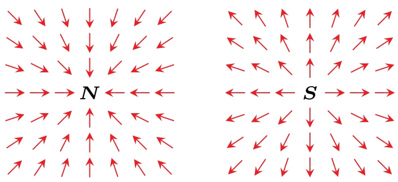
Twierdzenie Białynickiego-Biruli o rozkładzie

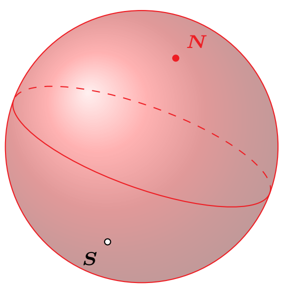
Maria DONTEN-BURY, Joachim JELISIEJEW*, Jarosław A. WIŚNIEWSKI**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Maria Donten-Bury była redaktorką *Delty* w latach 2009–2014.

Wyprawa na biegun północny. Wyobraźmy sobie podróżników na powierzchni Ziemi wyposażonych w kompasy wskazujące północ (przyjmijmy, że północ magnetyczna i geograficzna to to samo i że nie ma żadnych lokalnych anomalii). Wskazania kompasów w okolicach biegunów północnego N i południowego S pokazują rysunki na marginesie. Każdy z podróżników chce dotrzeć na biegun północny. Jeśli podróżnik nie znajduje się akurat na biegunie, to wie, co ma robić: wędruje wzdłuż południka, na którym się znajduje, zgodnie ze wskazaniem kompasu. Ale na biegunie kompas jest bezużyteczny, bo nie pokazuje jednego kierunku – bieguny są punktami krytycznymi dla zadania podróżnika. Mimo to podróżnik będący na biegunie północnym umie poradzić sobie z zadaniem: po prostu stoi w miejscu.



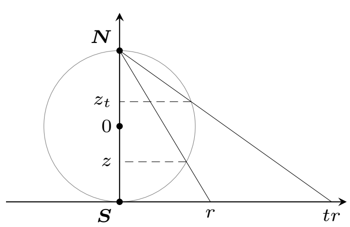


W ten sposób zadanie dotarcia do bieguna i sam proces podróży dają nam podział powierzchni Ziemi (którą matematyk widzi jako sferę) na części, nazywane komórkami. Jedna to prawie cała sfera wraz z punktem N, druga jest jednopunktowa i składa się z bieguna S. Zauważmy, że komórki są w pewnym sensie prostsze niż wyjściowa sfera: ta większa komórka to właściwie płaszczyzna, tylko trochę wygięta.

Twierdzenie o rozkładzie. Powyższy przykład wygląda na łatwy, ale Czytelnik może sobie wyobrazić, że jeśli zamiast sfery próbujemy podzielić na proste kawałki przestrzeń o mniej oczywistej strukturze, to problem robi się znacznie ciekawszy. Dla pewnej klasy przestrzeni rozwiązaniem jest *twierdzenie Andrzeja Szczepana Białynickiego-Biruli o rozkładzie*, które można wypowiedzieć jednym zdaniem:

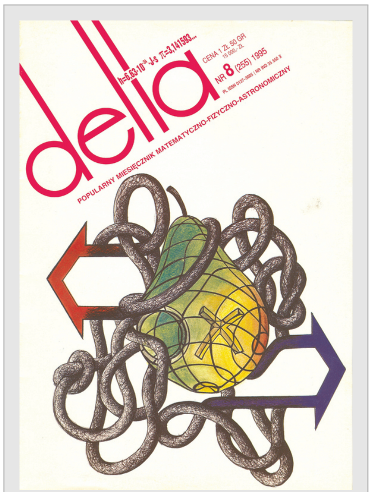
> *Jeśli pogrupujemy punkty rozmaitości X względem granic przy działaniu grupy $\mathbb{K}^*$, to otrzymamy zaskakująco ładne i mniej skomplikowane podrozmaitości.*

To, że X jest *rozmaitością*, znaczy, że w bliskiej okolicy każdego swojego punktu przypomina zwykłą przestrzeń euklidesową: prostą, płaszczyznę, przestrzeń trójwymiarową… być może trochę zakrzywioną. Taką strukturę mają na przykład okrąg, sfera, powierzchnia torusa, ale też bardziej skomplikowane formy, jak przestrzeń rzutowa (o której za chwilę).



Oprócz rozmaitości mamy *grupę*, czyli zbiór elementów, na których możemy wykonywać pewne działanie oraz je odwracać. Na przykład grupę $\mathbb{R}^*$ niezerowych liczb rzeczywistych, które da się mnożyć i dzielić. Taka grupa *działa* na pewnej rozmaitości, jeśli każdy jej element coś robi z punktami rozmaitości, jakoś je przestawia. Co więcej, te przestawienia mają być zgodne z mnożeniem w grupie, ale tu nie będziemy potrzebowali tego dokładnie wyjaśnić.

Spróbujmy w tym języku opowiedzieć o wyprawie na biegun północny. Jak zwykle, zamiast o powierzchni Ziemi myślimy o sferze S^2 zanurzonej w trójwymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Opiszmy tę sferę równaniem $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Działa na niej grupa $\mathbb{R}^*$ w następujący sposób. Trzecią współrzędną punktu na sferze możemy zapisać jako $z = \frac{r^2-4}{r^2+4}$ dla pewnego $r \in \mathbb{R}$. Wtedy liczbie $t \in \mathbb{R}^*$ przypiszemy przekształcenie S^2, które przesuwa punkt wzdłuż południka do punktu o trzeciej współrzędnej $z_t = \frac{t^2r^2-4}{t^2r^2+4}$. Skąd te wzory? Pochodzą od mnożenia przez liczby z $\mathbb{R}^*$, jeśli najpierw rozprostujemy południk przekształceniem odwrotnym do rzutu stereograficznego. Geometryczny charakter przedstawionych zależności prezentuje rysunek na marginesie.



Delta, sierpień 1995

Oczywiście współrzędne x i y też się zmienią – w taki sposób, żeby podróżnik został na tej samej długości geograficznej – ale nie potrzebujemy znać dokładnie ich nowych wartości. Zauważmy jeszcze, że bieguny moglibyśmy (niezbyt ściśle) opisać, w miejsce r wstawiając 0 oraz ∞.

Twierdzenie o rozkładzie mówi o grupowaniu punktów S^2 względem *granic* przy działaniu $\mathbb{R}^*$. Możemy zapisać $z_t = \frac{r^2-4/t^2}{r^2+4/t^2}$, skąd widać, że dla każdego $r \neq 0$ (czyli $z \neq -1$) jeśli t dąży do ∞, to z_t dąży do 1. A jedyny punkt na sferze, w którym $z = 1$, to biegun N. Wobec tego grupowanie punktów S^2 względem granic przy badanym działaniu wyodrębnia, jak przewidzieliśmy, dużą komórkę złożoną z całej sfery oprócz bieguna S, dla której granicą jest biegun N. Druga komórka jest jednopunktowa, złożona z bieguna S, który jest swoją własną granicą przy działaniu $\mathbb{R}^*$, czyli tak zwanym *punktem stałym*.

Rozwiązanie zadania F 1085.
Zacznijmy od przypomnienia skal energii. Energia wiązań chemicznych to co najwyżej około 10 eV – wiązanie cząsteczki N_2 o energii 9,79 eV należy do najsilniejszych. Energia wiązania elektronów wewnętrznych powłok atomowych lekkich pierwiastków sięga pojedynczych kiloelektronowoltów (1362 eV dla neonu). Oznacza to, że azot ogrzany do temperatury $T = 5000\ \mathrm{eV}/k \approx 5{,}8 \cdot 10^7$ K jest mieszaniną jonów azotu N^{7+} i elektronów e^- w liczbie 7 razy większej niż liczba jonów azotu, a średnia energia kinetyczna każdego z jonów i elektronów wynosi 2000 eV. Z każdego mola azotu cząsteczkowego o masie $m = 2 \cdot 14\ \mathrm{g} = 28$ g powstaje 16 moli mieszaniny gazów jednocząstkowych. Wartość ciepła właściwego w stałej objętości na jednostkę masy tej mieszaniny wynosi:

$$c_v = \frac{3}{2} 16R/m.$$

W powyższym wzorze $R \approx 8{,}314$ J/(mol·K) oznacza stałą gazową. Liczbowo: $c_v \approx 7{,}13$ J/(g·K) i jest około 1,7 raza większe od ciepła właściwego ciekłej wody. Podana temperatura 5000 eV/k to około połowy temperatury w pobliżu centrum wybuchu jądrowego.

Granice, których... brakuje. Jak widać, granice przy działaniu grupy są kluczowym elementem twierdzenia o rozkładzie. W powyższym przykładzie mieliśmy szczęście, i udało nam się je dość łatwo obliczyć. Spójrzmy teraz na sytuację, która pomoże nam lepiej zdefiniować granice przy działaniu grupy w ogólnym przypadku.

Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i określmy działanie $\mathbb{R}^*$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ wzorem

(1) $$t \circ (x, y) := (t^{-1}x, ty),$$

gdzie $t \in \mathbb{R}^*$. Jaka jest granica punktu (x, y) przy tak określonym działaniu? Jeśli $y = 0$, to sprawa jest prosta:

$$\lim_{t\to\infty} t \circ (x, y) = \lim_{t\to\infty} (t^{-1}x, ty) = \lim_{t\to\infty} (t^{-1}x, 0) = (0, 0).$$

Ale jeśli $y \neq 0$, to ta granica nie istnieje na płaszczyźnie... Fakt, że czasem tak się dzieje, jest irytujący. Mamy kłopot, ponieważ użyliśmy płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, której brakuje „punktów w nieskończoności". Problem ten odczuwało już wielu matematyków i istnieje standardowe lekarstwo: zamiast płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ powinniśmy rozważyć *płaszczyznę rzutową*.

Płaszczyzna rzutowa to wersja płaszczyzny z „wbudowaną nieskończonością". W *Delcie* o niej nie raz już była mowa – po krótki opis można sięgnąć do Δ^4_{19}, ale lepiej poznać ją z różnych punktów widzenia w Δ^5_{13}. Tutaj zdefiniujemy ją jako zbiór punktów $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ (tak!), gdzie utożsamiamy punkty (x_0, y_0, z_0) oraz (x_1, y_1, z_1), jeśli są proporcjonalne, czyli istnieje taka liczba $\lambda \in \mathbb{R}^*$, że $x_1 = \lambda x_0$, $y_1 = \lambda y_0$, $z_1 = \lambda z_0$. Klasę tak utożsamionych punktów oznaczamy przez $(x_0 : y_0 : z_0)$, a zbiór wszystkich tych klas to właśnie płaszczyzna rzutowa, oznaczana jako $\mathbb{RP}^2$. Dodajmy, że z przedstawionej definicji wynika, iż $(x_0 : y_0 : z_0) = (\lambda x_0 : \lambda y_0 : \lambda z_0)$ dla każdej niezerowej liczby λ.

Definicję na klasach punktów można ująć w zgrabnej formie:

$$\mathbb{RP}^2 := (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})/\mathbb{R}^*.$$

Z tej definicji nie widać jednak zupełnie, dlaczego $\mathbb{RP}^2$ nazywa się *płaszczyzną* rzutową. Otóż w każdej klasie $(x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{RP}^2$, gdzie $z_0 \neq 0$, jest dokładnie jeden punkt z ostatnią współrzędną równą 1 – to $(x_0/z_0, y_0/z_0, 1)$. Możemy więc utożsamić zbiór

$$U := \{(x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{RP}^2 \mid z_0 \neq 0\}$$

ze zbiorem $\mathbb{R}^2$, gdzie punktowi $(x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{RP}^2$ odpowiada $(x_0/z_0, y_0/z_0) \in \mathbb{R}^2$. Pozostałe punkty $\mathbb{RP}^2$, te postaci $(x_0 : y_0 : 0)$, uważamy za dodane do płaszczyzny U *punkty w nieskończoności*.

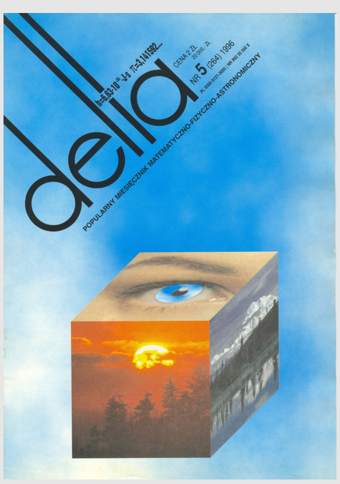
Wracając do naszego przykładu, możemy zdefiniować działanie $\mathbb{R}^*$ na $\mathbb{RP}^2$ poprzez $t \circ (x : y : z) = (t^{-1}x : ty : z)$. Jeśli popatrzymy na U, to $t \circ (x : y : 1) = (t^{-1}x : ty : 1)$, co dokładnie zgadza się ze wzorem (1), którym powyżej definiowaliśmy działanie na $\mathbb{R}^2$. Teraz wreszcie możemy znaleźć granicę dowolnego punktu przy tak ustalonym działaniu. Mianowicie, jeśli weźmiemy $(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2$, gdzie $y \neq 0$, to

$$\lim_{t\to\infty} t \circ (x : y : z) = \lim_{t\to\infty} (t^{-1}x : ty : z) = \lim_{t\to\infty} (t^{-1} \cdot t^{-1} \cdot x : t^{-1} \cdot ty : t^{-1}z) = \lim_{t\to\infty} (t^{-2}x : y : t^{-1}z) = (0 : y : 0) = (0 : 1 : 0).$$

Prościej można obliczyć granicę punktu $(x : 0 : z) \in \mathbb{RP}^2$, gdzie $z \neq 0$:

$$\lim_{t\to\infty} t \circ (x : 0 : z) = \lim_{t\to\infty} (t^{-1}x : 0 : z) = (0 : 0 : z) = (0 : 0 : 1).$$

Ostatni nierozważony jeszcze punkt $\mathbb{RP}^2$ to $(1 : 0 : 0)$. Ale w tym przypadku $t \circ (1 : 0 : 0) = (t^{-1} : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$, czyli mamy punkt stały działania.



Delta, maj 1996

Rozwiązanie zadania M 1767. Zauważmy, że

$$(m+1)\Big(m(4m+3)^2+1\Big) = \\ = \Big((m+1)(4m+1)\Big)^2,$$

wobec tego para $(m, m(4m+3)^2)$ spełnia warunki zadania.

Jak wobec tego wygląda pogrupowanie punktów względem granic przy działaniu $\mathbb{R}^*$? Zbiór punktów takich, że $y \neq 0$, których granicą jest $(0:1:0)$, można utożsamić z płaszczyzną $\mathbb{R}^2$ (podobnie jak powyżej punkty, dla których $z \neq 0$). Zbiór punktów takich, że $y = 0$, ale $z \neq 0$, dla których granicą jest $(0:0:1)$, utożsamia się z prostą $\mathbb{R}$. Ostatni zbiór składa się z punktu $(1:0:0)$. Otrzymaliśmy więc podział płaszczyzny rzutowej na bardzo ładne części – ładne w tym przypadku oznacza, że można je utożsamić z $\mathbb{R}^n$ dla pewnego n, zależnego od granicy.

Tytułowe twierdzenie, które wreszcie możemy dokładnie sformułować, mówi, że to samo będzie się działo dla każdego (algebraicznego) działania na każdej gładkiej podrozmaitości w każdej przestrzeni rzutowej (nie tylko na płaszczyźnie). Teraz zamiast $\mathbb{R}$ będziemy dla większej ogólności pisać $\mathbb{K}$, bo twierdzenie działa nie tylko dla ciała liczb rzeczywistych. Ustalmy też *różne* liczby całkowite $a_0, \ldots, a_n$ i zdefiniujmy działanie $\mathbb{K}^*$ na $\mathbb{KP}^n$ wzorem

Co by było, gdyby te liczby nie były różne?

$$t \circ (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = (t^{a_0}x_0 : t^{a_1}x_1 : \ldots : t^{a_n}x_n).$$

Zbiór punktów o ustalonej granicy p nazywamy *(ujemną) komórką Białynickiego-Biruli* stowarzyszoną z p.

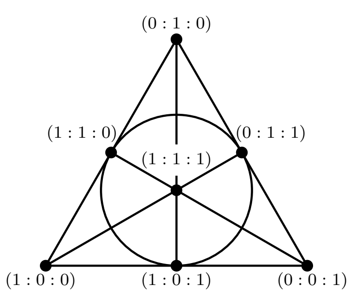
Istnieją też dodatnie komórki zdefiniowane podobnie, ale gdy granicę bierze się przy $t \to 0$.

Twierdzenie (ASBB, 1973). *Niech $X \subseteq \mathbb{KP}^n$ będzie gładką podrozmaitością taką, że $\mathbb{K}^* \circ X \subseteq X$, czyli działanie nie wyprowadza punktów X poza X. Wtedy każda komórka Białynickiego-Biruli w X jest izomorficzna z przestrzenią liniową $\mathbb{K}^{n_i}$ dla pewnego $n_i \in \mathbb{N}$ zależnego od komórki.*

Inne ciała. Jak wspomnieliśmy powyżej, nie korzystamy z żadnych szczególnych własności ciała liczb rzeczywistych. Analiza przykładu przebiegałaby właściwie tak samo, gdyby za $\mathbb{R}$ wszędzie podstawić $\mathbb{Q}$. Ba, ten argument działa nawet, jeśli zamiast $\mathbb{R}$ wybierzemy ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ lub ciało $\mathbb{Z}_p$, które ma p elementów, dla liczby pierwszej p. Musimy jedynie zachować konwencję, że $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-n}x$ jest równe zero dla każdego naturalnego $n > 0$ i każdego x z $\mathbb{C}$ czy $\mathbb{Z}_p$. To wiedzie do paradoksalnego, ale słusznego wniosku, że używane powyżej pojęcie granicy nie wymaga żadnej „ciągłości”! Przykładowo, Czytelnik może obliczyć, że $\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$ składa się jedynie z siedmiu punktów:

$$(0:0:1),\ (0:1:1),\ (1:0:1),\ (1:1:1),\ (1:0:0),\ (0:1:0),\ (1:1:0),$$

a mimo to równość $\lim\limits_{t\to\infty} t \circ (1:1:1) = (0:1:0)$ dla działania z naszego przykładu nadal zachodzi.



Ilustracja płaszczyzny rzutowej $\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$

Gładkość. Komórki Białynickiego-Biruli można też zdefiniować w ogólniejszym przypadku, bez zakładania gładkości. Ustalmy tylko $X \subseteq \mathbb{KP}^n$ spełniający $\mathbb{K}^* \circ X \subseteq X$. Wtedy definiujemy X^+ jako zbiór wszystkich $\mathbb{K}^*$-niezmienniczych odwzorowań z $\mathbb{K}$ do X. Nie jest jasne, dlaczego na tak określonym zbiorze da się zbudować strukturę przestrzeni. Dopiero W. Drinfeld w roku 2013 dowiódł, że to możliwe. Przestrzeń ta okazała się bardzo użyteczna w badaniu przypadku odległego od gładkiego – w tzw. przestrzeniach moduli. Ale to już temat na inny artykuł.

Zakończenie. Chcielibyśmy zakończyć niniejszy artykuł fragmentem odpowiedzi Andrzeja Szczepana Białynickiego-Biruli na pytanie o pożytki z powszechnego nauczania matematyki, będące częścią przeprowadzonej przez *Deltę* ankiety (Δ^{10}_{95}):

Andrzej Szczepan Białynicki-Birula zmarł w 2021 r. Od 2022 r. działa Fundacja Jego imienia, wspierająca studentów matematyki i informatyki UW z Białorusi i Ukrainy: www.mimuw.edu.pl/~fundacja_asbb

(...) roli matematyki nie można sprowadzać do znajomości wzorów i faktów. Sądzę, że ważna jest szkoła myślenia, którą daje matematyka każdemu, pewna dyscyplina formułowania i wypowiadania poglądów i argumentów. Brak takiej dyscypliny może bardzo w życiu przeszkadzać.

Na trzech stronach tego artykułu przebyliśmy dość daleką drogę – od wprowadzającego przykładu o podróżnikach na sferze do analizy bardzo abstrakcyjnych struktur. Mamy nadzieję, że lektura była dla Czytelników dobrym treningiem wspomnianego wyżej matematycznego myślenia.