Mało przekątnych – duży problem

*Jerzy BEDNARCZUK**

Ile przekątnych może mieć wielościan wypukły?

Może ich nie mieć wcale. Na przykład ostrosłup nie ma przekątnych. Jeśli natomiast do jednej ściany bocznej ostrosłupa $(n+2)$-kątnego tak dokleimy czworościan, aby otrzymany wielościan był wypukły i miał $n+5$ ścian, to ten wielościan będzie miał n przekątnych. Tak możemy w szczególności otrzymać wielościan z jedną przekątną oraz wielościan z dwiema przekątnymi.

Czy istnieją inne wielościany wypukłe z jedną przekątną? A z dwiema przekątnymi?

Wiemy, że istnieją co najmniej 3 wielościany wypukłe z jedną przekątną oraz co najmniej 8 wielościanów z dwiema przekątnymi. Poniżej podajemy ich opis. Wszystkie prezentowane wielościany otrzymujemy z graniastosłupa trójkątnego po odcięciu od niego jednego lub dwóch czworościanów.

Prawdopodobnie są to już wszystkie takie wielościany. Nie znamy dowodu, że nie ma ich więcej.

Podanie opisu wszystkich wielościanów z jedną i wszystkich wielościanów z dwiema przekątnymi wraz z dowodem, że to są rzeczywiście wszystkie takie wielościany, mogłoby być treścią ciekawej pracy, godnej zgłoszenia na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki, którego 46. edycja zapowiadana jest na tylnej okładce niniejszego wydania *Delty*.

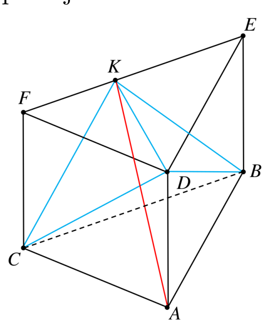
* Redaktor *Delty* w roku 1974, pełniący wówczas funkcję zastępcy redaktora naczelnego.

Delta, kwiecień 2013

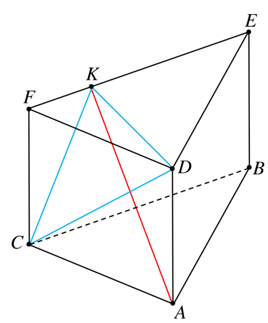
Wielościany wypukłe z jedną przekątną

Przykład 1
Od graniastosłupa trójkątnego odcinamy czworościany $CDKF$ i $BDKE$. Przekątna to AK.

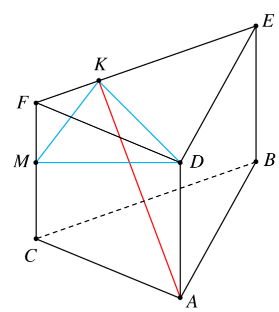
Uwaga: Na wielościan ten można także patrzeć jak na dwa czworościany, $BCDA$ i $BCDK$, o wspólnej ścianie BCD.



Przykład 2
Od graniastosłupa trójkątnego odcinamy czworościan $CDKF$. Przekątna to AK.



Przykład 3
Od graniastosłupa trójkątnego odcinamy czworościan $MDKF$. Przekątna to AK.



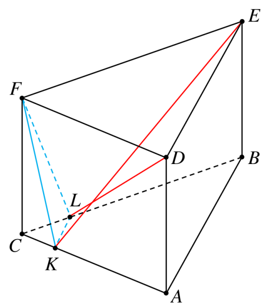
Przyjmujemy oznaczenia:
k: liczba krawędzi wielościanu,
w: liczba wierzchołków,
w_n: liczba wierzchołków, w których schodzi się n krawędzi,
s: liczba ścian,
s_n: liczba ścian n-kątnych.

Zestawienie parametrów trzech wielościanów wypukłych z jedną przekątną.

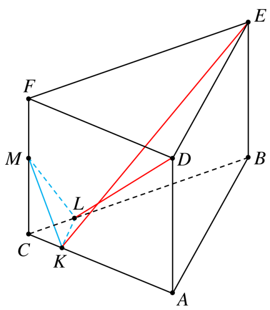
przykład	$\boldsymbol{w}$	w_3	w_4	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{s}$	s_3	s_4	s_5
1	**5**	2	3	**9**	**6**	6		
2	**6**	4	2	**10**	**6**	4	2	
3	**7**	6	1	**11**	**6**	3	2	1
?								

Wielościany wypukłe z dwiema przekątnymi

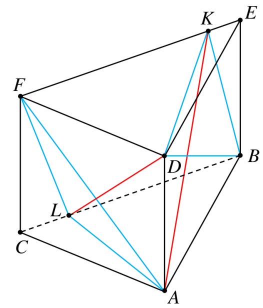
Przykład 4
Od graniastosłupa trójkątnego odcinamy czworościan $CKLF$. Przekątne to KE i LD.



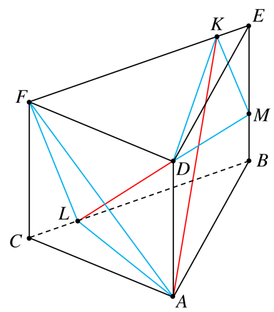
Przykład 5
Od graniastosłupa trójkątnego odcinamy czworościan $CKLM$. Przekątne to KE i LD.



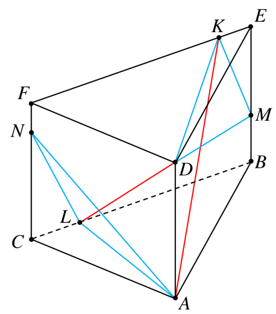
Przykład 6
Od graniastosłupa trójkątnego odcinamy czworościany $CALF$ i $DBEK$. Przekątne to KA i LD.



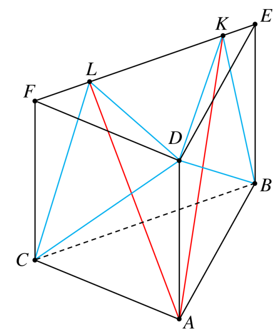
Przykład 7
Od graniastosłupa trójkątnego odcinamy czworościany $CALF$ i $DMEK$. Przekątne to KA i LD.



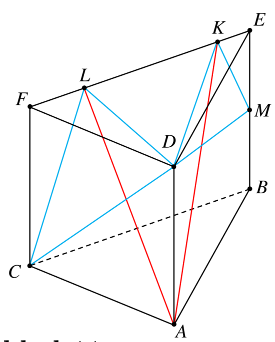
Przykład 8
Od graniastosłupa trójkątnego odcinamy czworościany $CALN$ i $DMEK$. Przekątne to KA i LD.



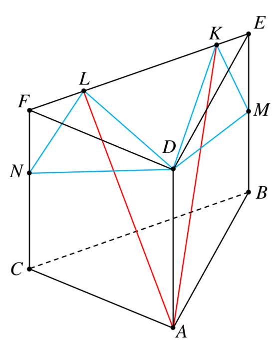
Przykład 9
Od graniastosłupa trójkątnego odcinamy czworościany $CDLF$ i $DBEK$. Przekątne to KA i LA.



Przykład 10
Od graniastosłupa trójkątnego odcinamy czworościany $CDLF$ i $DMEK$. Przekątne to KA i LA.



Przykład 11
Od graniastosłupa trójkątnego odcinamy czworościany $NDLF$ i $DMEK$. Przekątne to KA i LA.



Poniżej zestawienie parametrów ośmiu wielościanów wypukłych z dwiema przekątnymi.

Typ X to taki wielościan, że dwie jego przekątne nie mają wspólnego wierzchołka, typ V to taki wielościan, że dwie jego przekątne mają wspólny wierzchołek.

przykład	$\boldsymbol{w}$	w_3	w_4	w_5	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{s}$	s_3	s_4	s_5	s_6	typ
4	**7**	6	1		**11**	**6**	2	4			X
5	**8**	8			**12**	**6**	2	2	2		X
6	**6**	2	4		**11**	**7**	6	1			X
7	**7**	4	3		**12**	**7**	5	1	1		X
8	**8**	6	2		**13**	**7**	4	2		1	X
9	**6**	3	2	1	**11**	**7**	6	1			V
10	**7**	5	1	1	**12**	**7**	5	1	1		V
11	**8**	7		1	**13**	**7**	4	2		1	V
?											