika stąd, że punkt F leży na biegunowej AD punktu X oraz na biegunowej BC punktu Z , więc (przez dualność) X i Z leżą na biegunowej punktu F ; a ona przechodzi przez E .

Podobne rozumowanie z użyciem symedian przeprowadził **Janusz Olszewski**, który ponadto przedstawił rozwiązanie firmowe oraz jeszcze trzeci dowód, chyba najcelniej ukazujący istotę zadania: jeśli biegunowa EG punktu F przecina proste KN i AD w punktach S i T , to punkty F, T, A, D tworzą czwórkę harmoniczną – więc punkty F_∞, S, K, N też (F_∞ to „punkt przecięcia” EF i KN , czyli punkt w nieskończoności); a to znaczy, że S jest środkiem KN – oraz, przez analogię, także środkiem LM ; teza.

Rozwiązania zbliżone do firmowego podali także **Marek Spychała** oraz (z pomocą inwersji względem E) **Adam Dzedzej**. Rozwiązania rachunkowe: **Jerzy Cisko** i **Paweł Najman**.

Zadanie 739. $[f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; |f(x) - f(y)| \leq |x - y|; \forall x \in \mathbf{R}: (x, f(x), f(f(x)), \dots)$ ciąg arytmetyczny; $f = ?]$ ($WT=1,55$; $LPR=9$). Odpowiedź: $f(x) = x + \text{const}$. Zadanie nietrudne, sporo dobrych rozwiązań, większość jak firmowe.

Inne rozumowanie przedstawił **Tomasz Wietecha**, uzyskując bardzo znaczne wzmocnienie rezultatu: *Jeśli $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą oraz $\forall x \in \mathbf{R}: (x, f(x), f(f(x)))$ jest trójwyrazowym ciągiem arytmetycznym, to funkcja $g(x) = f(x) - x$ jest stała.*

Dowód: założeniem jest równanie funkcyjne $x + f(f(x)) = 2f(x)$; nietrudno z niego wynika, że f jest bijekcją \mathbf{R} na \mathbf{R} ; równanie przepisuje się jako $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$; zatem f jest rosnąca oraz $f^{-1}(x) = x - g(x)$, co po obłożeniu

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

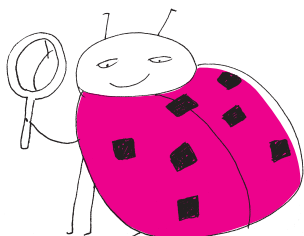
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałęcki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (13), P. Gadziński (7), K. Jedziński, J. Olszewski (18), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (11), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Pecarski, M. Adamaszek, P. Kubit (6), J. Cisło (13), W. Bednarek (7), D. Kurpiel, P. Najman (7), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, A. Dzedziej, J. Fielt, Z. Galias, L. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, M. Małogrosz, J. Małopolski, J. Mikuta, M. Miodek, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, M. Spychała, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Józwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowicz, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikula, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobisz, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zajac, Z. Zaus, K. Zawislowski, P. Żmijewski.

NIE
JEST
ŻŁE



obu stron funkcją f i krótkim przekształceniu daje równanie dla funkcji g :

$$(1) \quad g(x - g(x)) = g(x) \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}.$$

Stąd przez indukcję

$$(2) \quad g(x - ng(x)) = g(x) \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Przypuśćmy, że $g \neq \text{const}$; wówczas (dzięki ciągłości) można znaleźć takie liczby $a, b \in \mathbf{R}$, że wartości $u = g(a)$, $v = g(b)$ są nierówne, niewspółmierne i jednakowego znaku. Przyjmijmy, że $u < v$ (przypadek $u > v$ jest analogiczny); weźmy przedział $(b - a, b - a + v - u)$. Dla pewnych $m, n \in \mathbf{N}$ liczba $nv - mu$ wpada do tego przedziału; to daje nierówność podwójną

$$(3) \quad b - nv < a - mu < b - nv + (v - u).$$

Funkcja $f(x) = x + g(x)$ jest rosnąca, więc z lewej nierówności (3) wynika, że

$$(4) \quad g(b - nv) - g(a - mu) < a - mu - b + nv;$$

teraz związek (2) pokazuje, że lewa strona (4) ma wartość $v - u$; zaś z prawej nierówności (3) widać, że prawa strona (4) na wartość mniejszą. To oczekiwana sprzeczność. Ciekawe równanie funkcyjne, efektowny dowód!

Zadanie 740. [$F(x, y, z) = \frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2}$; $x, y, z > 0$; $x + y + z = 1$; $\inf F = ?$] ($WT=2,72$; $LPR=4$ (5?)). Niewielka liczba przysłanych prac była zaskoczeniem – ta funkcja wygląda tak prosto... no i rzeczywiście, wynik ($\inf F = 4$) można było uzyskać na wiele sposobów. Firmowe rozwiązanie (autor: **Witold Bednarek**) było ładnym zastosowaniem nierówności Jensena – tak nie rozumował jednak nikt. **Janusz Olszewski**, swoim zwyczajem, zaprezentował dwa sposoby: jeden to średnie, geometryczna i harmoniczna, liczba $1, \frac{x}{y^2+z^2}$ (i pozostałych dwóch takich par), skombinowane z nierównością CS (Cauchy–Schwarz); a drugi – to znów CS (jak (5) – niżej) i dokończenie przy użyciu nierówności Schura $\sum x^3 + 3xyz \geq \sum xy(x+y)$ w rozwinięciu $(x+y+z)^3$; ten drugi sposób znalazł również **Mikołaj Pater** (dowodząc oszacowania $F \geq 4$, jednak bez uzasadnienia, że 4 to kres dolny). **Tomasz Wietecha** użył rachunku różniczkowego w \mathbf{R}^3 (minimizacja przy warunku $x + y + z = 1$); zaś **Paweł Kubit** znalazł zadanie w sieci.

Prosta postać funkcji F wręcz zapraszała do uogólnień; najbardziej oczywiste to funkcja symetryczna zmiennych $x_1, \dots, x_n \geq 0$, z których co najmniej dwie są dodatnie. **Piotr Kumor** pokazał, że i wówczas liczba 4 jest kresem dolnym wyrażenia

$$F_n = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{r^2 - x_k^2} \right), \quad \text{gdzie } r^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$$

(dla $n = 3$ to nasze zadanie); a dowód zadziwia prostotą:

$$(5) \quad F_n \geq \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sqrt{r^2 - x_k^2}} \right)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^n \frac{2x_k^2}{r^2} \right)^2 = 4;$$

pierwsza z nierówności (5) to CS dla ciągów $(\sqrt{x_k/(r^2 - x_k^2)})$, $(\sqrt{x_k})$; w drugiej nierówności (5) każdy kolejny składnik sumy w lewym nawiasie jest nie mniejszy niż odpowiedni składnik w prawym nawiasie (co się prosto sprowadza do $x_k^2(2x_k^2 - r^2)^2 \geq 0$); stąd również widać, że (5) staje się równością jedynie, gdy dwie zmienne są dodatnie i równe, a pozostałe są zerami.

Autor tej pracy zasygnalizował także możliwość uogólnienia na sumy cykliczne (n zmiennych), tworzone podobnie jak w problemie Shapiro:

$$X(n) := \inf_{x_1, \dots, x_n > 0} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2} \right).$$

Przyjmując dodatkowo oznaczenia

$$Q(n) := \inf_{x_1, \dots, x_n > 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{x_k^2}{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2}}, \quad S(n) := \inf_{x_1, \dots, x_n > 0} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}},$$

wykazał, że $\sqrt{X(n)} \geq Q(n) \geq S(n)$ – co w połączeniu ze znanymi faktami o ciągu $S(n)$ (<http://mathworld.wolfram.com/ShapirosCyclicSumConstant.html>) daje jakąś informację o ciągu $X(n)$ – oraz postawił hipotezę, że $\sqrt{X(n)} = Q(n) = \lceil n/2 \rceil$ dla wszystkich $n \geq 3$.

Zadanie 742. [$p = 4k + 1$ liczba pierwsza $\Rightarrow \exists s, m \in \mathbf{Z}: 0 < s < p, sp - \lfloor \sqrt{sp} \rfloor^2 = m^2$] (WT=1,55; LPR=9). Rozwiązanie firmowe (w którym Czytelnicy niechybnie dostrzegli literówkę: brak symbolu \lfloor w przedostatnim zdaniu) było oparte na twierdzeniu Fermata (przedstawienie $p = a^2 + b^2$) i pokazywało, że można wręcz uzyskać $m = 1$. **Marcin Kasperski** i **Tomasz Wietecha** zauważyli, że do uzyskania tej tezy wystarczy własność nieco prostsza niż twierdzenie Fermata: -1 jest resztą kwadratową (mod p); piszemy $t^2 + 1 = sp, t \in \{1, \dots, p-1\}$; liczba s (wraz z $m = 1$) spełnia wówczas zadane warunki.

Natomiast używając twierdzenia Fermata ($p = a^2 + b^2$), kilku uczestników znalazło rozwiązanie $s = p - 2a + 1, m = b$; dla takich liczb zachodzi bowiem równość $sp = (p - a)^2 + b^2$, z której łatwo wynikają wymagane własności (oczywiście zamieniając a i b , dostaniemy kolejne rozwiązanie).

Jeden z uczestników postawił pytanie (motywowane próbami numerycznymi), czy nie wystarczy ograniczać poszukiwań do wartości $s \leq 5$. Otóż nie; na przykład dla $p = 1237$ najmniejszy czynnik s , dla którego $sp - \lfloor \sqrt{sp} \rfloor^2$ jest kwadratem, to $s = 10$.

Zadanie 744. [$k \in \mathbf{N}, k > 1; M \subset \mathbf{N}; \forall m, n \in M: mn \leq k^2|m - n| \Rightarrow |M| \leq 2k - 1$; czy $\forall k > 1 \exists M(\text{j.w.}), |M| = 2k - 1$?] (WT=2,74; LPR=5).

M. Miodek, J. Olszewski, M. Spychała, T. Wietecha – bez zastrzeżeń; **J. Cisło**: bezbłędny dowód pierwszej tezy oraz prawidłowa odpowiedź na końcowe pytanie (nie dla wszystkich k istnieje taki M ; kontrprzykład np. dla $k = 9$) – uzasadnienie przez algorytm wrzucania do M kolejnych najmniejszych możliwych liczb, bez wyraźnego uzasadnienia (zresztą nietrudnego), że jeśli ten algorytm wymusza $|M| < 2k - 1$, to każdy inny też. Jeszcze kilka prac z dobrym dowodem w pierwszej części, ale bez poprawnego rozwiązania w drugiej.

Za rok – kolejne omówienie wybranych zadań.

Niebo w lutym

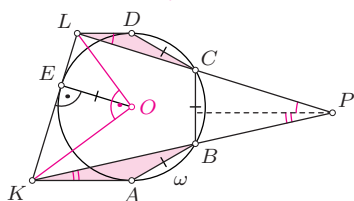


Rozwiązanie zadania M 1556.

Do rozwiązania zadania wystarczy wykazać, że $\sphericalangle KPL = 30^\circ$, gdyż czworokąt $ABCD$ jest połową sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg ω , a zatem krótszy łuk BC stanowi $\frac{1}{6}$ tego okręgu. Równoważnie wystarczy dowieść, że

$$\sphericalangle AKB + \sphericalangle DLC = 30^\circ.$$

Wobec równości $\sphericalangle BAK = \sphericalangle CDL = 150^\circ$ powyższy warunek jest równoważny podobieństwu trójkątów ABK i DCL .



Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na okręgu ω . Ponieważ $\sphericalangle AKO = \sphericalangle EKO$ oraz $\sphericalangle DLO = \sphericalangle ELO$, więc

$$\begin{aligned} \sphericalangle KOL &= 180^\circ - \sphericalangle OKL - \sphericalangle OLK = \\ &= 180^\circ - \frac{\sphericalangle AKL + \sphericalangle DLK}{2} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Skoro E jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego w trójkącie OKL , to $EK \cdot EL = OE^2$. W połączeniu z równościami $EK = AK, EL = DL$ oraz $OE = AB = DC$, uzyskujemy

$$AK \cdot DL = AB \cdot DC, \quad \text{czyli} \quad \frac{AK}{AB} = \frac{DC}{DL}.$$

Tym samym, wobec $\sphericalangle BAK = \sphericalangle CDL$, otrzymujemy podobieństwo trójkątów ABK i DCL , które jest równoznaczne z tezą zadania.

Zima jest właśnie na półmetku i okres roku z najkrótszymi dniami i najdłuższymi nocami już minął. Słońce wędruje szybko na północ, zwiększając swoją wysokość w południe o prawie 10° , stąd w trakcie miesiąca dnia przybywa o prawie dwie godziny. W lutym Słońce przejdzie z gwiazdozbioru Koziorożca do gwiazdozbioru Wodnika, w którym znajduje się planeta Neptun, w związku z czym można ją obserwować tylko na początku miesiąca, lecz obserwacje są trudne, gdyż zanim zrobi się wystarczająco ciemno, planeta zbliży się mocno do linii widnokręgu. Neptun spotka się ze Słońcem 4 marca, a potem przejdzie na niebo poranne. Ale ze względu na małe nachylenie ekliptyki do porannego widnokręgu na przełomie zimy i wiosny planeta pozostanie niewidoczna z dużych północnych szerokości geograficznych do drugiej połowy czerwca. W lutym blask Neptuna wyniesie $+8^m$.

W przeciwieństwie do nieba porannego na niebie wieczornym ekliptyka o tej porze roku jest nachylona pod dużym kątem. Dlatego kreśląca swoją pętlę na niebie nieco ponad 40° na północny wschód od Neptuna planeta Uran jest nadal dobrze widoczna. Uran spotka się ze Słońcem w drugiej połowie kwietnia, a w lutym Słońcu braknie do niego jeszcze około 60° i na początku nocy astronomicznej (ok. 18:30 na początku miesiąca i ok. 19:15 pod jego koniec) planeta zajmie pozycję na wysokości odpowiednio ponad 40 i 20 stopni nad zachodnim widnokręgiem. 20 lutego z Uranem spotka się Księżyc w fazie 22%. W trakcie miesiąca jasność Urana spadnie z $+5,8$ do $+5,9^m$. W lutym planeta utworzy prawie idealny prostokąt z gwiazdami α, μ i ν Psc, przy czym Uran zajmie północno-zachodni róg tej figury. Krótko po koniunkcji ze Słońcem pod koniec kwietnia planeta przejdzie do gwiazdozbioru Barana. Po opozycji, przypadającej w tym roku 24 października, Uran odwiedzi jeszcze gwiazdozbiór Ryb, w którym spędzi koniec tego i początek przyszłego roku, ale już w lutym 2019 r. planeta wejdzie do Barana na dłużej i spędzi tam kolejnych 6 lat.

Z bliżej nas krążących planet Układu Słonecznego tylko planety zewnętrzne są widoczne dość dobrze, wszystkie w drugiej połowie nocy. Najlepsze warunki obserwacyjne są dla Jowisza, będącego 3 miesiące przed opozycją i wschodzącego wciąż grubo po północy, wędrującego przez środek gwiazdozbioru Wagi. Przez cały luty planeta porusza się ruchem prostym, zmieni ten kierunek dopiero na początku marca i do końca miesiąca zwiększy dystans do gwiazdy Zuben Elgenubi do prawie $8''$. W lutym blask Jowisza zwiększy się z -2 do $-2,1^m$, zaś jego tarcza urośnie z 36 do $39''$. Księżyc spotka się z Jowiszem 8 lutego, przy fazie 45%.

Drugi na nieboskłonie pojawia się Mars, wschodzący przed godziną 3. Czerwona Planeta zacznie miesiąc od spotkania ze świecą blaskiem $+2,5^m$ gwiazdą

**Rozwiązanie zadania M 1555.**

Bez straty ogólności przypuśćmy, że każdy z wyjściowych trójkątów ma przeciwprostokątną długości 1 oraz przyprostokątne długości a oraz b . Z podobieństwa trójkątów otrzymywanych podczas wykonywania cięć wynika, że każdy z otrzymywanych w wyniku cięć trójkątów będzie miał przeciwprostokątną długości $a^m b^n$ dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych m, n . Każdemu takiemu trójkątowi przyporządkujemy liczbę 2^{-m-n} .

Zauważmy, że dozwolone cięcie trójkąta o przeciwprostokątnej $a^m b^n$ prowadzi do powstania kawałków o przeciwprostokątnych $a^{m+1} b^n$ oraz $a^m b^{n+1}$. Suma liczb przyporządkowanych tym trójkątom jest równa $2 \cdot 2^{-m-n-1} = 2^{-m-n}$, czyli równa liczbie przyporządkowanej trójkątowi wyjściowemu. To oznacza, że suma liczb przyporządkowanych trójkątom nie ulega zmianie podczas wykonywania cięć.

Początkowo suma liczb przyporządkowanych wszystkim kawałkom papieru jest równa $4 \cdot 2^{-0-0} = 4$. Gdyby w pewnym momencie żadne dwa kawałki nie były przystające, to w szczególności przyporządkowane im pary (m, n) byłyby różne, wobec czego suma wartości liczb przyporządkowanych wszystkim kawałkom byłaby mniejsza (ostro) od

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-m-n} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Uzyskana sprzeczność oznacza, że w każdym momencie pewne dwa trójkąty są przystające.

**Rozwiązanie zadania M 1557.**

Rozważmy macierz $A = [a_{ij}]$ wymiarów $n \times n$, w której $a_{ij} = 1$ jeżeli pole o współrzędnych (i, j) danej tablicy jest wyróżnione oraz $a_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku. Wówczas

$$A^T A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & k & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k \end{bmatrix} = J + (k-1)I,$$

gdzie J oraz I to odpowiednio macierz jedynek oraz macierz identyczności wymiarów $n \times n$. Łatwo sprawdzić, że dla $k \neq 1$ macierz $A^T A$ jest nieosobliwa, skąd wynika, że również macierz A jest nieosobliwa. Wobec tego

$$AA^T = AA^T AA^{-1} = A(J + (k-1)I)A^{-1}.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że $AJ = JA = kJ$, skąd wobec powyższej równości mamy

$$AA^T = JAA^{-1} + (k-1)AIA^{-1} = J + (k-1)I.$$

To oznacza, że każda para różnych wierszy macierzy A ma iloczyn skalarny równy 1, co w myśl definicji macierzy A kończy dowód.

Graffias, czyli najbardziej na północny zachód wysuniętą jasną gwiazdą głównej figury Skorpiona, oznaczanej na mapach nieba grecką literą β . Jest to interesująca gwiazda również z tego powodu, że jest to układ wielokrotny, w którym dwa najjaśniejsze składniki o jasnościach 2,6 oraz 5,1^m dzieli odległość prawie 14". W rzeczywistości jest to układ sześciu gwiazd, złożony z dwóch par po trzy gwiazdy. 1 lutego Mars przejdzie niecałe 22' na południe od tego układu, 8 lutego przejdzie do gwiazdozbioru Wężownika, a dobę później spotka się z nim Księżyc w fazie 35%, mijając go niecałe 4° na północ. 10 lutego Mars przejdzie 5° na północ od Antaresa – najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona, zaś miesiąc skończy dobrze wewnątrz Wężownika, około 18° na zachód od Saturna i jednocześnie trochę ponad 11° na zachód od pary słynnych mgławic Strzelca M8 i M20. W trakcie miesiąca jasność Marsa wyraźnie wzrośnie aż z +1,2 do +0,8^m, choć jego tarcza zwiększy średnicę tylko z 5 do 6". Bliska minimalnej będzie faza marsjańskiej tarczy, wynosząca 89%.

Szósta planeta od Słońca na początku lutego wschodzi około godziny 5, zaś pod jego koniec – prawie 1,5 godziny wcześniej. Saturn następnie 2 lata spędzi w gwiazdozbiorze Strzelca. W tym sezonie obserwacyjnym planeta wykona pętlę w północno-zachodniej części gwiazdozbioru, mniej więcej 3° na północ od świecącej z jasnością +2,8^m gwiazdy Kaus Borealis, nadal wędrując przez najbardziej na południe wysuniętą część swojej orbity. W tym roku Saturn przejdzie przez opozycję pod koniec czerwca, zaś w lutym porusza się będzie ruchem prostym, oddalając się od pary mgławic M8 i M20 na odległość ponad 6°. Przez cały miesiąc blask planety utrzyma się na poziomie +0,5^m, a jej tarcza urośnie do 16". Srebrny Glob z Saturnem spotka się w dniach 10 i 11 lutego. Najpierw około godz. 6 rano Księżyc w fazie 18% dotrze na niecałe 5° do Saturna. Dobę później Księżyc przesunie się kilkanaście stopni na wschód i o tej samej porze, mając tarczę oświetloną w 12%, znajdzie się 8° na wschód od planety. W tym samym momencie Księżyc przejdzie bardzo blisko gwiazdy 3. wielkości $\xi 2$ Sgr. W Łodzi Księżyc minie ją w odległości 1,5 minuty kątowej, natomiast w Suwałkach będą to sekundy kątowe. Krótkie zakrycie da się obserwować m.in. w Sejnach, Puńsku i Wizajnach.

Warunki obserwacyjne dwóch planet wewnętrznych są złe. Merkury 17 lutego przejdzie przez koniunkcję górną ze Słońcem i może byłby widoczny na początku lutego, gdyby nie to, że znajdzie się wtedy z naszej perspektywy pod ekliptyką. Planeta zacznie pojawiać się nisko nad zachodnim widnokregiem dopiero na początku marca, dążąc do maksymalnej elongacji wschodniej w połowie przyszłego miesiąca. Będzie to najlepszy okres widoczności wieczornej Merkurego w tym roku, ale więcej na ten temat napiszę za miesiąc. Druga z planet wewnętrznych, planeta Wenus, oddała się od Słońca po styczniowej koniunkcji, ale ze względu na dużą odległość od Ziemi planeta porusza się bardzo powoli, przez co zacznie być widoczna dopiero pod koniec lutego, bardzo nisko nad zachodnim widnokregiem tuż po zmierzchu. Blask Wenus wyniesie $-3,9^m$, średnica tarczy $-10''$, zaś faza -98% . Na początku marca obie planety utworzą ciasną parę.

Naturalny satelita Ziemi styczeń zakończył pełnią i zaćmieniem, a ponieważ okres synodyczny Księżyca trwa ponad 29 dni, następna pełnia przypadnie dopiero w marcu. Zatem luty będzie miesiącem bez pełni Księżyca, a Srebrny Glob mocno rozświetli nocę na początku i na końcu miesiąca. Okres ciemnych nocy przypada na środek lutego. 1 lutego Księżyc ponownie zakryje Regulusa, lecz tym razem południowa granica zakrycia przetnie południową Szwecję. U nas Srebrny Glob przejdzie kilka minut kątowych na północ od niego. 7 lutego przypada ostatnia kwadra Księżyca, dobę później zakryje on gwiazdę 4. wielkości γ Lib. 15 lutego Srebrny Glob przejdzie przez nów, jednocześnie przesłaniając na chwilę Słońce. Będzie to zaćmienie częściowe, widoczne z Antarktydy oraz Argentyny i Chile. Po nowiu 21 lutego wieczorem Księżyc w fazie 32% zakryje gwiazdę μ Ceti, natomiast 23 lutego, również wieczorem i już w fazie 54% – Aldebarana. Może to być efektowne zakrycie, widoczne gołym okiem.

Ariel MAJCHER

Bestiariusz informatyczny (3)

Po długiej przerwie wracamy z przeglądem informatycznej terminologii. Trzeci odcinek bestiariusza dotyczyć będzie akronimów związanych z formatami danych dla dokumentów i multimedialnych.

Najprostszy rodzaj informacji, które możemy zapisać w pamięci komputera, to po prostu dane numeryczne lub tekstowe. Powstały w latach 60. standard kodowania znaków za pomocą ciągów bitów zwany **ASCII** (*American Standard Code for Information Interchange*) do dziś stanowi podstawę bardziej skomplikowanych kodowań, takich jak **UTF-8** (*Unicode Transformation Format 8-bit*). W pliku tekstowym można przechować też bardziej strukturalne dane, np. tabelę z arkusza kalkulacyjnego możemy zapisać w formacie tekstowym **CSV** (*Comma-Separated Values*), w którym jeden wiersz pliku odpowiada jednemu wierszowi tabeli, a poszczególne komórki oddzielone są przecinkami. Inne popularne formaty tekstowe, które z kolei strukturalizują dane w formie drzewiastej, to **XML** (*Extensible Markup Language*) oraz **JSON** (*JavaScript Object Notation*).

Format tekstowy ma tę zaletę, że jest zwykle prosty i czytelny dla człowieka. Nie nadaje się jednak do przechowywania danych takich, jak zdjęcia czy nagrania dźwiękowe, dla których używamy formatów nietekstowych (binarnych). Obecnie najbardziej rozpowszechnionymi formatami plików graficznych są **JPEG** (*Joint Photographic Experts Group*) dla zdjęć oraz **PNG** (*Portable Network Graphics*) dla pozostałych grafik rastrowych. Aby zmniejszyć rozmiar plików, wykorzystuje się w nich różne algorytmy kompresji, począwszy od prostej techniki skracania długich fragmentów zawierających te same ciągi bitów **RLE** (*Run-Length Encoding*), aż po skomplikowane algorytmy fraktalne. Co ciekawe, format PNG został stworzony, aby zastąpić popularny w Internecie format **GIF** (*Graphics Interchange Format*), który, niestety, obciążony był patentem na wykorzystywanie w nim algorytm kompresji słownikowej **LZW** (*Lempel-Ziv-Welch*).

Przykładami formatów do grafiki wektorowej (w której obraz opisuje się za pomocą krzywych matematycznych, a nie tablicy pikseli) jest tekstowy format **SVG** (*Scalable Vector Graphics*) oraz swego czasu bardzo popularny format internetowych animacji **SWF** (*ShockWave Flash*). Wektorowe dane są również wykorzystywane w plikach z krojami pisma, np. **TTF** (*TrueType Font*). Z kolei w branży wydawniczej **DTP** (*DeskTop Publishing*) standardem dla grafik jest format **TIFF** (*Tagged Image File Format*), natomiast do opisu stron publikacji używa się języka programowania **PS** (*PostScript*) lub powszechnego formatu do wymiany dokumentów **PDF** (*Portable Document Format*).

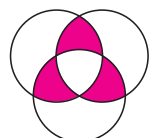
Formaty plików dźwiękowych i filmowych również mają swoje akronimy. Dla dźwięku są to przykładowo **MP3** (*MPEG-1 Audio Layer III*), **AAC** (*Advanced Audio Coding*) i format kompresji bezstratnej **FLAC** (*Free Lossless Audio Codec*). Formaty wideo standaryzowane w ramach grupy **MPEG** (*Moving Picture Experts Group*) mają tak urocze nazwy jak **H.264/AVC** (*Advanced Video Coding*) lub **H.265/HEVC** (*High Efficiency Video Coding*). Z kolei standard do przesyłania danych pomiędzy cyfrowymi instrumentami muzycznymi a komputerem **MIDI** (*Musical Instrument Digital Interface*) dał też nazwę zapomnianym już plikom muzycznym zawierającym jedynie odpowiednik zapisu nutowego.

Duże rozmiary danych multimedialnych spowodowały konieczność wynalezienia dla nich odpowiednio pojemnych nośników. Były to **CD-ROM** (*Compact Disc Read-Only Memory*), a później **DVD** (początkowo *Digital Video Disc*, obecnie *Digital Versatile Disc*),

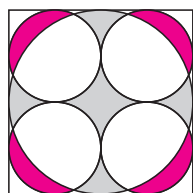
ostatecznie oba zastąpione cyfrową dystrybucją w Internecie. W dobie nieskrępowanej wymiany informacji producenci filmów i gier próbują zabezpieczyć swoje cyfrowe produkty przed kopiowaniem za pomocą różnego rodzaju mechanizmów znanych pod ogólną nazwą **DRM** (*Digital Rights Management*); dla przykładu jedną z metod szyfrowania stosowaną na płytach DVD jest **CSS** (*Content Scramble System*). Z kolei transmisja cyfrowych multimedialnych między urządzeniami korzysta z interfejsu **HDMI** (*High-Definition Multimedia Interface*).

Chęć przesyłania nietekstowych danych pocztą elektroniczną spowodowała konieczność standaryzacji listy formatów danych. Taką rolę spełnił **MIME** (*Multipurpose Internet Mail Extensions*), obecnie wykorzystywany również przez inne protokoły internetowe.

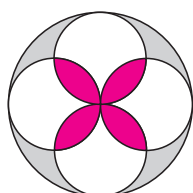
Tomasz IDZIASZEK



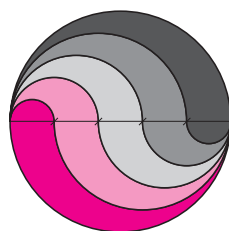
Rys. 1



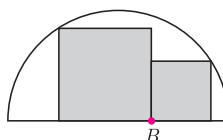
Rys. 2 (a)



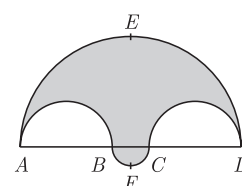
Rys. 2 (b)



Rys. 3



Rys. 4

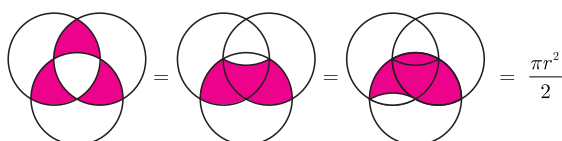


Rys. 5

1. Każdy z okręgów na rysunku 1 ma promień r i przechodzi przez środki obu pozostałych. Wyznacz pole kolorowego obszaru.
2. Dla każdego z rysunków 2 (a) i 2 (b) wykaż, że pole obszaru kolorowego równe jest polu obszaru szarego.
3. Średnicę koła o promieniu $1/2$ podzielono na równe części i narysowano półokręgi jak na rysunku 3. Wykaż, że jednobarwne obszary mają równe pola i obwody.
4. W dane półkole „wpisano” dwa kwadraty jak na rysunku 4. Dla jakiego położenia punktu B suma pól tych kwadratów jest największa?
5. Punkty A, B, C, D leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym $AB = CD$. Narysowano półokręgi jak na rysunku 5, punkty E i F są środkami dwóch z nich. Wykaż, że pole szarego obszaru równe jest polu koła o średnicy EF .

Rozwiązania

R1.



R2. (a) Dodajmy do każdego z obszarów (kolorowego i szarego) białe fragmenty małych kół. Kolorowy obszar uzupełnimy w ten sposób do pełnych czterech małych kół, szary zaś – do pełnego dużego koła. Ale $4\pi r^2 = \pi(2r)^2$, co kończy dowód. \square

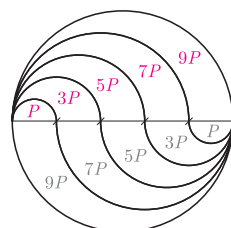
(b) Na mocy powyższej obserwacji, łączne pole czterech małych kół równe jest polu dużego koła. Wobec tego fragmenty dużego koła przykryte przez małe koła dwukrotnie (obszar kolorowy) mają pole równe fragmentom nieprzykrytym wcale (szary obszar). \square

R3. Oznaczmy przez k liczbę części i przez P pole półkoła o średnicy $1/k$. Wówczas pole półkoła o średnicy n -krotnie większej równe jest n^2P . Ponadto różnica pól półkoli o średnicy $(n+1)$ -krotnie większej i n -krotnie większej wynosi $((n+1)^2 - n^2)P = (2n+1)P$.

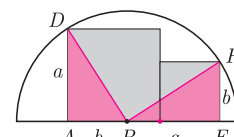
Pola poszczególnych części połowy danego koła są zatem kolejnymi nieparzystymi wielokrotnościami P (rys. 6), a pola jednobarwnych obszarów to kolejno P razy: $1 + (2k-1), 3 + (2k-3), 5 + (2k-5), \dots, (2k-1) + 1$, czyli zawsze $P \cdot 2k$, a więc istotnie wszystkie są równe.

Obwód każdego z obszarów składa się z 3 lub 4 półokręgów o sumie średnic równej $1 + 1 = 2$. Półokrąg o średnicy 2 ma długość π ; półokręgi o średnicach sumujących się do 2 również mają taką łączną długość.

Stąd obwód każdego z rozważanych obszarów równy jest π , czyli obwodowi wyjściowego koła. \square



Rys. 6

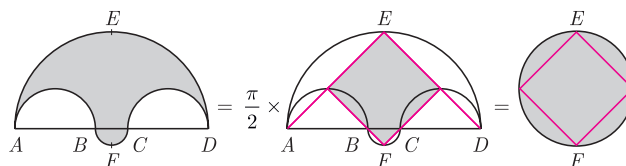


Rys. 7

R4. Oznaczmy wierzchołki oraz długości boków kwadratów jak na rysunku 7 i niech punkt P dzieli odcinek AE tak, że $AP = b, PE = a$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa $PD^2 = a^2 + b^2 = PF^2$, czyli $PD = PF$. Punkt P leży więc nie tylko na średnicy półkoła, ale też na symetralnej jego cięciwy DF , jest więc środkiem półkoła.

Wobec tego suma pól kwadratów $a^2 + b^2$, jak już wiemy równa PD^2 , równa jest kwadratowi promienia półkoła, nie zależy więc od położenia punktu B . \square

R5. Pole koła πr^2 to $\pi/2$ razy pole kwadratu weń wpisanego (równe $2r^2$). Zastąpmy więc każde z półkoli odpowiednią połówką kwadratu (rys. 8). Uzyskujemy w ten sposób kwadrat wpisany w koło o średnicy EF (szczegóły dowodu pozostawiam Czytelnikowi). \square



Rys. 8. Dowód ten pochodzi od R.B. Nelsena, fakt zaś – od Archimedesesa.