

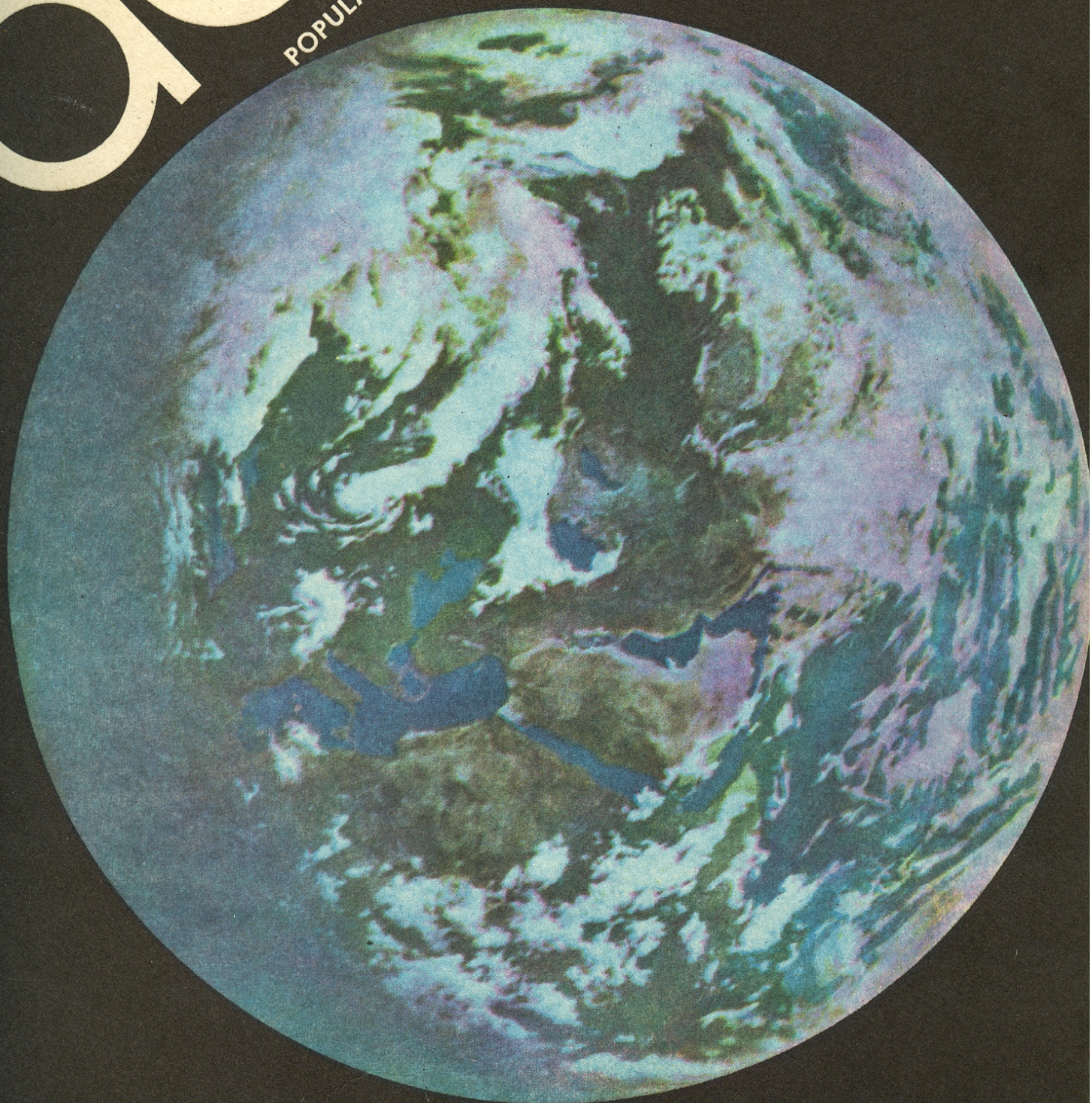
debiut

$h=6.63 \cdot 10^{-34}$
J·s $\pi=3.14$

CENA 5 zł

NR 4 1975

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNY



SPIS TREŚCI

Logika kwantowa <i>Prof. dr Iwo Białynicki</i>	str. 1
»Młody Matematyk« — czasopismo dla młodzieży szkolnej <i>Mgr Władysław Dubiel</i>	str. 2
»Mała Delta«	str. 7
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 10
O wyszukiwaniu informacji <i>Prof. dr Zdzisław Pawlak</i>	str. 12
Co się dzieje, gdy promieniowanie jądrowe przechodzi przez materię? <i>Doc. dr Piotr Decowski</i>	str. 15
Prześwietlanie protonami	str. 16
Leczenie protonami <i>Doc. dr Ewa Skrzypczak</i>	str. 17
Zadania	str. 17

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik
popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego i Polskiego
Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu
Polskiej Akademii Nauk oraz
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
prof. dr G. Białkowski
doc. dr A. Blikle
prof. dr A. Hryniewicz
doc. dr B. Iwaszkiewicz
prof. dr J. Janik
doc. dr J. Jatzak
prof. dr Leon Jeśmanowicz —
przewodniczący
prof. dr Z. Krygowska
prof. dr K. Leibler
mgr W. Łuczniak
mgr A. Mąkowski
prof. dr A. Pełczyński
prof. dr Arkadiusz Piekara —
wiceprzewodniczący
prof. dr J. Rayski
prof. dr A. Schinzel

prof. dr Z. Semadeni
prof. dr M. Subotowicz
dr A. Wakulicz
doc. dr W. Zawadowski

Redaguje Kolegium w składzie:
T. Deskur — red. techn. graf.
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
mgr T. B. Iwiński
dr M. Kordos — red. nac.
dr Z. Płochocki
D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji
ul. Śniadeckich 8,
00-656 Warszawa, PTM

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo.
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl., 80 g, 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej,
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 14/75 B-56

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenie właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówką i wysyłką, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,— nr indeksu 35723/35550

W następnym numerze:
Olimpiada międzynarodowa
Nowe pierwiastki

Nasza okładka:
Ruch powietrza na Kuli Ziemskiej
i w osiedlu mieszkaniowym

Prof. dr Iwo BIAŁYNICKI

W popularnych opracowaniach na temat fizyki kwantowej zwykło się rozpoczynać wywody od opisu zadziwiających doświadczeń, z pomocą których odsłaniają fizycy tajemnice świata atomowego. W opisach tych roi się od potężnych akceleratorów, strumieni niedostrzegalnych cząstek pędzących z prędkością światła, rozbijanych jąder atomowych i innych, trudnych do wyobrażenia zjawisk. Kładąc nacisk na niezwykłość zdarzeń zachodzących w świecie cząstek atomowych, porywamy co prawda wyobraźnię czytelnika, słuchacza czy widza, ale pozostawiamy nieco w cieniu ogrom twórczej myśli ludzkiej tkwiącej we współczesnej fizyce atomowej.

Dziś chciałbym pokazać fizykę atomową przez pryzmat teorii naukowej. Czym jest jednak teoria?

Wybitny fizyk Leopold Infeld dał kiedyś taką odpowiedź na to pytanie: „Teoria naukowa jest próbą, jest usiłowaniem stworzenia obrazu otaczającej nas rzeczywistości. Obejmuje ona węższy lub szerszy zakres faktów i praw doświadczalnych, na który się teoria ta rozciąga, wprowadzając w nie ład i porządek. Nauka nie jest bowiem zbiorowiskiem praw i rupieciarnią faktów. Teoria wiąże je myślą wspólną, stwarza obraz rzeczywistości, z którego fakty owe wynikają na drodze rozumowania logicznego”.

Wybrałem tę wypowiedź, bo jest w niej mowa o logicznym rozumowaniu, a prawa logicznego rozumowania, obowiązujące w świecie atomowym, są równie zadziwiające jak i zjawiska, których dotyczą.

W fizyce klasycznej, przed powstaniem teorii kwantowej, obowiązywały reguły rozumowania logicznego sformułowane po raz pierwszy już przez Arystotelesa. Jednym z fundamentów tej klasycznej logiki jest zasada określona przez Rzymian jako *tertium non datur*, co w swobodnym przekładzie na język polski znaczy: „na dwoje babka wróżyła”. Matematycy nazywali taki system logiczny logiką dwuwartościową. W systemie tym każde zdanie mające sens jest albo prawdziwe, albo fałszywe. Popularny zwrot „wóz albo przewóz” dobitnie obrazuje powszechne stosowanie przez nas wszystkich właśnie tej dwuwartościowej logiki. Hamlet również nie rozważał więcej niż dwóch możliwości, wybierając tylko między „być albo nie być”...

Dwuwartościowa logika powstała w wyniku obserwacji zjawisk dostrzegalnych bezpośrednio zmysłami. Oparte na niej wnioski nigdy nas nie zawodzą w tym właśnie zakresie zjawisk. Przekonanie o powszechnej stosowalności praw tej logiki było tak przemożne, że bez wahania zaczęto ją stosować również w rozumowaniach dotyczących nowo odkrywanych na początku naszego stulecia zjawisk atomowych. Atomy i ich składniki są tak małe, iż nie obserwujemy ich nigdy bezpośrednio i dlatego rozciągnięcie logiki klasycznej na ten nowy zakres zjawisk okazało się ryzykowne.

W latach dwudziestych było już wiadomo, że w świecie atomowym obowiązują inne niż w życiu codziennym prawa rozumowania. Konieczność wprowadzenia innej logiki najdobitniej wynikała z odkrycia w roku tysiąc dziewięćset dwudziestym siódmym, przez Heisenberga, zasady nieoznaczoności. Zasada ta przetłumaczona na język logicznych reguł głosi, że cząstki atomowe „uznają” nie dwie, lecz trzy możliwości. Tą trzecią jest... stan nieokreślony, coś pośredniego między „tak” i „nie”. System logiczny zawierający oprócz prawdy i fałszu także „nieokreśloność” nazywamy logiką trójwartościową. Warto wiedzieć, że na siedem lat przed odkryciem Heisenberga dwaj polscy logicy Łukasiewicz i Tarski wskazywali na możliwość wprowadzenia takiej logiki.

Ze względu na zastosowanie w teorii kwantowej, logikę trójwartościową nazywa się też logiką kwantową, podobnie jak dwuwartościową nazywaliśmy logikę klasyczną. Zilustrujmy różnicę istniejącą między nimi na prostych przykładach. Ziarnko piasku może być w pudełku od zapalek lub może w nim nie być. Elektron natomiast może być w pewnym obszarze przestrzeni, może tam nie być, albo też położenie jego jest nieoznaczone. Ta trzecia możliwość w logice kwantowej, owa nieoznaczoność, jest istotnie różna od prawdy i fałszu. Nie oznacza ona bowiem tylko naszej niewiedzy. Gdy pudełko jest zamknięte, to można się wahać, czy ziarenko piasku jest w środku, czy go tam nie ma, ale wiemy, że tylko jedna z tych dwóch możliwości wchodzi w rachubę. W przypadku elektronu trzecia możliwość jest równie rzeczywista, jak dwie pozostałe.

W żadnej innej — poza teorią kwantową — dziedzinie nauki nie odkryto dotąd załamania klasycznych reguł rozumowania. Teoria kwantowa zajmuje więc



wyjatkową pozycję wśród wszystkich gałęzi nauk przyrodniczych. Można chyba zaryzykować twierdzenie, że jej stworzenie było największą z dotychczas dokonanych rewolucji w nauce, gdyż jej implikacje sięgają najgłębiej, do samych podstaw teorii naukowej, którymi są reguły rozumowania logicznego. Tak mocne podkreślenie odrębności teorii kwantowej może wywołać zrozumiące zdziwienie słuchaczy: Przecież cały otaczający nas świat zbudowany jest z atomów! Jak to jest więc możliwe, że inne prawa są „obowiązujące” dla całości, a inne dla jej części składowych?

Źródłem tej pozornej sprzeczności jest trudna do wyobrażenia mnogość atomów w każdym dostrzegalnym skrawku otaczającej nas substancji. Gdyby np. atomy żelaza składające się na główkę szpilki rozsiać równomiernie po całej Polsce, to na każdy centymetr kwadratowy powierzchni naszego kraju przypadłby tysiąc atomów. Otóż zjawiska bezpośrednio obserwowane powstają przez nałożenie się ogromnej liczby zjawisk elementarnych, wywołanych przez pojedyncze atomy. To, co się dzieje z jednym atomem, nie odgrywa znacznej roli; ważne jest to, co się dzieje z większością atomów w dostrzeganym przez nas świecie; występują nowe prawidłowości. Prawa rządzące takimi zbiorowiskami mają charakter statystyczny, bo wyznaczają tylko najbardziej prawdopodobne zachowanie się obiektów. Pojęcie prawdopodobieństwa jest właśnie kluczem do zrozumienia związku między logiką kwantową i logiką klasyczną.

Logika klasyczna jest przybliżeniem logiki kwantowej, ale wynikające z tego przybliżenia ewentualne odstępstwa, w świecie postrzeganym bezpośrednio zmysłami, są niesłychanie mało prawdopodobne, ledwie możliwe do zauważenia. Posłużymy się znów przykładem ziarenka piasku i pudełka od zapalek. Owa trzecia, kwantowa możliwość, czyli nieoznaczone położenie ziarenka — ani w pudełku, ani poza nim — nie występuje prawie nigdy. Słowo „prawie” oznacza w tym przypadku, że liczba wszystkich ziarenek piasku na Ziemi i czas istnienia cywilizacji na naszej planecie są współmiernie małe, tak że nie istnieje szansa zaobserwowania takiego właśnie, konkretnego odstępstwa od klasycznej logiki. Dlatego w zastosowaniu do wszelkich naszych bezpośrednich obserwacji w zakresie poznanych dotąd zjawisk możemy ją traktować jako przybliżenie idealne. Można snuć jednak fantastyczne przypuszczenia na temat istnienia wspomnianych już odstępstw od logiki klasycznej w dziedzinie zjawisk, które dopiero zaczniemy dokładnie poznawać. Nie mam tu na myśli zjawisk noszących miano „nadprzyrodzonych”. Chodzi mi raczej o takie zjawiska, co do których istnienia nie ma wątpliwości, jak np. życie czy świadomość ludzka. Być może wyjaśnienie tych fascynujących zagadek będzie wymagać równie radykalnych zmian w regułach myślenia, jakich wymagało wyjaśnienie zjawisk atomowych.

«Młody Matematyk» — czasopismo dla młodzieży szkolnej

Mgr Władysław DUBIEL

ROK I MARZEC 1931 NR. 3

MŁODY MATEMATYK

.....
CZASOPISMO DLA MŁODZIEŻY SZKOLNEJ
WYCHODZIŁO POD REDAKCJĄ A. M. RUSIECKIEGO
PRZY WSPÓŁDZIAŁANIU S. STRASZEWICZA.
.....

TRESC: J. Gądoński. Odkrycie Plutona. — A. Tarski. O sposobie
rozważania wielokątów. — Rozwiązania zadań Nr. 40 i 57. —
Zadania Nr. 167 — 181.
.....

W latach 1930–1932 wychodziło w Poznaniu czasopismo matematyczne «Parametr», poświęcone nauczaniu matematyki. W styczniu 1939 r. czasopismo to zostało reaktywowane i wychodziło do wybuchu drugiej wojny światowej.

Było to pierwsze tego typu czasopismo w Polsce. Założycielem i redaktorem był Antoni Marian Rusiecki, zaś współredaktorem Stefan Straszewicz. Ich współpracownikami byli czołowi matematycy i nauczyciele matematyki szkół różnych typów.

W czasopiśmie pojawiały się dość regularnie pewne stałe działy. Jednym z nich był dział dla młodzieży szkolnej. W 1931 r. wzbogacono pismo dodatkiem «Młody Matematyk» o wyraźnie zarysowanej autonomii. «Młody Matematyk» przeznaczony był dla uczniów gimnazjów i zakładów kształcenia nauczycieli. Od stycznia 1931 do grudnia 1932 r. ukazało się 10 zeszytów.

Przegląd zawartości działów dla młodzieży «Parametra» oraz «Młodego Matematyka» wskazuje, że redaktor do współpracy pozyskał niektórych wybitnych matematyków, między innymi Hugona Steinhausa i Alfreda Tarskiego oraz nauczycieli matematyki pracujących w szkołach. Wystarczy wymienić tutaj takie nazwiska, jak Stefan Kulczycki, Władysław Wójtowicz, Adam Zarzecki. Znaczną część artykułów dla młodzieży opracował redaktor A. M. Rusiecki.

Czasopismem «Młody Matematyk» żywo interesowali się uczniowie, o czym świadczy liczba nadesłanych rozwiązań zadań w ramach nieustającego konkursu. «Młody Matematyk» zamieszczał również artykuły, których autorami byli uczniowie. Do takich należą Marek Katz — autor artykułu *O nowym sposobie rozwiązywania równań trzeciego stopnia* («Parametr», nr 4–5) i Bronisław Bajrach — autor opracowania *Tablice do permutacji* («Parametr», nr 8–10). Zarówno w «Parametrze», jak też w «Młodym Matematyku» spotykamy artykuły wykraczające poza czystą



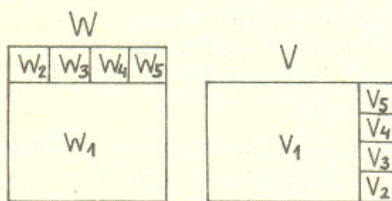
matematykę, opisując małe i wielkie odkrycia, a również drobne fakciki podpatrzone w życiu. Wśród artykułów poświęconych wybranym zagadnieniom z arytmetyki i algebry oraz geometrii warto wymienić A. M. Rusieckiego *Algebraiczna metoda rozwiązywania zagadnień* i *Zagadnienia niedostatecznie sprzeczowane*, Kazimierza Cwojdzńskiego *Kilka słów o ciągach*, Władysława Wójtowicza *Sposoby elementarne wyznaczania maximum funkcji* i *Jak Ceva znajdował twierdzenia geometryczne za pomocą statyki* (Giovanni Ceva — znakomity matematyk włoski, żyjący w latach 1648–1734), Alfreda Tarskiego *O stopniu równoważności wielokątów* i Stefana Kulczyckiego *O najszczelniejszym rozmieszczeniu kul w przestrzeni*. Z zastosowań matematyki na szczególną uwagę zasługuje bardzo interesujący artykuł Hugona Steinhausa *Longimetr*; autor ten w niezwykle ciekawy sposób opisuje i uzasadnia metodę mierzenia długości linii krzywych na przykładzie litery „S”. Godne odnotowania są również: artykuł Petre Sergescu (prof. Uniwersytetu w Cluj — Rumunia) przedstawiający zasadnicze rysy matematyki w starożytności oraz artykuł A. M. Rusieckiego informujący o języku *interlingua*. Jest to międzynarodowy język pomocniczy stworzony przez prof. Giuseppe Peano (matematyk i logik włoski, żyjący w latach 1858–1932). W języku tym podawało czasopismo przy końcu każdego zeszytu swoją zawartość. W «Młodym Matematyku» znajdujemy piękne zadania, są też rozwiązania zadań pochodzące od uczniów — czytelników czasopisma. Artykuły, ciekawostki i „sztuczki matematyczne” podane w „Zapiskach” i w „Kąciku bez tytułu” czyta się z wielką przyjemnością. Zamieszczony poniżej artykuł A. Tarskiego oraz wybrane z różnych działów zadania pochodzą z numeru 3, 1931, «Młodego Matematyka».

O stopniu równoważności wielokątów

Dr Alfred TARSKI (Warszawa)

W artykule tym pragnę omówić pewne pojęcia, należące całkowicie do zakresu geometrii elementarnej, a dotąd niemal wcale nie zbadane.

Jak wiadomo, dwa wielokąty W i V nazywamy równoważnymi, wyrażając to wzorem: $W \sim V$, jeżeli dają się one podzielić na jednakową ilość wielokątów odpowiednio przystających. Ten podział wielokątów równoważnych na części przystające nie jest jednoznaczny: dwa wielokąty równoważne dają się podzielić na części przystające w sposób rozmaity zarówno pod względem liczby, jak i kształtu tych części. Wyjaśnimy to na przykładzie.



Rys. 1

Zarówno rys. 1, jak i rys. 2, wykazują, że kwadrat o boku a oraz prostokąt o bokach $\frac{5}{4}a$ i $\frac{4}{5}a$ są sobie równoważne, ale ich podziały na obu rysunkach są zgoła różne.

W związku z tym spostrzeżeniem nasuwa się w sposób naturalny pytanie: na jaką *najmniejszą* liczbę części odpowiednio przystających można podzielić dwa dane wielokąty równoważne? Zagadnienia tego właśnie typu pragniemy poruszyć w „Parametrze”.

W tym celu przyjmijmy następującą definicję:

Stopniem równoważności dwóch wielokątów równoważnych W i V nazywamy *najmniejszą* liczbę naturalną n , czyniącą zadość warunkowi: każdy z wielokątów W i V daje się podzielić na n wielokątów w ten sposób, że wielokąty, otrzymane z podziału W odpowiednio przystają do wielokątów, otrzymanych z podziału V .¹⁾ — Stopień równoważności wielokątów W i V będziemy oznaczali symbolem: $\delta(W, V)$.

Należy to uczynić pewną uwagę. Wyrazowi „wielokąt” dogodnie jest nadać w niniejszych rozważaniach znaczenie szersze niż to, które jest stosowane w początkach nauczania geometrii elementarnej. Mianowicie, *wielokątem w znaczeniu szerszym* nazywamy tu figurę płaską, która jest *zestawieniem* skończonej liczby wielokątów w pospolitem znaczeniu tego wyrazu. Tak np. wielokątem w znaczeniu szerszym jest figura, złożona z prostokątów 2 i 4 na rys. 1, lub też figura, złożona z obu tych prostokątów i ponadto czworokąta 3 na rys. 2. Zaznaczamy mimochodem, że rozszerzenie pojęcia wielokąta jest niezmiernie użyteczne w całej teorii równoważności wielokątów: bez tego rozszerzenia wiele rozumowań z tej teorii, spotykanych w podręcznikach elementarnych, grzeszy brakiem ścisłości.

W zastosowaniu do wielokątów w znaczeniu szerszym następcą pewną trudność poprawne zdefiniowanie pojęcia przystawania. Ograniczymy się tu do następującego wyjaśnienia poglądowego: dwa wielokąty w znaczeniu szerszym — podobnie jak i wszelkie figury geometryczne — przystają, jeżeli jeden z nich można „nałożyć” na drugi (nie zmieniając wzajemnego położenia składowych części żadnego z nich) w ten sposób, aby się „pokryły”. Tak np. wielokąt, przedstawiony na rys. 3, nie przystaje do wielokąta, przedstawionego na rys. 4, ale jest z nim równoważny.

O stopniu równoważności wielokątów wiemy dotychczas bardzo mało. Podamy tu przykładowo kilka elementarnych własności tego pojęcia.

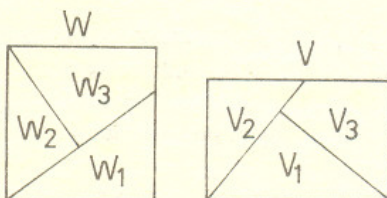
1. Dla dowolnych wielokątów równoważnych W i V jest

$$\delta(W, V) = \delta(V, W).$$

2. Na to, by $\delta(W, V) = 1$, potrzeba i wystarcza, by wielokąty W i V przystawały; w szczególności, dla dowolnego wielokąta W mamy $\delta(W, W) = 1$.

3. Jeżeli wielokąt W możemy podzielić na wielokąty W_1 i W_2 , a wielokąt V — na wielokąty V_1 i V_2 w ten sposób, iż $W_1 \sim V_1$ i $W_2 \sim V_2$, to $\delta(W, V) \leq \delta(W_1, V_1) + \delta(W_2, V_2)$.

4. Jeżeli $W \sim U$ i $V \sim U$, to $\delta(W, V) \leq \delta(W, U) \cdot \delta(V, U)$.



Rys. 2

¹⁾ O ile nam wiadomo, pojęcie to wprowadził Dr. Adolf Lindenbaum (Warszawa), który wraz z autorem artykułu ustalił pewne własności tego pojęcia.



Rys. 3



Rys. 4



Własności 1–3 są oczywiste. Uzasadnienie własności 4 również nie nastęrczy trudności tym z pośród Czytelników, którzy uprzytomnią sobie zastosowanie metody t.zn. *podwójnej sieci podziału* do dowodu twierdzenia, w myśl którego dwa wielokąty, równoważne trzeciemu, są sobie równoważne.

Dla sformułowania następnej własności potrzebne jest pojęcie średnicy wielokąta.

Średnicą wielokąta W , symbolicznie: $\sigma(W)$, nazywamy najdłuższy z pośród odcinków, łączących dwa punkty wielokąta W . Łatwo okazać, że każdy wielokąt posiada średnicę (może być wiele średnic przystających).

5. Jeżeli W i V są to wielokąty równoważne, przyczem W jest wielokątem wypukłym, to

$$\delta(W, V) \geq \frac{\sigma(W)}{\sigma(V)}$$

Dowód. Zastosujmy rozumowanie apagogiczne. Przypuśćmy mianowicie, że wbrew tezie twierdzenia 5

$$(1) \quad \delta(W, V) = n < \frac{\sigma(W)}{\sigma(V)}.$$

Wynika stąd natychmiast, że

$$(2) \quad \sigma(V) < \frac{\sigma(W)}{n}.$$

Zgodnie z określeniem średnicy, w wielokącie W znaleźć można dwa takie punkty A_0 i A_n , które są końcami średnicy $\sigma(W)$. Podzielimy A_0A_n na n przystających części, i niech A_1, A_2, \dots, A_{n-1} będą to punkty podziału. Każdy z odcinków A_kA_{k+1} (gdzie $0 \leq k < n$) przystaje do n -ej części średnicy $\sigma(W)$, a zatem wobec (2) mamy: $A_kA_{k+1} > \sigma(V)$; wnosimy stąd, że tem bardziej (3) $A_kA_l > \sigma(V)$ dla dowolnych różnych liczb naturalnych k i l , zawartych między 0 i n .

W myśl definicji stopnia równoważności, z (1) wynika, że wielokąty W i V dają się podzielić na n części odpowiednio przystających; niech W_1, W_2, \dots, W_n będą to wielokąty, otrzymane z podziału W , a V_1, V_2, \dots, V_n — odpowiednio przystające do nich wielokąty, otrzymane z podziału V .

Jak wiemy, punkty A_0 i A_n należą do wielokąta W ; ponieważ W jest na mocy założenia wielokątem wypukłym, więc wszystkie punkty odcinka A_0A_n w szczególności zaś A_1, A_2, \dots, A_{n-1} należą do W . W ten sposób w wielokącie W wyróżniamy $n+1$ punktów A_0, A_1, \dots, A_n , a równocześnie podzieliłiśmy ten wielokąt na n części W_1, W_2, \dots, W_n . Wnosimy stąd, że choć dwa ze wskazanych punktów należą do tej samej części, np. punkty A_k i A_l ($k \neq l$) należą do części W_m .

Ponieważ wielokąty W_m i V_m przystają, przeto w wielokącie V_m możemy oczywiście znaleźć takie dwa punkty B_k i B_l , że odcinek B_kB_l przystaje do odcinka A_kA_l . Punkty B_k i B_l , należąc do V_m , należą tem samym do V , wobec czego odcinek B_kB_l nie może przekraczać średnicy wielokąta V . Zastępując B_kB_l odcinkiem przystającym A_kA_l , otrzymujemy wzór

(4) $A_kA_l \leq \sigma(V)$, gdzie k i l są to dwie różne liczby naturalne, zawarte między 0 i n .

Wobec jawnej sprzeczności między (3) i (4) musimy odrzucić przypuszczenie (1) i uznać twierdzenie za udowodnione.

Twierdzenie 5 można uogólnić, zastępując warunek: „ W jest wielokątem wypukłym” warunkiem: „ W jest wielokątem spójnym” (t.zn. wielokątem takim, że dwa dowolne jego punkty dają się połączyć łamaną, której wszystkie punkty należą do tego wielokąta). Dowód uogólnionego twierdzenia, wymagający nieznacznej modyfikacji w dowodzie pierwotnym, pozostawiamy Czytelnikowi.

Operując definicją stopnia równoważności oraz powyżej podanymi własnościami tego pojęcia, można przystąpić do badania stopnia równoważności w odniesieniu do różnych konkretnych par wielokątów równoważnych. Naogół potrafimy dla stopnia równoważności każdej poszczególnej pary wielokątów podać jedynie pewne ograniczenia z góry i z dołu.

Ograniczenia z góry uzyskujemy natychmiast w tych przypadkach, gdy mamy rysunek, ustalający równoważność wielokątów W i V przez rozkład na części odpowiednio przystające: jeżeli w każdym z nich liczba części jest n , to na mocy definicji stopnia równoważności będziemy mieli

$$\delta(W, V) \leq n.$$

Ponadto przy ustalaniu ograniczenia z góry możemy niekiedy posłużyć się własnościami 3 i 4.

Jeśli chodzi o ograniczenia z dołu, mamy tu przedewszystkiem trywjalne ograniczenie:

$$\delta(W, V) \geq 2,$$

które na mocy własności 2 zachodzi dla dowolnej pary wielokątów W i V równoważnych, ale nie przystających. Znacznie trudniej jest uzyskać mocniejsze ograniczenia z dołu; mamy tu narazie do dyspozycji tylko własność 5.

W niektórych tylko przypadkach udało się uzyskać ograniczenie z dołu, pokrywające się z ograniczeniem z góry, przez to samo — wyznaczyć dokładnie stopień równoważności wielokątów.

Podamy tu kilka przykładów.

A. Niech W i V będą to odpowiednio kwadrat i prostokąt z rys. 1 lub 2. Rys. 1 daje:

$$\delta(W, V) \leq 5,$$

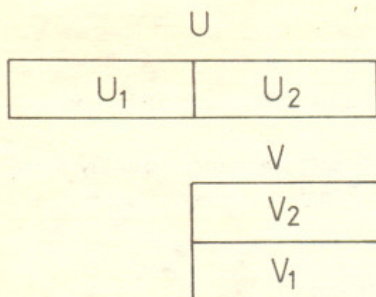
natomiast z rys. 2 otrzymujemy mocniejsze ograniczenie: $(W, V) \leq 3$. Na mocy

własności 2 mamy: $\delta(W, V) \geq 2$; własność 5 w tym przypadku lepszego ograniczenia nie daje.

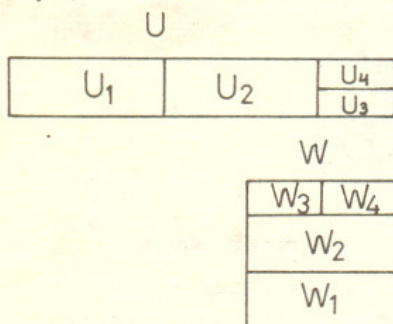
Ostatecznie więc $2 \leq \delta(W, V) \leq 3$. Kwestia, która z liczb 2 i 3 jest wartością $\delta(W, V)$, pozostaje

otwarta.

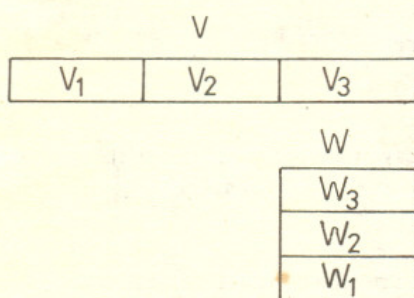




Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

B. Niech V będzie prostokątem o bokach $\frac{5}{4}a$ i $\frac{1}{5}a$ (jak w poprzednim przykładzie), a U —

prostokątem o bokach $\frac{5}{2}a$ i $\frac{2}{5}a$. Rys. 5 daje: $\delta(U, V) \leq 2$. Ponieważ z drugiej strony na mocy

własności 2 (lub 5) mamy: $\delta(U, V) \geq 2$, więc ostatecznie otrzymujemy: $\delta(U, V) = 2$.

C. Niech W, V, U będą to figury, opisane w przykładach A i B. Na mocy własności 4 mamy:

$$\delta(W, U) \leq \delta(W, V) \cdot \delta(U, V);$$

jak okazaliśmy w A i B, $\delta(W, V) \leq 3$, a $\delta(U, V) = 2$; zatem $\delta(W, U) \leq 6$. W tym jednak przypadku zamiast stosowania własności 4 lepiej jest oprzeć się bezpośrednio na rys. 6, który daje: $\delta(W, U) \leq 4$.

Z uwagi na własność 2 mamy ostatecznie: $2 \leq \delta(W, U) \leq 4$. Kwestia wyznaczenia dokładnej wartości $\delta(W, U)$ znowu zostaje otwarta.

D. Niech W będzie kwadratem o boku a , V — prostokątem o bokach $3a$ i $\frac{1}{3}a$.

Z rys. 7 widać, że $\delta(W, V) \leq 3$. Z drugiej strony, stosując własność 5, otrzymujemy:

$$\delta(W, V) \geq \frac{\sigma(V)}{\sigma(W)}$$

Jak łatwo widzieć, średnicami prostokątów są ich przekątne; wobec tego: $\sigma(V) = \sqrt{\frac{82}{9}} \cdot a$,

$$\sigma(W) = \sqrt{2} \cdot a, \text{ a zatem } \delta(W, V) \geq \sqrt{\frac{41}{9}} > 2.$$

Ponieważ $\delta(W, V)$ jest liczbą naturalną, więc nierówność: $\delta(W, V) > 2$ zastąpić można nierównością: $\delta(W, V) \geq 3$. Ograniczenia zgóry i zdołu pokrywają się, wobec czego mamy: $\delta(W, V) = 3$.

Na tych przykładach poprzestajemy.

Nawiązując do pierwszego zdania w niniejszym artykule, powtarzamy raz jeszcze, że w tym dziale geometrii elementarnej niemal wszystko pozostaje jeszcze do zrobienia. Nasuwa się tu cały szereg wdzięcznych tematów do opracowania, z pośród których wysuniemy następujący.

Niech Q będzie kwadratem o boku a , P zaś — prostokątem o bokach $x \cdot a$ i $\frac{1}{x} \cdot a$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Wielokąty Q i P są oczywiście równoważne. Jak łatwo się zorientować, stopień ich równoważności jest funkcją x ; będziemy go oznaczali symbolem „ $\tau(x)$ ”, kładziemy zatem:

$$\delta(Q, P) = \tau(x).$$

Tematem, którego opracowanie gorąco polecalibyśmy, byłoby dokładne zbadanie funkcji $\tau(x)$. Niektóre ze znanych nam własności podamy w następujących twierdzeniach.

I. Funkcja $\tau(x)$ jest określona dla wszelkich liczb dodatnich i jako wartości przybiera wyłącznie liczby całkowite dodatnie.

II. $\tau(x) = \tau\left(\frac{1}{x}\right)$ dla dowolnego $x > 0$.

Są to bezpośrednie konsekwencje definicji funkcji $\tau(x)$ oraz definicji stopnia równoważności. Oznaczając symbolem „ $E(x)$ ” najmniejszą liczbę całkowitą n niemniejszą od danej liczby rzeczywistej x (a zatem sprawdzając wzór: $n-1 < x \leq n$), mamy dalej:

III. $\tau(x) \leq E(\sqrt{x^2-1}) + 2$ dla dowolnego $x \geq 1$.

Dowodu powyższego twierdzenia nie będziemy przytaczali; zaznaczmy jedynie, że dowód ten można uzyskać, analizując dowody dwóch znanych twierdzeń z teorii równoważności wielokątów, a mianowicie 1) twierdzenie o równoważności dwóch równoległoboków, których podstawy i wysokości odpowiednio przystają. 2) twierdzenia, w myśl którego kwadrat, zbudowany na przyprostokątnej dowolnego trójkąta prostokątnego jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z przeciwprostokątnej oraz z rzutu rozważanej przyprostokątnej na przeciwprostokątną²⁾. Proponujemy Czytelnikowi podanie dokładnego dowodu omawianego twierdzenia lub przynajmniej kilku jego szczególnych przypadków, jak

$$\tau\left(1\frac{1}{3}\right) \leq 3, \quad \tau\left(2\frac{1}{4}\right) \leq 4, \quad \tau(\sqrt{10}) \leq 5.$$

Twierdzenie III ustala pewne ograniczenie górne dla funkcji $\tau(x)$. W tych przypadkach, gdy x jest liczbą wymierną, dają się uzyskać inne, częstokroć mocniejsze ograniczenia dla rozważanej funkcji, przyczem — w przeciwstawieniu do twierdzenia III — przy ustalaniu tych ograniczeń nie trzeba się uciekać do podziału prostokątów na figury, nie będące prostokątami. Pomijając tu przypadek ogólny, podamy następujące łatwe twierdzenie:

IV. $\tau(n) \leq n$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n .

Wynika to z następującej uwagi: kwadrat o boku a można podzielić na n przystających prostokątów o bokach a i $\frac{1}{n} \cdot a$, z których następnie daje się ułożyć prostokąt o bokach $n \cdot a$ i $\frac{1}{n} \cdot a$ (por. rys. 7 dla $n = 3$).

²⁾ Por. dowody obu tych twierdzeń w podręczniku Wł. Wojtowicza. Zarys geometrii elementarnej, wyd. VI, § 177 oraz §§ 191 i 192 (przez analizę dowodu drugiego z tych twierdzeń uzyskaliśmy podany powyżej rys. 2).

$$V. \tau(x) \geq \sqrt{\frac{x^4+1}{2x^2}} \text{ dla dowolnego } x > 0.$$

Łatwy dowód tego twierdzenia opiera się na własności 5 stopnia równoważności (por. podany powyżej przykład D).

Ograniczenia dolnego dla funkcji $\tau(x)$, ustalonego w ostatnim twierdzeniu, nie potrafimy dotąd w istotnej mierze wzmocnić. Pewne wzmocnienie, pozbawione jednak większego znaczenia przedstawia następujący wzór, który podamy tu bez dowodu

$$\tau(x) \geq \sqrt{\frac{x^4}{2x^2-1}} \text{ dla } x \geq 1.$$

Jako bezpośredni wniosek z twierdzenia V zanotujemy wreszcie:

$$VI. \tau(x) \rightarrow +\infty \text{ gdy } x \rightarrow +\infty.$$

Przy pomocy powyższych twierdzeń możemy obliczyć wartości funkcji $\tau(x)$ dla pewnych,

nielicznych zresztą wartości argumentu. Tak więc mamy: $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = \tau\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

i $\tau(3) = \tau\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ (jeśli chodzi o ten ostatni wzór, por. przykład D). Nieco inną metodą można

wykazać, że $\tau(4) = \tau\left(\frac{1}{4}\right) = 4$; uzasadnienie tego wzoru pozostawiamy Czytelnikom.

Natomiast ustalenie wartości funkcji $\tau(x)$ dla innych wartości x , i to nawet dla wartości całkowitych ($x \geq 5$), wciąż jeszcze nastęrcza trudności. W szczególności nie potrafimy dotąd udowodnić następującego twierdzenia, które wydaje się nader prawdopodobne:

$$\tau(n) = n \text{ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej } n.$$

Jako inny przykład nieudowodnionego dotąd a prawdopodobnego twierdzenia przytoczymy następujące zdanie:

$$\tau(x) \geq 3 \text{ dla dowolnego } x \text{ dodatniego, różnego od } \frac{1}{2}, 1 \text{ i } 2.$$

Zdanie to w zestawieniu z twierdzeniem III pozwoliłoby obliczyć wartości funkcji $\tau(x)$ dla nieskończenie wielu wartości argumentu, mielibyśmy bowiem: $\tau(x) = 3$ dla każdego x ,

sprawdzającego nierówności: $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{2}$ i $x \neq 1$.

Z uwag powyższych wynika jasno, że od dokładnej znajomości przebiegu funkcji $\tau(x)$ jesteśmy w chwili obecnej bardzo jeszcze dalecy.

Redakcja zachęca Czytelników do nadsyłania wyników dalszych rozważań na tematy, poruszone w powyższym artykule.

Wybrane zadania

Zadania związane z artykułem w tekście

(Nr 169). [...] Udowodnić następujące twierdzenie: Na to, by z kwadratu o boku a można było wyciąć prostokąt o bokach b i d , potrzeba i wystarcza, by było bądź $b \leq a$ i $c \leq a$, bądź też $b+c \leq \sqrt{2}a$. (A. Tarski, Warszawa).

(Nr 170). [...] Zastosować poprzednie twierdzenie do dowodu wzoru

$$\tau(4) = 4.$$

(A. Tarski, Warszawa).

Zadanie maturalne (Województwo Śląskie, gimn. mat. 1928):

Na bilardzie prostokątnym $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$) leżą dwie kule: jedna w środku bilardu, druga w odległości p od brzegu AB i w odległości q od brzegu BC . Druga kula zostaje uderzona tak, że odbiwszy się pod kątem α od brzegu AB , a następnie odbiwszy się kolejno od brzegów AD , DC , CB trafia wreszcie w pierwszą kulę. Dowieść, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5a-2q}{3b+2p}.$$

Obliczyć pole, jakie wycina elipsa $16x^2 + 25y^2 = 1600$ z paraboli $y^2 = 24x$.

Zadania rozrywkowe

(Nr 66). Cyfry maskowane. Mamy oryginalne dzielenie: TRZYZERO:ZERO = ZERO

Każda litera oznacza jakąś cyfrę, przyczem różne litery oznaczają różne cyfry. Prosimy odcyfrować podany zapis, to znaczy wykryć, jakie cyfry są oznaczone poszczególnymi literami.

(A. M. Rusiecki).

(Nr 178). Jak ojciec obdarował dzieci? Ojciec rozdał synom 12 obsadek i 18 ołówków, a córkom rozdał 30 obsadek i 20 ołówków; potem jeszcze rozdał wszystkim swym dzieciom 144 stałówki i 120 zeszytów, ale okazało się, że dla jednego z synów nie wystarczyło zeszytu, więc zamiast zeszytu otrzymał zbywającą stałówkę. Ilu było synów i ile córek? (S. Banach, W. Sierpiński, W. Stożek).

Zadanie fizyczne

(Nr 15). Ołowiana kula spadła na ziemię z wysokości 100 m. Obliczyć, jaki % nabytej energii kinetycznej został w ołowiu, jeśli wiadomo, że temperatura jego podniosła się o 5°.



Rozwiązanie zadania F 16'

W zadaniu rozważamy reakcję: $\pi + p \rightarrow N + k \cdot \pi$ gdzie π , p , N są symbolami pionu, protonu i nukleonu, natomiast k oznacza maksymalną liczbę pionów, jaką można wytworzyć przy ustalonej energii nadlatującego pionu.

W zderzeniach cząstek elementarnych obowiązują pewne zasady zachowania. Zasada zachowania energii i pędu jest Wam doskonale znana. Innymi wielkościami ściśle

zachowywanymi w zderzeniach są między innymi liczba barionowa B oraz ładunek elektryczny. Barionami ($B = 1$) są na przykład proton i neutron, natomiast dla pionów liczba barionowa równa się zero.

W rozważanej reakcji liczba barionowa jest zachowana, bowiem równa się 1 przed i po reakcji. Również zasada zachowania ładunku nie narzuca żadnych ograniczeń przy rozwiązywaniu postawionego problemu, ponieważ piony występują w trzech stanach ładunkowych (+, 0, -). Ograniczenia liczby produkowanych cząstek wynikają więc jedynie z zasad zachowania energii i pędu.

Oczywiście obie te zasady muszą być spełnione jednocześnie.

Przebieg reakcji możemy analizować w różnych układach odniesienia. Najbardziej naturalnym jest dla nas układ bezpośrednio związany z nami, obserwatorami, czyli tzw. układ laboratorium.

Jednakże postawiony problem bynajmniej nie rozwiązuje się najprościej w takim układzie odniesienia. Mianowicie nie można całej energii cząstek przed reakcją zamienić tylko w masy spoczynkowe produkowanych cząstek. Nadlatujący pion posiada pewien pęd i taki sam wypadkowy pęd muszą posiadać cząstki po reakcji. Ale jak rozłożyć ten pęd pomiędzy tyle cząstek wtórnych (16 lub więcej), aby jak najmniej energii początkowej zamieniło się w energię kinetyczną powstałych cząstek, a jak najwięcej w ich masy spoczynkowe?

A może łatwiej rozwiązać zagadnienie posługując się innym układem odniesienia? Zastanówcie się. Rozwiązanie zadania kontynuujemy na str. 14

mała delta

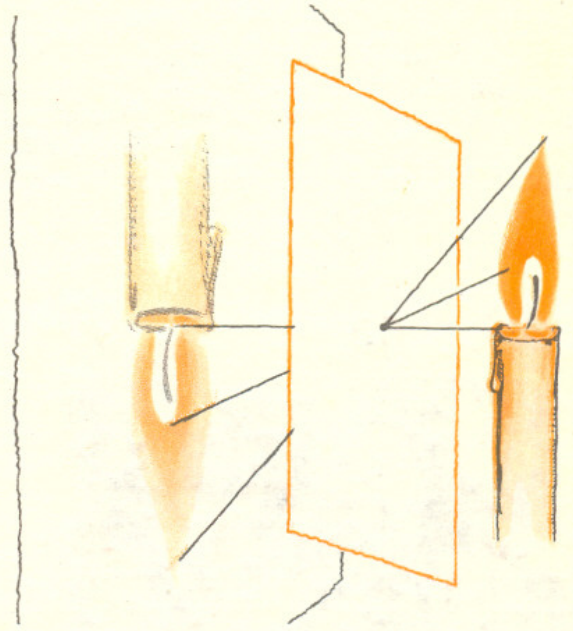


Tajemnicza dziurka od klucza

Kiedy Zbyszek miał siedem lat, pojechał po raz pierwszy na kolonie. Mieszkał tam wraz z innymi chłopcami, w dużej sali, do której przylegała mała komórka bez okien. Pewnego razu, bawiąc się w chowanego, ukrył się Zbyszek w komórce. Było tam oczywiście ciemno, jedyne światło dochodziło z sali przez dziurkę od klucza. Nagle Zbyszek zauważył na ścianie, naprzeciwko drzwi, jasną plamkę wielkości kartki pocztowej. Mógł w niej wyróżnić dwa poruszające się krążki. Tak go to zafrapowało, że zapomniał o zabawie. Wrócił do sali i opowiedział o tym kolegom. Razem próbowali odgadnąć, co to było. W końcu Zbyszek domyślił się, że to były głowy kolegów, którzy siedzieli w oknie. Żeby się o tym przekonać, kazał im machać rękami. Zobaczył wtedy podobne ruchy w plamie na ścianie, ale... odwrócone. Wyglądało to tak, jakby chłopcy machali rękami stojąc do góry nogami! Zbyszek był wtedy za mały, żeby to zrozumieć. Wytłumaczył to sobie dopiero parę lat później.

Radzę wam zrobić doświadczenie, które trochę przypomina to, co zaobserwował Zbyszek. Potrzebna jest tylko kartka papieru i świeca. W kartce, po środku, zróbcie szpilką mały otworek. Zapaloną świecę zbliżcie do ściany. Co widać na ścianie, gdy kartkę z otworkiem wstawi się między ścianę i świecę? Widać płomień świecy, a właściwie nie prawdziwy płomień, lecz jego obraz. Jest on odwrócony, jego czubek jest w dole. W dodatku, kiedy dmuchamy w prawdziwy płomień, jego obraz wychyla się w naszą stronę, jakby chciał nas oparzyć. Dlaczego tak jest?

Przyjrzyjcie się rysunkowi. Wiadomo, że aby na ścianie powstał obraz jakiegoś punktu, musi od tego punktu dotrzeć do ściany promień światła. Promienie świetlne dochodzące do ściany od poszczególnych punktów płomienia krzyżują się w otworze. Dlatego obraz czubka płomienia wypada poniżej obrazu dolnej jego części.



Tym z was, którzy lubią trochę poeksperymentować, proponuję zabawę w malarza portretów. Niepotrzebny jest do tego talent plastyczny, przyda się natomiast spora puszka (może być po „Ince”) lub pudełko odpowiedniej wielkości, pergamin i gruby koc. W denku puszki należy zrobić mały otworek. Wieczko zdejmujemy i w tym miejscu przymocowujemy kawałek pergaminu. Z tak przygotowanym przyrządem do portretowania wchodzimy pod koc, wystawiając tylko ściankę z otworkiem. Na zewnątrz, w niewielkiej odległości, siada osoba portretowana, silnie oświetlając swoją twarz trzymaną w ręce lampą. Na pergaminie powinien powstać obraz osoby portretowanej, zmniejszony i odwrócony. Wystarczy go odrysować i portret gotowy!



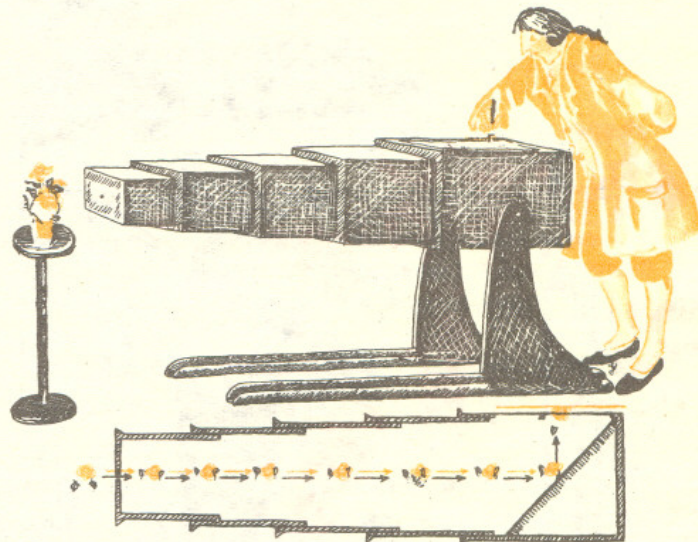
Przyrząd, który opisaliśmy nosi nazwę ciemni optycznej (po łacinie *camera obscura*). Stosował go i w roku 1519 opisał jego działanie wielki artysta i wynalazca włoski, Leonardo da Vinci. Później ciemnię optyczną stosowali i inni malarze, między innymi Canaletto, kiedy malował widoki osiemnastowiecznej Warszawy. Ciemnia optyczna jest podstawową częścią każdego aparatu fotograficznego.

Zagadka dla krótkowidzów

Mogę zdjąć okulary (−6 dioptrii) i przeczytać nagłówek w gazecie z odległości dwóch metrów patrząc przez małą szparkę między palcami ręki przyłożonej do oka. Dlaczego?



Zamiast pergaminu można umieścić błonę fotograficzną, zmieniając tym samym przyrząd do portretowania w aparat fotograficzny. Taki aparat świetnie nadaje się do zrobienia na przykład zdjęcia rodzinnego, chociaż wymaga to sporo hartu ducha zarówno ze strony fotografa, jak i osób fotografowanych. Należy wybrać piękny, słoneczny dzień, ustawić członków rodziny przodem do słońca i poczekać nieruchomo parę minut. Następnie w ciemnym pokoju wyjmujemy błonę, wywołujemy ją i... patrzymy, czy coś wyszło. Powodzenia!



Sposób na niesforne ułamki

— Z tymi uławkami to zupełnie nic nie wiadomo —

narzekał po lekcji matematyki Janek. — Na przykład $\frac{56}{84}$.

Wygląda nieładnie, w liczniku i w mianowniku straszą takie duże liczby, ale jak się dobrze przyjrzeć i poskracać: przez 2, jeszcze raz przez 2, przez 7..., robi się z niego

całkiem miły ułamek, zwyczajnie $\frac{2}{3}$. Ułamek z małymi liczbami w liczniku i w mianowniku bardzo łatwo

„rozdmuchać”. Na przykład $\frac{7}{8}$ można rozszerzyć do $\frac{119}{136}$

mnożąc licznik i mianownik przez 17. Ale bądź taki mądry i skróć olbrzyma, żeby się zrobił przyjemny i zgrabny. Skąd mam w edzieć, że trzeba licznik i mianownik podzielić przez 17? O, mam tutaj taki

okropny ułamek $\frac{1073}{1517}$. Od godziny próbuję go skrócić i wciąż nie wiem, czy się da, czy nie.

— A ja mam sposób na twoje ułamki — pocieszał Janka Andrzej. — Zabierzemy się do nich zupełnie inaczej, nie będziemy na oślep szukali, przez co można by skrócić.

Zastanów się na przykład, czy można skrócić ułamek $\frac{311}{312}$?

— Chyba nie... Tak mi się wydaje, że nie.

— A dlaczego tak ci się wydaje?

— No, bo między licznikiem i mianownikiem jest bardzo mała różnica, tylko 1 — niepewnie powiedział Janek.

— Bardzo słusznie. Zwróciłeś uwagę na ważny fakt: jeżeli jakieś dwie liczby dzielą się przez wspólny dzielnik D , to ich różnica też musi się dzielić przez D . Widać to dobrze na osi liczbowej.

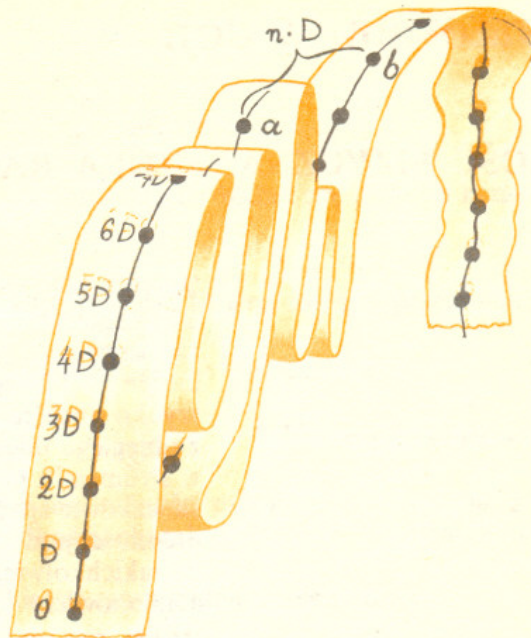
Dużymi kropkami oznaczyliśmy liczby podzielne przez D , a więc $0, D, 2D, 3D, 4D, 5D$ itd. Rysunek pokazuje, że różnica dwóch takich liczb też dzieli się przez D .

Uzasadnić możemy to w ten sposób: jeśli liczba a dzieli się przez D , to $a = k \cdot D$; jeśli liczba b dzieli się przez D , to $b = m \cdot D$. Wobec tego $a - b = k \cdot D - m \cdot D = (k - m) \cdot D$, a to oznacza, że $a - b$ też dzieli się przez D . Moglibyśmy nawet udowodnić takie twierdzenie:

Liczby a oraz b mają taki sam największy wspólny dzielnik, co liczby $a - b$ oraz b .

Skorzystamy z tego twierdzenia, żeby skrócić ułamek $\frac{119}{136}$.

Obliczymy różnicę $136 - 119 = 17$ i zamiast szukać największego wspólnego dzielnika dla liczb 119 i 136 poszukamy go dla liczb 17 i 119. Nietrudno się domyśleć, że jest nim 17. Rzeczywiście, po podzieleniu otrzymamy $136 = 17 \cdot 8$ i $119 = 17 \cdot 7$.



Co robimy	Liczby		Największy wspólny dzielnik
	1073	1517	nie wiemy jeszcze jaki
$1517 - 1073 = 444$	444	1073	nie wiemy jeszcze jaki
$1073 - 444 = 629$	444	629	nie wiemy jeszcze jaki
$629 - 444 = 185$	185	444	nie wiemy jeszcze jaki
$444 - 185 = 259$	185	259	nie wiemy jeszcze jaki
$259 - 185 = 74$	74	185	nie wiemy jeszcze jaki
$185 - 74 = 111$	74	111	możemy spróbować rozłożyć...
$111 - 74 = 37$	37	74	już się domyślamy
$74 - 37 = 37$	37	37	wiemy: 37!

Sprawdźmy jeszcze, co się stanie, gdy weźmiemy do obliczeń ułamek nieskracalny, na przykład $\frac{12}{17}$. Obliczenia zanotujemy, jak poprzednio, w odpowiedniej tabelce:

Co robimy	Liczby		Największy wspólny dzielnik
	12	17	?
$17 - 12 = 5$	5	12	?
$12 - 5 = 7$	5	7	?
$7 - 5 = 2$	2	5	?
$5 - 2 = 3$	3	2	?
$3 - 2 = 1$	2	1	1

Okazuje się, że największą i jedyną liczbą, przez którą się dzieli 12, i 17, jest 1. Nie można więc skrócić

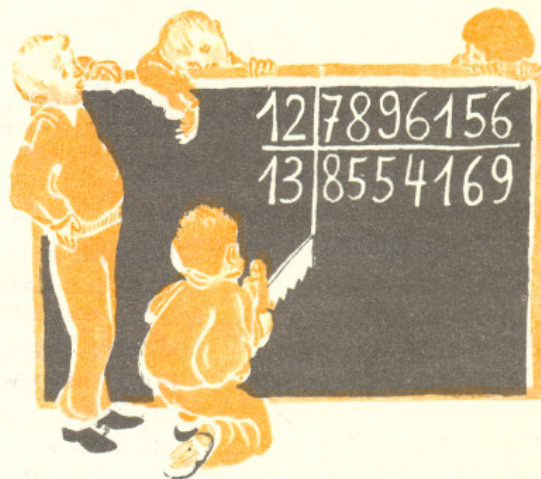
ułamka $\frac{12}{17}$. Jest on nieskracalny.

Mamy więc sposób na znalezienie największego wspólnego dzielnika liczb 1517 i 1073. Trochę liczenia i uprościmy twój okropny ułamek. Nie powinno nam to zająć nawet pięciu minut.

Obliczenia i ich wyniki zapisywać będziemy po kolei w tabelce. W każdym następnym wierszu tabelki (tam, gdzie napisaliśmy „liczby”) zamiast liczb z poprzedniego wiersza wpisywać będziemy inne dwie liczby: mniejszą z liczb, które były wyżej, oraz ich różnicę. Liczby będą się zmieniały, ale ich wspólny dzielnik będzie ten sam.

Podziel teraz licznik i mianownik przez 37 (bądź spokojny, na pewno da się podzielić) i skróć ułamek, nad którym się tak długo męczyłeś.

Jeśli macie ochotę — drodzy Czytelnicy — to skróćcie ułamek Janka. Cierpliwi mogą się przekonać, że wszystkie liczby napisane w tabelce przez Andrzeja dzielą się przez 37.

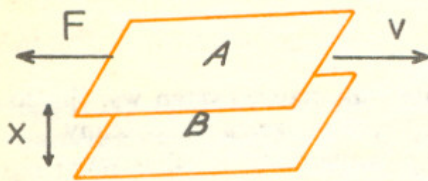


Dla wszystkich, którzy chcieliby sprawdzić nową metodę skracania ułamków, przygotowaliśmy przykłady takich specjalnych „obryzmów”. Przekonajcie się, że zwykłą metodą nie łatwo będzie je skrócić:

$$\frac{1139}{6499}, \frac{7387}{7921}, \frac{2501}{2911}, \frac{403}{713}$$

WIELKOŚĆ FIZYCZNA, KTÓRA RATUJE ŻYCIE SKOCZKOM SPADOCHRONOWYM

Współczynnik lepkości η wyrażamy w $\frac{N \cdot s}{m^2}$



Wielu z Was domyśla się z pewnością, że będziemy się zajmować lepkością, a szczególnie lepkością powietrza. Tak, również i powietrze jest lepkie, co można zaobserwować w wielu sytuacjach. Wprawdzie machając ręką w powietrzu nie czujemy wielkiego oporu powietrza, ale wystawiając rękę przez okno jadącego szybko pociągu lub samochodu możemy łatwo odczuć tę siłę. W doświadczeniu z ubiegłego miesiąca wyznaczaliśmy jej wartość dla piłeczki umieszczonej w strumieniu powietrza wypływającego z odkurzacza. Gdyby nie zjawisko lepkości, skoczkowie spadochronowi zabijaliby się masowo rozpędzając się do olbrzymich prędkości pod wpływem przyciągania ziemskiego. Oczywiście zanim przystąpimy do jakichkolwiek doświadczeń, musimy wyjaśnić sprawę podstawową, a mianowicie

SKĄD SIĘ BIERZE LEPKOŚĆ?

Siła oporu lepkiego powstaje zawsze tam, gdzie istnieje ruch warstw ośrodka względem siebie.

Niech warstwa cieczy lub gazu A porusza się z prędkością v względem odległej o x warstwy B . W wyniku przenikania cząsteczek z warstwy wolniejszej (B) do szybszej (A), ta ostatnia jest hamowana z pewną siłą F . Można łatwo zgadnąć, że:

- 1) Siła F jest proporcjonalna do powierzchni warstw (S). Liczba przenikających cząsteczek będzie tym większa, im większa będzie powierzchnia.
- 2) Siła F jest odwrotnie proporcjonalna do odległości warstw. Cząsteczki przenikają szybciej przy mniejszej odległości.

Przeprowadzając szczegółowy rachunek w oparciu o teorię kinetyczno-cząstkową (niestety, nasza rubryka nie jest miejscem, w którym można by go przytoczyć), można wykazać ilościowo tezy 1 i 2, a także wywnioskować, że:

- 3) Siła F jest wprost proporcjonalna do prędkości względnej warstw.

Matematycznie ujmujemy to tak:

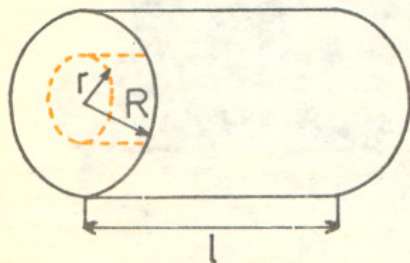
$$F = -\eta \frac{S \cdot v}{x}$$

albo, ściślej, po przejściu do granicy bardzo bliskich warstw:

$$F = -\eta S \frac{dv}{dx};$$

η jest współczynnikiem proporcjonalności charakteryzującym ośrodek i nosi nazwę **współczynnika lepkości**. Znając podstawowe prawo rządzące przepływem lepkich cieczy i gazów możemy zastanowić się nad konkretnym zagadnieniem o dużym znaczeniu praktycznym:

JAK CIECZ PŁYNIE PRZEZ PRZEWODY?



Intuicyjnie możemy się domyślać, że przy przepływie np. przez rurę o przekroju kołowym największą prędkość będzie miała ciecz w środku, a najmniejszą blisko ścianek rury. Widać też, że zjawisko ma symetrię cylindryczną, to znaczy prędkość będzie zależać tylko od odległości r od osi rury. Wyodrębnijmy w myśli walec o promieniu r wewnątrz rury.

Niech ruch cieczy odbywa się pod wpływem ciśnienia p . Siła działająca na nasz walec będzie iloczynem ciśnienia p przez powierzchnię przekroju poprzecznego walca: $F_1 = p \cdot \pi r^2$. Będzie ona równoważona przez siłę oporu lepkiego, zgodnie z naszymi dotychczasowymi rozważaniami, wyrażającą się przez iloczyn

lepkości przez pochodną prędkości $\frac{dv}{dr}$ i powierzchnię (boczną) walca

$$F_2 = \eta \frac{dv}{dr} \cdot 2\pi r l.$$

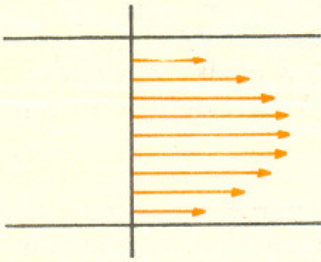
Warunek równowagi: $F_1 + F_2 = 0$ prowadzi do wniosku:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{pr}{2\eta l}.$$

Ci z Was, którzy znają rachunek różniczkowy, mogą łatwo sprawdzić, że równanie to spełnia funkcja

$$v = \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Pozostali muszą mi wierzyć. Otrzymaliśmy więc rozkład prędkości o kształcie paraboli.



Widać, że prędkość maksymalna $v_{max} = \frac{pR^2}{4\eta l}$. Można również przekonać się, że prędkość średnia jest równa połowie prędkości maksymalnej

$$\bar{v} = \frac{pR^2}{8\eta l}.$$

Istotny dla nas jest wniosek o proporcjonalności prędkości do ciśnienia lub, inaczej mówiąc, siły oporu do prędkości, charakterystyczny dla ruchu lepkich substancji.

Na pewno wielu z Was już od jakiegoś czasu zadaje sobie pytanie:

JAK MOŻNA WYZNACZYĆ LEPKOŚĆ?

Posłużymy się w tym celu nadzwyczaj prostym przyrządem: kawałkiem (ok. 0,5 m) rurki lub węża, który zatkamy z jednej strony szczelnie korkiem. W korek wbijemy igłę, jaką używa się do zastrzyków (dostępna tanio i w każdej aptece).

Po napełnieniu wodą umieszczamy rurkę pionowo w cylindrycznym naczyniu z niewielką ilością wody (rys. 4). Pod wpływem ciśnienia słupa wody rurce zacznie się przepływać woda z rurki do naczynia, hamowany przez opór powietrza przepływającego przez igłę od strzykawki. Mierząc prędkość opadania wody w rurce (lub przybywania jej w naczyniu) i znając średnicę otworu w igle możemy określić średnią prędkość przepływu powietrza przez igłę. Teraz, posługując się już wprowadzonym uprzednio wzorem, możemy obliczyć lepkość, pamiętając, że ciśnienie jest po prostu ciśnieniem słupa wody:

$$p = \rho \cdot g \cdot h.$$

W tej chwili zacząć się już na pewno buntować wszyscy, którzy czytali poprzedni numer »Deltę«. Wielu z nich wykonało doświadczenie, w którym stwierdzili z pewnością, że opór powietrza dla piłeczki pingpongowej jest w granicach dokładności pomiaru proporcjonalny do kwadratu jej prędkości względem powietrza, a nie, jakby z dzisiejszych rozważań wynikało, do samej prędkości. Należy więc wreszcie wyjaśnić:

PRĘDKOŚĆ POWIETRZA CZY JEJ KWADRAT?

I to, i to. Nie musicie mi jednak wierzyć na słowo. W naszym doświadczeniu możemy to bezpośrednio sprawdzić, znajdując, jak zmienia się poziom wody w rurce w funkcji czasu. Spróbujemy najpierw przewidzieć, jakie wnioski o tej zależności wynikają z dwóch różnych założeń, które możemy uczynić. Przyjmijmy najpierw, że siła jest proporcjonalna do prędkości, a więc prędkość jest proporcjonalna do ciśnienia. Prędkość opadania słupa wody w rurce v_w (którą mierzymy) jest oczywiście proporcjonalna do prędkości przepływu powietrza przez igłę v_p :

$$\frac{dh}{dt} = v_w = A \cdot v_p$$

Z drugiej strony prędkość v_p jest, jak założyliśmy, proporcjonalna do ciśnienia, a więc do wysokości słupa wody:

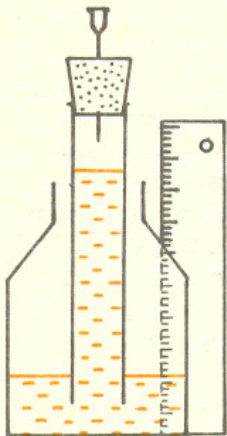
$$v_p = -B \cdot h$$

(minus, ponieważ v_p skierowana jest w dół, a h mierzymy w górę). Po podstawieniu otrzymujemy, że szybkość opadania słupa wody jest proporcjonalna do jego wysokości h :

$$-\frac{dh}{dt} = A \cdot B \cdot h.$$

Równanie to występuje w opisie wielu różnych zjawisk fizycznych, jak na przykład rozpad promieniotwórczy czy rozładowanie kondensatora przez opór. Jego rozwiązanie (co również możecie łatwo sprawdzić) jest funkcją wykładniczą postaci:

$$h(t) = h_0 e^{-ABt},$$



Rozwiązanie zadania M 47

$$\text{Niech } z = \sqrt{\frac{x+1}{x+y}}, \quad t = \sqrt{\frac{x+1}{y+2}}.$$

Dany układ równań przybiera postać

$$z + \frac{1}{z} = 2,$$

$$t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}.$$

Równania te można napisać w postaci

$$z^2 - 2z + 1 = 0,$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0.$$

Otrzymujemy stąd $z = 1$ i $t = 2$ (bo $t > 0$).

Jest więc

$$\sqrt{\frac{x+1}{x+y}} = 1, \quad \sqrt{\frac{x+1}{y+2}} = 2,$$

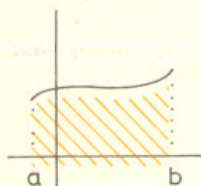
$$\text{skąd } y = 1, \quad \sqrt{\frac{x+1}{3}} = 2 \text{ i } x = 11.$$



Rozwiązanie zadania M 48

Całkę funkcji ciągłej i nieujemnej można interpretować jako pole. Jak wiadomo,

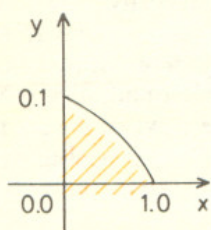
$\int_a^b f(x) dx$ jest równa polu zakreślonemu:



Aby zastosować tę uwagę, zmienimy w pierwszej całce oznaczenia z x na y . Mamy więc wykażać

$$\int_0^1 \frac{1}{y^{1+m}} dy = \int_0^1 \frac{1}{x^{1+m}} dx.$$

Rysując odpowiedni wykres stwierdzamy, że w obu przypadkach liczymy pole tego samego obszaru, który jest ograniczony odcinkami



$$0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1$$

i krzywą

$$x^m + y^m = 1,$$

raz przyjmując za zmienną niezależną y , raz — x .

gdzie h_0 jest wysokością początkową (w chwili $t = 0$), a $e \simeq 2,72$ jest podstawą logarytmów naturalnych. Wygodnie jest zapisać ten wzór w postaci:

$$\log_{10} h = \log_{10} h_0 - ABt \log_{10} e.$$

Widać, że logarytm h zmienia się w czasie liniowo. Przedstawiając więc logarytm zmiennej wysokości h na wykresie jako funkcję czasu, możemy przekonać się, czy otrzymany wzór jest słuszny, czy nie (jeśli tak — otrzymamy linię prostą). Z braku miejsca nie przytoczę podobnego rozumowania, z którego wynika, że przy kwadratowej zależności oporu od prędkości (a więc przy prędkości wypływu proporcjonalnej do pierwiastka z ciśnienia) zależność h od czasu powinna być kwadratowa:

$$h(t) = h_0(t-t_0)^2,$$

gdzie h_0 jest wysokością początkową, a t_0 czasem, po którym wysokość spadnie do zera. W tym przypadku przedstawiając pierwiastek z h jako funkcję czasu powinniśmy otrzymać na wykresie prostą. Jak jest w rzeczywistości — przekonajcie się sami.

Niezależnie jednak od tego, co Wam wyjdzie, pamiętając wyniki doświadczenia z ubiegłego miesiąca macie prawo zapytać:

CZY ZALEŻNOŚĆ KWADRATOWĄ MOŻNA WYJAŚNIĆ TEORETYCZNIE?

W każdym razie łatwo wyjaśnić odstępstwa od zależności liniowej. U podstaw naszych rozwiązań teoretycznych leżało bowiem założenie, że ruch cieczy odbywa się w warstwach. Taki ruch nazywa się **laminarny**. Doświadczenie uczy, że powyżej pewnej prędkości zaczynają tworzyć się wiry, ośrodek silnie się miesza — występuje przepływ **burzliwy**, czyli **turbulentny**. Wtedy część potencjalnej energii ciśnienia przetwarza się na energię kinetyczną płynu w wirze. Przy prędkości zwiększającej się coraz bardziej ta część będzie miała coraz większe znaczenie, aż wreszcie stanie się dominująca. Jaka jest zależność oporu od prędkości przepływu przy całkowitej zamianie energii ciśnienia na kinetyczną, możecie wywnioskować z zasady zachowania energii. Znane szkolne zadanie rozważa wypływ cieczy z naczynia przez małą dziurkę. Wiadomo, że otrzymuje się wtedy prędkość proporcjonalną do pierwiastka z ciśnienia:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2p}{\rho}},$$

gdzie ρ jest gęstością cieczy.

Odpowiada to kwadratowej zależności oporu od prędkości. Widać więc, że przepływ laminarny i skrajnie burzliwy są pewnymi wyidealizowanymi przypadkami granicznymi. W obszarze przejściowym zależność oporu od prędkości jest bardzo skomplikowana, a jej opis teoretyczny bardzo trudny.

O wyszukiwaniu informacji

Prof. dr Zdzisław PAWLAK

Książka telefoniczna, katalog w bibliotece, lista płacy w przedsiębiorstwie, spis lokatorów domu, mały rocznik statystyczny, karty pracy robotników jakiegoś przedsiębiorstwa, katalog znaczków pocztowych, kartoteka przestępców, kartoteka pacjentów w przychodni lekarskiej — wszystko to są przykłady zbiorów informacji.

Chcąc poznać numer telefonu kolegi, znaleźć interesującą nas książkę w bibliotece czy określić wartość nowo zdobytego znaczka pocztowego, należy zajrzeć do książki telefonicznej, katalogu bibliotecznego bądź filatelistycznego.

Wyszukiwanie potrzebnych nam informacji jest jedną z najczęściej występujących czynności we wszelkiego rodzaju poczynaniach: w życiu codziennym, pracy, nauce, rozrywce.

Aby jednakże znaleźć to, czego szukamy w interesującym nas katalogu czy spisie, musimy wiedzieć, o co nam chodzi; inaczej mówiąc, musimy jakoś scharakteryzować poszukiwane informacje przez podanie nazwiska i adresu kolegi, autora i tytułu książki bądź serii i kraju, z którego pochodzi znaczek. Proces znajdowania interesującej nas informacji jest we wszystkich podanych przykładach bardzo prosty, i sprowadza się do przeszukania odpowiednich spisów (katalogów). Sprawa się znacznie komplikuje, gdy zbiory informacji są bardzo duże. Np. gdybyśmy chcieli stworzyć i wykorzystywać spis wszystkich obywateli kraju, w którym każdy obywatel jest dokładnie scharakteryzowany, albo centralny krajowy katalog książek czy też światowy rozkład



lotów samolotów, sprawa nie byłaby tak prosta — przede wszystkim z uwagi na bardzo duży czas potrzebny na wyszukanie interesującej nas informacji.

W tak skomplikowanych przypadkach przychodzą z pomocą współczesne maszyny liczące. Można w nich gromadzić olbrzymie zbiory informacji, oraz bardzo szybko — praktycznie prawie natychmiast — wyszukiwać to, czego potrzebujemy. To nowe zastosowanie maszyn liczących rozwinęło się powszechnie od niedawna i co ciekawsze — o czym może nie wszyscy wiedzą obecnie stanowi ono największy procent wszelkich zastosowań (około 70%). A więc współczesna maszyna licząca to przede wszystkim olbrzymi katalog wszelkiego rodzaju informacji, a nie bardzo szybki arytmetometr, jak było to jeszcze kilkanaście lat temu.

Apetyt rośnie w miarę jedzenia. Możliwości, które oferuje informatyka, są bardzo duże, ale specjaliści chcieliby, aby były one jeszcze większe, aby zbiory dostępnych informacji były praktycznie nieograniczone, aby proces wyszukiwania jeszcze bardziej usprawnić i przyspieszyć, aby jak najbardziej ułatwić praktyczne wykorzystywanie maszyn liczących do tego celu. Procesu tego nie da się zrealizować wyłącznie drogą ulepszeń technicznych; konieczne jest również znalezienie nowych metod gromadzenia i wyszukiwania informacji. W formułowaniu i badaniu takich metod bardzo ważną rolę odgrywa matematyka. Pozwala ona na badanie wielu własności systemów informacyjnych, jeszcze zanim zostaną one zrealizowane praktycznie. W artykule tym przedstawię pewne problemy matematyczne, które powstały w związku ze stosowaniem maszyn liczących do gromadzenia i wyszukiwania informacji.

Rozważania nasze rozpoczniemy od sprecyzowania pojęcia systemu wyszukiwania informacji. Uważamy, że system taki jest określony, gdy dany jest pewien zbiór X , zwany zbiorem obiektów (np. zbiór książek, znaczków czy ludzi), oraz metoda charakteryzowania elementów zbioru; ściślej: dany jest pewien zbiór A , elementy którego nazwiemy deskryptorami, oraz funkcja $\varphi: A \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ ($\mathfrak{P}(X)$ jest zbiorem potęgowym). Funkcja φ przypisuje każdemu deskryptorowi $a \in A$ zbiór tych wszystkich elementów zbioru X , które posiadają własność wyrażoną przez deskryptor a . Np. jeżeli X jest zbiorem uczniów w klasie, zaś b oznacza własność posiadania blond włosów, to $\varphi(b)$ jest zbiorem wszystkich blondynów z klasy.

Przez system wyszukiwania informacji będziemy rozumieli trójkę

$$S = \langle X, A, \varphi \rangle,$$

gdzie X — jest zbiorem obiektów w S , A — jest zbiorem deskryptorów, zaś funkcja $\varphi: A \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ nazywa się charakterystyką w S .

W zbiorze A możemy wprowadzić pewien podział, łącząc elementy tego zbioru w klasy w taki sposób, że elementy należące do tej samej klasy charakteryzują pewną cechę obiektu, np. kolor, datę, wagę, etc. Dla przykładu: rubryki w dowodzie osobistym — nazwisko, adres, data urodzenia etc. — są cechami obiektów, konkretne zaś nazwiska, adresy, daty są deskryptorami. Np. „Kowalski, ul. Polna 29, 30 stycznia 1958” są deskryptorami należącymi kolejno do klasy: nazwisko, adres, data urodzenia.

Aby móc opisywać elementy zbioru X w systemie S , wprowadzimy pewien język formalny L_s . Język ten będzie bardzo prosty. Elementami tego języka będą, po pierwsze, wszystkie deskryptory (ściślej ich nazwy, gdyż np. kolor niebieski w różnych językach ma różne nazwy) oraz znaczki:

$1, 0, \vee, \wedge, \sim$.

Za pomocą deskryptorów elementarnych i podanych znaczków tworzyć będziemy wyrażenia poprawne naszego języka (zwane termami) w następujący sposób:

1°. Wyrażenia $1, 0$ oraz deskryptory są termami (elementarnymi) języka L_s .

2°. Jeżeli t, t' są termami, to również termami są wyrażenia:

$(t \vee t')$ — czyt. „ t lub t' ”,

$(t \wedge t')$ — czyt. „ t i t' ”,

$\sim(t)$ — czyt. „nie t ”.

3°. Tylko wyrażenia otrzymane przez zastosowanie reguł 1° i 2° są termami.

Przykłady termów: niech dla uproszczenia zbiór A będzie zbiorem liter alfabetu łacińskiego.

Wtedy wyrażenia $1 \vee a, 1 \wedge 0, (a \vee b) \wedge c, \sim 1, \sim((a \wedge c) \wedge b)$ są termami.

W ten sposób określiliśmy gramatykę języka L_s , wiemy bowiem, jaką postać mają wyrażenia poprawne w naszym języku. Dla zdefiniowania jakiegokolwiek języka nie wystarczy określenie jego struktury gramatycznej; należy określić także znaczenie jego wyrażen lub, jak to się mówi, określić semantykę języka.

Semantykę języka L_s określimy jak następuje: wprowadzimy funkcję φ^* , którą nazwiemy semantyką, zaś wartość tej funkcji dla dowolnego termu $a \in A$ nazwiemy wartością termu a w systemie S . Funkcja jest określona tak:

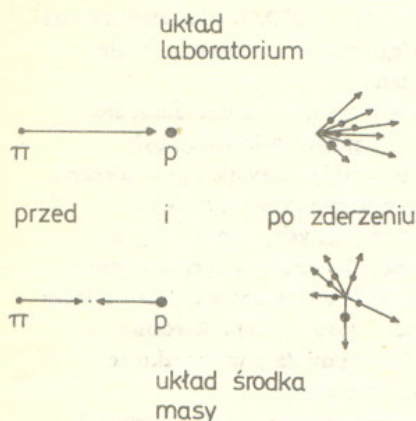
1. $\varphi^*(a) = \varphi(a)$,
2. $\varphi^*(a \vee b) = \varphi^*(a) \cup \varphi^*(b)$,
3. $\varphi^*(a \wedge b) = \varphi^*(a) \cap \varphi^*(b)$,
4. $\varphi^*(\sim a) = X - \varphi^*(a)$,
5. $\varphi^*(0) = \phi$,
6. $\varphi^*(1) = X$.

(\cap, \cup oznaczają odpowiednio iloczyn oraz sumę zbiorów, zaś ϕ jest zbiorem pustym).

Zbiorem potęgowym zbioru X nazywa się rodzinę wszystkich podzbiorów tego zbioru i oznacza symbolem $\mathfrak{P}(X)$. Jeśli na przykład $X = \{1, 2\}$, to $\mathfrak{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ i jest zbiorem 4-elementowym. Ogólnie, jeśli X ma n elementów, to $\mathfrak{P}(X)$ ma 2^n elementów.



Najwygodniej rozwiązać nasz problem w układzie środka masy zderzających się cząstek. W układzie środka masy, jak wynika z definicji tego układu, wypadkowy pęd cząstek przed i po reakcji wynosi zero. Przebieg zderzenia πp , obserwowany w układzie laboratorium i w układzie środka masy, przedstawiamy obrazowo na rys. 1.



W układzie środka masy cała dostępna energia cząstek początkowych może być w szczególności zużyta na produkcję nowych cząstek, które wówczas spoczywają w tym układzie. A jak taki przypadek wygląda w układzie laboratorium? Wszystkie wyprodukowane cząstki poruszają się z tą samą prędkością, równą prędkości układu środka masy względem laboratorium. Do rozwiązania zadania pozostaje nam tylko wyznaczyć prędkość układu środka masy v_{cm} oraz napisać prawo zachowania pędu lub energii w układzie laboratorium. Nim przystąpimy do rachunków, zauważmy, że dyskutowane cząstki poruszają się z prędkościami bliskimi prędkości światła. Dla przykładu policzmy prędkość nadlatującego pionu:

$$v_{\pi} = \frac{p_{\pi} \cdot c^2}{E_{\pi}}$$

gdzie p_{π} i E_{π} są pędem i energią pionu, a c — prędkością światła. Ponieważ między energią cząstki, jej pędem i masą spoczynkową zachodzi związek relatywistyczny: $E_{\pi}^2 = p_{\pi}^2 \cdot c^2 + m_0^2 c^4$, więc dla pionu o pędzie 200 GeV/c porusza się z prędkością

$$v_{\pi} = (1 - 2,5 \cdot 10^{-6}) c.$$

W naszych obliczeniach musimy stosować wzory mechaniki relatywistycznej. Prędkość środka masy wynosi:

$$v_{cm} = \frac{m_{\pi} \cdot v_{\pi} + M \cdot 0}{m_{\pi} + M} = \frac{p_{\pi} \cdot c^2}{E_{\pi} + M c^2},$$

gdzie M jest masą spoczynkową protonu,

a m_{π} masą nadlatującego pionu,

$$m_{\pi} = m_0 / \sqrt{1 - \frac{v_{\pi}^2}{c^2}}$$

Z prawa zachowania pędu, napisanego w układzie laboratorium otrzymujemy związek:

$$p_{\pi} = \frac{M \cdot v_{cm}}{1 - \frac{v_{cm}^2}{c^2}} + \frac{K m_0 v_{cm}}{\sqrt{1 - \frac{v_{cm}^2}{c^2}}}$$

Proste przekształcenia prowadzą do ostatecznego wyniku:

$$K = E \left(\frac{1}{m_0} \left(\sqrt{M^2 + m_0^2 + 2ME_{\pi}/c^2} - M \right) \right)$$

$E(x)$ jest funkcją entier, równą największej liczbie całkowitej mniejszej od x .

Wartość licznika K wynosi 132. Zasada zachowania energii i pędu dopuszcza produkcję znacznie większej liczby cząstek, niż te 16 obserwowane na zdjęciu. Mamy nadzieję, że Czytelnik nie będzie miał kłopotu ze znalezieniem sam odpowiedzi na drugie pytanie postawione w zadaniu (odp. 280 MeV/c).

Mówiąc inaczej, wartościami termów w systemie wyszukiwania informacji S są pewne podzbiory zbioru X (w szczególności zbiór pusty oraz cały zbiór X). Mówiąc jeszcze inaczej termy „oznaczają” pewne zbiory.

Język L_S służy nam do opisywania właściwości zbioru obiektów. Oczywiście możemy w języku L_S zamiast symboli używać wyrażen języka naturalnego. W ten sposób możemy np. podać charakterystykę książek, które nas interesują w związku ze zbliżającym się egzaminem. Za pomocą wyrażen języka L_S możemy np. napisać, że chcemy, aby bibliotekarka wydała nam książki na temat fizyki jądrowej, autorów Kowalskiego lub Michalskiego, w języku polskim lub rosyjskim, wydane w latach 1950–1971, ale nie w roku 1960 (bo np. z tego roku literaturę już mamy). Język L_S służy więc do opisywania zbiorów informacji.

Język ten ma bardzo ciekawe własności. Jedną z nich przytoczymy tutaj, przedtem jednak wprowadzimy kilka potrzebnych pojęć.

Powiemy, że term a jest atomowy, jeśli ma on postać

$$a = e_0 \wedge \dots \wedge e_k$$

gdzie e_i ($0 \leq i \leq k$) są termami elementarnymi, każdy należy do innej klasy deskryptorów i przy tym w a występują termy ze wszystkich klas deskryptorów systemu S .

Powiemy, że term t jest w postaci normalnej gdy

$$t = a_0 \vee \dots \vee a_p,$$

zaś wszystkie a_i są termami atomowymi.

Powiemy, że dwa termy są równoważne, jeżeli ich znaczenia są jednakowe, tj. $t \approx t'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^*(t) = \varphi^*(t')$.

Język L_S ma trzy bardzo ważne własności:

1. Znaczenie każdego z dwu różnych termów atomowych t, t' jest rozłączne (tj. jeżeli $t \neq t'$, to $\varphi^*(t) \cap \varphi^*(t') = \emptyset$).
2. Suma znaczeń wszystkich termów atomowych w systemie S jest równa X , tj.

$$\bigcup_{t \in L_S} \varphi^*(t) = X.$$

3. Dla każdego termu t w L_S istnieje w L_S term t' w postaci normalnej równoważny z t : $\varphi^*(t) = \varphi^*(t')$.

Powyższe trzy własności mają bardzo poważne konsekwencje praktyczne i teoretyczne (a może nawet i filozoficzne, o czym na końcu). Wynika z nich mianowicie, że każdy system wyszukiwania informacji w naturalny sposób wyznacza podział zbioru obiektów X na klasy rozłączne, które nazwiemy atomami systemu S . Każdemu atomowi odpowiada wyrażenie atomowe lub, inaczej mówiąc, każdy atom jest jednoznacznie opisany przez wyrażenie atomowe. Własność 2 zaś mówi, że każdy podzbiór zbioru X , który możemy opisać w języku systemu informacyjnego, jest sumą atomów. Znaczący to, że ogólnie biorąc w języku informacyjnym nie możemy opisać dowolnego podzbioru zbioru X ! Ilustruje to może najlepiej następujący przykład: Gdybyśmy potraktowali jakąś bibliotekę jako system wyszukiwania informacji i opracowali dla niej odpowiedni język informacyjny, to w wyniku tego moglibyśmy utworzyć z książek zbiory atomowe, pakując je np. w paczki, i wszelkie życzenia czytelników, które można wyrazić w języku informacyjnym, byłyby zrealizowane tylko poprzez sumy takich paczek.

Własności te mają szczególne znaczenie dla maszynowego realizowania systemów wyszukiwania informacji. Pozwalają one, zamiast szukać interesujących nas informacji w całym zbiorze, od razu określić miejsce, gdzie informacje te się znajdują. Nie trzeba wyjaśniać, jakie to ma znaczenie dla przyspieszenia procesu wyszukiwania informacji. Warto dla wyjaśnienia dodać, że jak dotychczas aktualnie istniejące systemy wyszukiwania informacji nie są oparte na podanych tu zasadach; prowadzone są dopiero próby realizacji tej idei. Należy się spodziewać, że przyniosą one pozytywne rezultaty.

Warto się przy okazji poruszanych problemów zastanowić nad pytaniem bardziej ogólnej natury. Czy na przykład opisywanie zbiorów informacji możliwe jest jedynie w podany sposób? Co to jest właściwie informacja? Jakie ma ona podstawowe własności? — etc.

Należy dodać, że pojęcie informacji, które jest nam potrzebne do celów podanych w tym artykule, nie ma nic wspólnego z pojęciem informacji występującym w tzw. teorii informacji stworzonej przez Shannona w latach czterdziestych. W istniejącej aktualnie teorii informacji punktem wyjścia określenia informacji były całkiem inne fakty nawiązujące do przesyłania sygnałów w sieciach telekomunikacyjnych. Natomiast w latach trzydziestych naszego stulecia logik i filozof amerykański Rudolf Carnap zastanawiał się nad pojęciem informacji właśnie w sensie zbliżonym do tego, o którym pisaliśmy w tym artykule. Być może uda się stworzyć nową „teorię informacji” wychodzącą z faktów, których dostarczyły współczesne maszyny liczące. Na zakończenie jeszcze jedna uwaga. Niemal wszystkie problemy, które powstają w związku z konstrukcją i zastosowaniem maszyn liczących, mają bardzo różnorodne aspekty — od aspektów związanych bezpośrednio z zastosowaniami aż do spraw natury, daleko wykraczających poza problematykę maszyn liczących. Jest to prawdopodobnie przyczyną tego, że informatyka — nauka o maszynach liczących i metodach ich użytkowania — jest tak pociągająca.

Co się dzieje, gdy promieniowanie jądrowe przechodzi przez materię?

Doc. dr Piotr DECOWSKI

Pytaniu zawartemu w tytule można zarzucić, że jest bardzo nieprecyzyjne. Bo czym jest promieniowanie jądrowe? Wiemy, że mogą to być lżejsze lub cięższe cząstki naładowane (np. elektrony, protony, cząstki alfa), cząstki neutralne (np. neutrina, neutrony) czy też promieniowanie elektromagnetyczne o bardzo małej długości fali (tzw. promieniowanie gamma). Każdy z typów promieniowania oddziałuje z materią na swój sposób. Oczywiście najprościej można sobie wyobrazić to oddziaływanie w przypadku cząstek naładowanych.

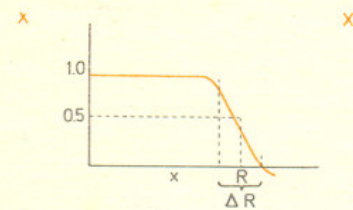
W każdej substancji jest mnóstwo elektronów dość równomiernie rozlokowanych w całej jej objętości. Większość z nich jest związana na orbitach atomowych, niektóre mogą się poruszać wewnątrz substancji niemal swobodnie. Cząstka naładowana przechodząc przez materię oddziałuje elektrostatycznie z poszczególnymi elektronami, wybija je z orbit (następuje jonizacja atomu) i przekazuje im część swej energii. Wytraca prędkość i wreszcie po przebyciu pewnej drogi ruch jej prawie ustaje. Jeśli spowolniana cząstką jest cząstka cięższa, np. proton, którego masa jest blisko 2000 razy większa niż masa elektronu, to jej w czasie zderzeń z elektronami ulega tylko nieznacznym odchyleniom od początkowego kierunku. W związku z tym możemy wprowadzić pojęcie zasięgu cząstek przechodzących przez daną substancję. Liczba cząstek w wiązce przenikającej przez pewien przekrój na głębokościach mniejszych od zasięgu jest w przybliżeniu równa liczbie cząstek w wiązce padającej na absorbent, choć mają one teraz energię mniejszą od energii początkowej. Na głębokościach porównywalnych z zasięgiem liczba ta gwałtownie spada do zera (rys. 1). Zanim poruszająca się cząstka ulegnie całkowitemu wyhamowaniu oddziałuje z setkami tysięcy elektronów. Jest to proces przypadkowy — jedna cząstka może napotkać na swej drodze mniejszą liczbę elektronów, inna większą. Straty energii cząstek po przejściu warstwy absorbenta o określonej grubości mogą być nieco różne.

Ta nieokreśloność energii, wynikająca z przypadkowości procesu hamowania, będąca niejednokrotnie utrapieniem fizyków wykonujących doświadczenia, nosi nazwę *stragglingu* energii. Z tych samych powodów możemy również mówić o *stragglingu* zasięgu — każda cząstka przebywa w danej substancji drogę równą swemu indywidualnemu zasięgowi, na ogół nieco różnemu od średniego zasięgu cząstek. To rozmycie zasięgu (ΔR na rys. 1) dla protonów i cząstek alfa o energii od kilku do kilkuset MeV jest rzędu paru procent.

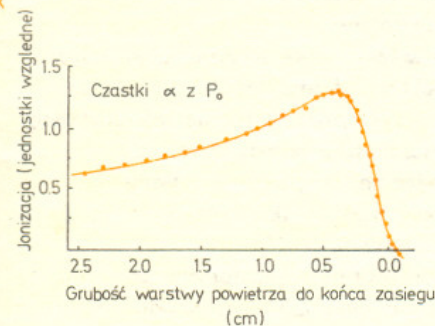
Strata energii naładowanej cząstki na określonej drodze jest oczywiście wprost proporcjonalna do gęstości elektronów w absorbencie, a ponadto zależy od prędkości cząstki i jej ładunku. Pęd przekazany elektronowi w czasie oddziaływania jest wprost proporcjonalny do siły i czasu jej działania, czyli jest wprost proporcjonalny do ładunku cząstki i odwrotnie proporcjonalny do jej prędkości. Ubytek zatem energii kinetycznej cząstki równy energii kinetycznej elektronu zależy od ilorazu kwadratu ładunku przez kwadrat prędkości cząstki. Straty energii na jednostkę drogi (tzw. zdolność hamująca ośrodka) są więc największe przy końcu drogi cząstki, tam gdzie jej prędkość jest już stosunkowo mała (rys. 2). Przy bardzo małych prędkościach cząstka nie jest już w stanie uwolnić niektórych silniej związanych elektronów w atomach, ponadto zaczyna chętnie przyjmować elektrony na swoje własne orbity, co prowadzi do zmniejszenia jej efektywnego ładunku — straty jonizacyjne maleją.

Cząstki nie posiadające ładunku oddziałują z materią znacznie słabiej. Neutrony tracą energię głównie w zderzeniach z jądrami atomów — dają tu o sobie znać krótkozasięgowo siły jądrowe. Prawdopodobieństwo takiego procesu jest znacznie mniejsze niż prawdopodobieństwo oddziaływania elektrostatycznego. Dlatego też dla neutronów większość substancji jest niemal przezroczysta; trzeba budować grube zapory, aby skutecznie zmniejszyć ich strumień. Dla neutronów wszystkie zapory ziemskie są prawie idealnie przezroczyste!

Inaczej oddziałuje z materią promieniowanie gamma. Foton gamma może wybić elektron z jednej z głębszych powłok elektronowych atomu. Cała energia zostaje wówczas zużyta na oderwanie elektronu od atomu i nadanie mu energii kinetycznej (oraz pewnego odrzutu całemu atomowi). Foton znika. Jest to tzw. efekt fotoelektryczny. Foton może ulec rozproszeniu na jednym z elektronów przekazując mu w tym jakby sprężystym zderzeniu pewną energię. Im większy jest kąt rozproszenia fotonu, tym większa jest strata jego energii (większa długość fali). Foton ulegający temu rozpraszaniu (które nazywa się rozpraszaniem komptonowskim) porusza się w kierunku innym niż kierunek padającej wiązki fotonów — czyli również ubywa z wiązki. Wreszcie gdy energia fotonów jest odpowiednio duża (większa niż 1.02 MeV), w polu elektrycznym jąder atomów ośrodka może nastąpić tzw. kreacja pary elektron-pozyton. Część energii fotonu jest zużyta na kreację elektronu i pozytonu, reszta odnajduje się w ich energiach kinetycznych i energii odrzutu jądra, w polu którego para elektron-pozyton została wytworzona. Foton ginie. Zatem w każdym z tych trzech najbardziej ważnych rodzajów oddziaływania promieniowania gamma z materią foton, który uległ oddziaływaniu ubywa z wiązki. Pozostałe fotony biegają



Rys. 1. Zależność liczby cząstek od przebytej drogi w absorbencie

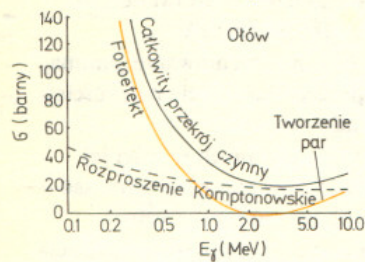
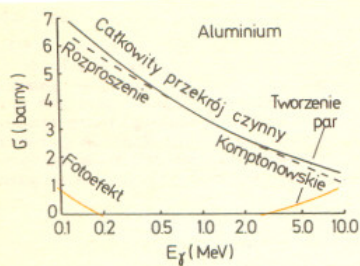


Rys. 2. Strata energii cząstek α na jednostkowej drodze (jonizacja) w funkcji ich zasięgu



Rozwiązanie zadania M 46

Prawdopodobieństwo równe jest 1, gdyż dowolne trzy punkty leżą na jednej półkuli. Aby to udowodnić, wystarczy poprowadzić koło wielkie przez dwa spośród tych punktów i wybrać tę półkulę, na której leży trzeci (jeśli trzeci punkt leży na tym kole, to wybieramy dowolną półkulę wyznaczoną przez koło).



Rys. 3. Przekroje czynne na absorpcję kwantów gamma.

w kierunku wiązki z taką samą energią jaką miały w momencie wejścia do ośrodka. Nie ma więc sensu mówić o zasięgu promieniowania gamma w materii; można jedynie mówić o osłabieniu jego natężenia. Osłabienie ma charakter wykładniczy, co jest konsekwencją faktu, że wszystkie kwanty gamma mają równe szanse ulegnięcia oddziaływaniu w czasie swego lotu przez materię. Można wprowadzić miarę prawdopodobieństwa oddziaływania fotonu. Mierzy się je przy pomocy wielkości zwanej „przekrojem czynnym”. Jest to stosunek liczby aktów oddziaływania w jednostce czasu do liczby fotonów padających w jednostce czasu na jednostkę powierzchni, podzielony przez liczbę atomów znajdujących się w objętości ośrodka, przez który przechodzi wiązka. Taka definicja ma prostą interpretację: wiązka byłaby równie osłabiona, gdyby ją przegrodzić doskonale absorbującą powierzchnią równą iloczynowi przekroju czynnego przez liczbę atomów w próbce objętej wiązką. Przekrój czynny, mierzony zwykle w barnach (10^{-24} cm^2), reprezentuje więc jak gdyby efektywny przekrój atomu w obserwowanym zjawisku. Całkowity przekrój czynny na absorpcję kwantów gamma składa się z sumy przekrojów odpowiedzialnych za trzy opisane procesy oddziaływania:

$$\delta = \delta_{\text{fot}} + \delta_{\text{kompt}} + \delta_{\text{pary}}$$

Po przejściu warstwy substancji o grubości x natężenie wiązki fotonów zmniejsza się $e^{-n\sigma x}$ razy (n — liczba atomów substancji w jednostce objętości). Wartość przekroju czynnego silnie rośnie ze wzrostem liczby porządkowej atomów ośrodka (rys. 3). Jasne jest więc, dlaczego do budowy osłon przed promieniowaniem gamma używamy najczęściej ołowiu. Im większy strumień promieniowania, tym większa musi być grubość stosowanej osłony.

Prześwietlanie protonami

Grupa fizyków z Narodowego Laboratorium w Argonne (USA) wraz z zespołem lekarzy Wydziału Medycznego Uniwersytetu w Chicago prowadzi badania nad zastosowaniem wiązki protonów do prześwietlania żywej tkanki w celach diagnostycznych. Dotychczasowa, szeroko stosowana w medycynie, technika prześwietlania krótkimi falami elektromagnetycznymi (promieniami X) nie pozwala rejestrować obiektów mało różniących się gęstością, a więc pochłanianiem promieniowania. Osłabienie wiązki promieniowania elektromagnetycznego w materii zależy wykładniczo od ilości materii, którą promieniowanie przenika. Patologicznie zmieniona tkanka żywa różni się tylko nieznacznie gęstością od otaczającej ją tkanki zdrowej. Natężenia wiązek promieniowania przenikających zdrową i chorą tkankę różnią się przeto również nieznacznie, tak że wykrycie tej różnicy może być niemożliwe..

Zastosowanie niskoenergetycznej wiązki protonów do prześwietleń radykalnie zmienia sytuację. Dla protonów niskoenergetycznych (to znaczy o tak dobranej energii, aby ilość materii, którą mają przeniknąć, była tylko nieco mniejsza od tej ilości, która zatrzymałaby je całkowicie) zmiany natężenia wiązki w miarę wzrostu ilości przenikniętej przez nią materii są bardzo szybkie. Niewielka nawet różnica w gęstości ośrodków powoduje bardzo znaczną różnicę w ilości przepuszczanych protonów. Różnica ta może wskazać na wewnętrzną strukturę badanej tkanki znacznie precyzyjniej niż konwencjonalne prześwietlenie promieniami X.

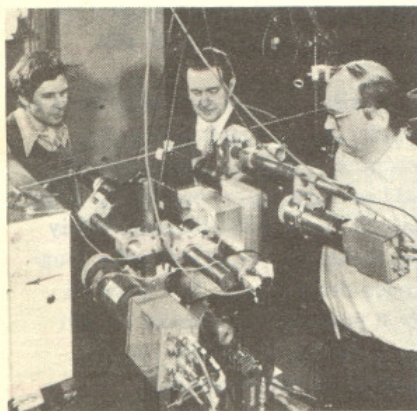
Pierwsze próby rozpoczęto w lutym 1974 r. z wiązką 200 MeV protonów pochodzących z konwencjonalnego akceleratora używanego w laboratorium do badania procesów oddziaływań cząstek elementarnych.

W bloku tworzywa sztucznego o grubości 22,5 cm wyłobiono dołek o głębokości 0,125 mm. Prześwietlenie wiązką protonów pozwoliło wykryć to wgłębienie wykazując tym samym, że można zaobserwować zmiany gęstości mniejsze niż 0,1%.

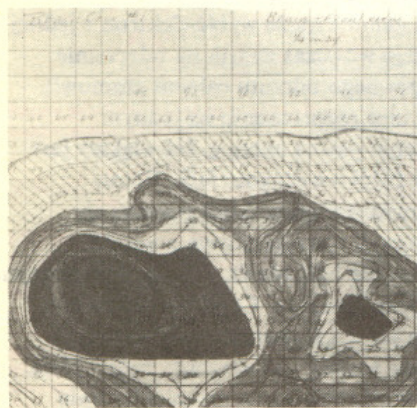
W kwietniu 1974 r. wykonano pierwsze próby z wypreparowaną tkanką ludzką. Zdjęcie przedstawia układ doświadczalny. Próbkę tkanki mózgowej znajduje się w pojemniku wypełnionym wodą, widocznym w środku zdjęcia. Pojemnik jest przesuwany w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku wiązki, a licznik scyntylacyjny rejestruje natężenie przechodzącej wiązki dla każdego położenia pojemnika. W ten sposób powstaje mapa zdolności pochłaniania badanej tkanki. Całkowita dawka promieniowania, otrzymana przez tkankę w procesie prześwietlania wynosi około 5 miliremów, a więc znacznie mniej niż przy prześwietleniu konwencjonalnym. Zdjęcie przedstawia otrzymaną w opisany sposób mapę mózgu. Ciemny obszar po lewej stronie wskazuje tkankę nowotworową.

W oparciu o opisane eksperymenty i obliczenia teoretyczne sądzi się że będzie można wykrywać nowotwory mózgu o średnicy powyżej 4 mm i nowotwory piersi o średnicy nie mniejszej niż 2 mm. Wymaga to opracowania przenośnych, prostych w obsłudze i tanich akceleratorów protonów, takich, które można instalować w szpitalach. Prace w tym kierunku są już zaawansowane. Prześwietlenie protonami jest bardzo dobrym przykładem niespodziewanego zastosowania praktycznego wyników badań z dziedziny pozornie całkowicie poświęconej zagadnieniom czysto poznawczym, dziedziny, jaką jest fizyka cząstek elementarnych.

(Zdjęcia i materiał z «CERN Courier», 1974, tom 14, nr 9).

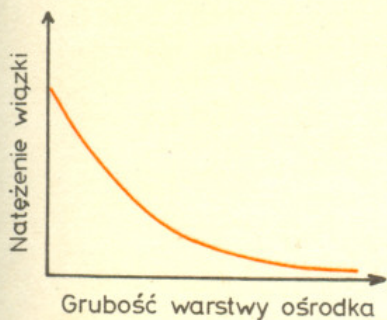


Fot. 1

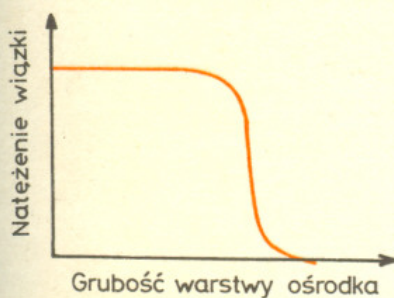


Fot. 2

Doc. dr Ewa SKRZYPCZAK



Rys. 1



Rys. 2

Strumienie cząstek takich, jak elektrony, protony, cząstki α czy neutrony, bądź kwantów promieniowania elektromagnetycznego, jak promienie X, czy γ , określamy niekiedy wspólną nazwą promieniowania jonizującego. Nazwa pochodzi stąd, że wszystkie wspomniane cząstki czy kwanty przechodząc przez ośrodek materialny oddziałują z jego atomami i cząsteczkami i — bezpośrednio lub pośrednio — wywołują ich jonizację. Mechanizmy procesów prowadzących do jonizacji ośrodka są złożone, a w szczególności zależą między innymi od struktury chemicznej ośrodka. Promieniowanie jonizujące, przechodząc przez tkankę żywego organizmu i wywołując procesy jonizacji, staje się dla tkanki czynnikiem niszczącym. Takie działanie promieniowania jonizującego czyni je sprzymierzeńcem lekarza onkologa, który — stwierdziwszy u pacjenta obecność nowotworu — dąży do usunięcia lub zniszczenia tkanki nowotworowej.

Wiązka promieniowania jonizującego, stosowanego w terapii nowotworów, musi mieć w każdym konkretnym przypadku starannie dobrane wszystkie parametry: energię, natężenie, rozmiary i kierunek. Dobór tych parametrów stanowi wynik stosowania tzw. strategii terapii, w której zakres wchodzi jeszcze jeden, bardzo ważny element, a mianowicie ochrona przed napromienianiem zdrowych tkanek, znajdujących się w sąsiedztwie tkanki nowotworowej. Stosowane od dawna w terapii nowotworów promieniowanie elektromagnetyczne (X , γ), a nawet rozpowszechnione w ostatnich latach wiązki elektronów przyspieszanych w betatronach i akceleratorach liniowych oraz neutronów produkowanych w reaktorach ulegają osłabieniu przy przejściu przez ośrodek materialny — według prawa wykładniczego (rys. 1). Napromienianiu tkanki nowotworowej towarzyszy zatem nieuchronnie napromienianie tkanki zdrowej, znajdującej się dalej na drodze wiązki.

Cieęższe cząstki naładowane, takie jak mezony π , protony czy cząstki α , można stosować w terapii, dzięki temu, że cząstki te przy przejściu przez ośrodek osiągają w nim pewną określoną głębokość (zasięg), zależną dla danego ośrodka tylko od energii i rodzaju cząstki (rys. 2). Własność ta gwarantuje niemal pełne zabezpieczenie tkanek zdrowych znajdujących się poza nowotworem na drodze wiązki.

Niestety, nieliczne szpitale zajmujące się terapią nowotworów mają dostęp do odpowiednich dla tego celu wiązek cząstek rozpędzanych w akceleratorach. Dla przykładu warto podać, że protony o zasięgu ok. 10 cm w ośrodku tkankopodobnym muszą mieć energię równą prawie 200 MeV. Wiązki protonów o takiej energii stosowane są w terapii nowotworów w niewielu tylko ośrodkach, np. w Szwecji (Uppsala), w ZSRR (Dubna, Zjedn. Instytuty Badań Jądr.) i w Wielkiej Brytanii (Glasgow). Projekty zastosowania w terapii onkologicznej mezonów π oraz cząstek α o energiach rzędu GeV są obecnie żywo dyskutowane.

W zagadnieniach tych widzimy kolejny przykład pozornie nieoczekiwanej możliwości praktycznych zastosowań aparatury i wiedzy rozwijanej w badaniach podstawowych z dziedziny fizyki wysokich energii i cząstek elementarnych.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 46. Na kulistej planecie lądują trzy rakiety. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylądują one na jednej półkuli, tzn. że będzie istnieć koło wielkie, nie rozdzielające tych punktów. Rozwiązanie na str. 15

M 47. Rozwiązać układ równań $\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x+1}} = 2\right) \wedge \left(\sqrt{\frac{x+1}{y+2}} - \sqrt{\frac{y+2}{x+1}} = \frac{3}{2}\right)$.

Rozwiązanie na str. 11

M 48. Udowodnić, że $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^m}} dx$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi.

Rozwiązanie na str. 12

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 16. Obok zamieszczamy zdjęcie z wodorowej komory pęcherzykowej, na którym w zderzeniu wysokoenergetycznego pionu o pędzie 200 GeV/c ze spoczywającym protonem wyprodukowanych zostało aż 16 naładowanych cząstek. Policzyć jaka maksymalna liczba cząstek może powstać w opisanych oddziaływaniach πp , jeżeli założymy, że wśród produkowanych cząstek znajduje się zawsze jeden nukleon, a pozostałe są pionami o ładunkach różnych znaków. Masy spoczynkowe pionu i nukleonu przyjmijcie za równe odpowiednio: 140 MeV/c² i 940 MeV/c². Zastanówcie się również jaki musi być najmniejszy pęd padającego pionu, aby mógł w zderzeniu ze spoczywającym protonem wyprodukować chociaż jeden dodatkowy pion.

Rozwiązanie na str. 6