Samotność i liczby

*Mirosław LACHOWICZ**

* Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Fizyk Paolo Giordano (urodzony w 1982 r. w Turynie) w I dekadzie XXI wieku przygotowywał się spokojnie do obrony swojego doktoratu na Uniwersytecie w Turynie. Doktorat dotyczył fizyki cząstek, a dokładniej kwarków b (zwanych w literaturze popularnej kwarkami pięknymi). Doktorat został pomyślnie zakończony obroną w roku 2010.

W roku 2008 nasz fizyk opublikował książkę pod tytułem *Samotność liczb pierwszych* (polskie tłumaczenie: Wydawnictwo W.A.B., 2010).

Książka nie wydaje się bezpośrednio mieć wiele wspólnego z liczbami pierwszymi, o których mówi się tu tylko na jednej stronie. Niemniej analogia losu dwojga ludzi do liczb pierwszych może być twórcza. Zdaniem Magdaleny Mai Śliwińskiej („italianistki, miłośniczki filozofii, lasu, jaszczurek i świetlików", Lente–Magazyn) *świat liczb stanowi klucz do zrozumienia* tej *jednej z bardziej oryginalnych pozycji włoskiej literatury popularnej ostatnich lat*. Książka opisuje losy dwojga osób, Alice (Alicji) Della Rocca i Mattii (Macieja) Balossino, ciągnących za sobą bagaż doświadczeń. Alice zostaje fotografką, a Mattia matematykiem – zajmował się funkcją ζ Riemanna. Wydaje się, że powinni być sobie bliscy, jednakże ich losy powodują utrzymywanie dystansu, oddzielenia. Jak liczby pierwsze? Mattia jest wycofany i niezdolny do urzeczywistnienia swojego uczucia, Alice jest silniejsza i zdolna do przezwyciężenia przeszłości.

Giordano uważa, że historia Alice i Mattii jest bardzo intymna. Jest w niej sporo użalania się nad sobą. Nie wydaje mu się jednak, że dodanie nowych elementów, jak odniesienia do matematyki, mogłoby osłabić tę atmosferę. Pomysł nawiązania do matematyki był potrzebny autorowi do użycia innego języka od literackiego. Dla Giordana – fizyka, przypominam – matematyka jest językiem, może więc być użyta do opowiedzenia czegoś. Tutaj, jak rozumiem, zastosowana jako rodzaj metafory uzupełniającej właściwą opowieść. Zdaniem autora książki oparcie opowieści na innym języku niż literacki jest interesujące: tworzy nieoczekiwane efekty (z wywiadu udzielonego w 2008 r.).

Książka spotkała się z entuzjastycznym przyjęciem we Włoszech, a także w USA. Autor w wieku 26 lat (2008 r.) otrzymał prestiżową włoską nagrodę literacką *il Premio Strega*, zostając najmłodszym laureatem tej nagrody. Słowo *strega* oznacza czarownicę, ale tutaj odnosi się do firmy Liquore Strega produkującej mocne (jak na zwyczaje włoskie) likiery. Książkę uznano za wspaniały pokaz stylu literackiego.

Można zadać pytanie, czy na entuzjastyczny odbiór książki nie wpłynął częściowo tytuł pochodzący bezpośrednio z matematyki. Czy to nie jest tak, że czytelnik poszukuje (podświadomie?) jedności tak odległych sposobów myślenia, jak refleksja nad losem człowieka i matematyka? Czyli że jedność jest „towarem poszukiwanym"? Czyli że nie wszystko stracone? Może Ludzkości się uda? Więcej pytań niż odpowiedzi!

Dla zachowania prawdy historycznej należy jednak nadmienić, że autor początkowo proponował tytuł *Wewnątrz i na zewnątrz wody* (Dentro e fuori dall'acqua). Oj, chyba nie zaszedłby za daleko z takim tytułem. Ciekawe, jak by zadziałał tytuł *Samotność kwarków pięknych*. Kwarki te występują tylko w cząstkach wytwarzanych sztucznie, a więc jakimś rodzajem samotności się charakteryzują.

Na podstawie książki w roku 2010 został nakręcony film w reżyserii Saveria Costanza. Chyba jednak film nie osiągnął poziomu książki.

Czy liczby pierwsze mogą być samotne? Oczywiście są wytworem ludzkiego umysłu. Dzielą więc z nami kalki z ewolucji naszych umysłów. Klasyczna definicja liczb pierwszych (tu z Wikipedii) to: „liczba pierwsza jest liczbą naturalną większą od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki naturalne: jedynkę i siebie samą". Przy tej definicji 0 i 1 nie byłyby liczbami pierwszymi, natomiast 2, 3, 5 i na przykład 17 już tak. Pierwsze pytanie, jakie narzuca się w związku z liczbami pierwszymi, to jak dużo ich jest. Odpowiedź znana jest już od dawna. Euklides (ok. 365 p.n.e. – ok. 270 p.n.e.) w Księdze IX *Elementów* udowodnił stwierdzenie 20, które mówi (w sformułowaniu bliskim sformułowania Euklidesa), że liczb pierwszych jest więcej niż elementów jakiegokolwiek skończonego zbioru liczb pierwszych (*Liczb pierwszych jest więcej, niż jakiekolwiek dane ich mnóstwo*; dziękuję panu Krzysztofowi Maślance za wskazówki).

Argument Euklidesa jest następujący. Załóżmy, że dany jest skończony zbiór liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Rozważmy ich iloczyn:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m.$$

Wówczas żadna z liczb $p_1, \ldots p_m$ nie może być dzielnikiem liczby $p+1$, bo z dzielenia otrzymalibyśmy resztę 1. Z drugiej strony, liczba $p+1$ ma jakiś dzielnik pierwszy, jest więc on szukaną liczbą pierwszą niewymienioną wśród $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

M. Kordos, *Największa liczba pierwsza*, Δ^4_{96}.

K. Gryszka, *Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele*, Δ^{10}_{21}.

W książce M. Aignera i G.M. Zieglera *Proofs from THE BOOK* (Springer, 1998) jest podanych 6 dowodów stwierdzenia Euklidesa, wszystkie oczywiście z KSIĘGI, a więc piękne.

E.S. Loomis, *The Pythagorean Proposition*, NCTM 1968, II wydanie. Książka zawiera 109 dowodów „algebraicznych", 255 dowodów „geometrycznych", 4 dowody „oparte na kwaternionach" i 2 „oparte na dynamice".

Współcześnie najczęściej formułuje się stwierdzenie Euklidesa w postaci „zbiór liczb pierwszych jest nieskończony" (oswoiliśmy się już z nieskończonością) i do dowodu wykorzystuje się *podstawowe twierdzenie arytmetyki* (PTA). Bazę do udowodnienia twierdzenia PTA podał Euklides, ale współczesną wersję udowodnił Carl F. Gauss (1777–1855) w *Disquisitiones Arithmeticae* w 1798 roku. PTA mówi, że każda liczba naturalna większa niż 1 albo jest liczbą pierwszą, albo może być jednoznacznie (czyli w sposób jedyny) przedstawiona jako iloczyn liczb pierwszych. Jednoznaczność należy rozumieć w ten sposób, że kolejność czynników nie jest istotna.

Jest wiele różnych dowodów stwierdzenia Euklidesa o nieskończoności zbioru liczb pierwszych, choć nie wydaje mi się, aby ktoś je zebrał, tak jak Elisha S. Loomis zebrał 370 różnych dowodów twierdzenia Pitagorasa. Tak, aby czytelnik mógł codziennie przez więcej niż rok zapoznawać się z kolejnym dowodem.

Świat liczb pierwszych jest bardzo ciekawy. Przykładowo badane są liczby pierwsze bliźniacze, to znaczy pary liczb pierwszych, których różnica wynosi 2, na przykład 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, a także 1997 i 1999 oraz 2 760 889 966 649 i 2 760 889 966 651. Te dwie ostatnie liczby pojawiają się w książce Giordana.

Zagadnienie, czy istnieje nieskończenie wiele par liczb bliźniaczych, jest dalej otwartym problemem teorii liczb („hipoteza o liczbach pierwszych bliźniaczych"). Jest też mocniejsza hipoteza, zwana „hipotezą Hardy'ego–Littlewooda", dotycząca rozkładu liczb bliźniaczych.

To te liczby tworzą w książce Giordana analogię Mattia i Alice. Są oni osobami w jakiś sposób bliskimi, ale jednak oddzielonymi. *Mattia myślał, że on i Alice byli jak dwie liczby pierwsze bliźniacze, sami i zagubieni, bliscy, ale nie na tyle, by zbliżyć się naprawdę.* Zapewne właściwszym tytułem książki byłby tytuł „Samotność liczb bliźniaczych".

W roku 1919 norweski matematyk Viggo Brun (1882–1978) udowodnił, że szereg odwrotności liczb bliźniaczych jest zbieżny:

$$\mathfrak{b} := \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\ldots < \infty .$$

Zatem niezależnie od tego, czy suma ta zawiera skończenie, czy nieskończenie wiele składników (bo tego, jak już wiemy – nie wiemy), daje stałą $\mathfrak{b}$, zwaną stałą Bruna. Gdyby tak samo potraktować wszystkie liczby naturalne, to odpowiedni szereg (*szereg harmoniczny*) byłby rozbieżny. Można uznać, że wynik Bruna to matematyczne ujęcie „samotności" liczb bliźniaczych. Wszystkie liczby naturalne (a także np. wszystkie liczby parzyste) samotne oczywiście być nie powinny. Leonhard Euler (1707–1783) udowodnił, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $M > 0$ można znaleźć taką liczbę pierwszą p, że suma odwrotności wszystkich liczb pierwszych „do p" jest większa niż M:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{p} > M.$$

W ten sposób otrzymujemy kolejny dowód nieskończoności zbioru liczb pierwszych oraz pewność, że liczby pierwsze nie są samotne (przynajmniej w powyższym sensie).

Liczby pierwsze są źródłem ciekawych rozważań matematycznych, a zbadanie ich rozmieszczenia jest dużym wyzwaniem teoretycznym, o znaczeniu również praktycznym. Na pierwszy rzut oka liczby te są rozmieszczone wśród liczb naturalnych bardzo chaotycznie. Wiemy już, że są pary bardzo dużych liczb pierwszych bliźniaczych, ale nie wiemy, czy tych liczb bliźniaczych jest nieskończenie wiele. Wiemy, że mogą się pojawić bardzo długie sekwencje liczb, w których w ogóle nie ma liczb pierwszych.

Pytanie o rozmieszczenie liczb pierwszych prowadzi do jednego z największych problemów otwartych matematyki, jakim jest hipoteza Riemanna. Jego wagę pokazuje fakt, że znalazł się na liście *23 problemów Hilberta* (jako 8. problem) z 1900 roku – wyzwań matematycznych na XX wiek, na liście *16 problemów Smale'a* z 1998/1999 – wyzwań matematycznych na XXI wiek, oraz na liście 7 tzw. *problemów millenijnych* (jako problem 4.) z dużą nagrodą pieniężną ogłoszoną przez Clay Mathematics Institute. Zabawne byłoby, gdyby hipoteza Riemanna została również umieszczona na liście wyzwań na XXII wiek. Po więcej informacji na ten temat polecam sięgnąć do artykułu K. Maślanki oraz tekstów z *Delty* (M. Szurka w Δ^4_{81} i P. Strzeleckiego w Δ^9_{03}).

K. Maślanka, *Hipoteza Riemanna – refleksje na temat największej zagadki matematyki*, Roczniki Filozoficzne LIII (1), 2005.

R.L. Rivest, A. Shamir, L.M. Adleman, „A method for obtaining digital signatures and public–key cryptosystems", Communications ACM 21 (2).

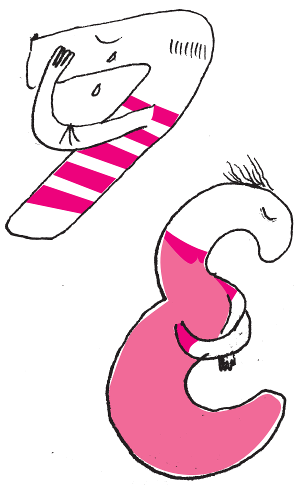
W. Diffie, M.E. Hellman, „New directions in cryptography", IEEE Transactions on Information Theory 22 (6), 1976, 644–654.

E. Goles, O. Schulz, M. Markus, „Prime number selection of cycles in a predator–prey model", Complexity 2001, 3, 33–38.

Wyniki matematyczne dotyczące liczb pierwszych ostatnio nabrały również kluczowego znaczenia w matematyce stosowanej, a w szczególności w kryptografii z kluczem publicznym. W kryptografi wykorzystuje się fakt, że trudno jest rozłożyć bardzo duże liczby, np. iloczyny bardzo dużych liczb pierwszych, na czynniki pierwsze.

Można znaleźć związki pomiędzy liczbami pierwszymi a procesami biologicznymi. E. Goles, O. Schulz i M. Markus sugerują, że pewien rodzaj cykad ma długości cykli lęgowych charakteryzowane liczbami pierwszymi, aby uniemożliwić

M. Loconsole, L. Regolin, „Are prime numbers special?” Insights from the life sciences, Biology Direct, 2022, 17, 11.



drapieżnikom dostosowanie się do tych cykli. Tylko w pewnych fazach cykli istnieje bowiem możliwość ich złapania. Inne przykłady można znaleźć w przeglądowej pracy M. Loconsole i L. Regolina oraz w podanej tam bibliografii.

Czy można uznać, że koncepcje matematyczne mogą mieć coś wspólnego z trudno definiowalnymi odczuciami psychicznymi, jak poczucie samotności? Każda odpowiedź wydaje się niesatysfakcjonująca. Odpowiedź TAK oznaczałaby, że należy ewentualne związki formułować konkretniej, a tego raczej nie jesteśmy w stanie dokonać. Odpowiedź taka byłaby więc dużym uproszczeniem. Odpowiedź NIE oznacza, że świat nam się rozpada na oddzielne, niepowiązane części, co nie wydaje się zgodne z ewolucyjnym dostosowaniem się do życia.

Zatem byłoby to uproszczenie jeszcze gorsze. Odpowiedzi typu „i TAK, i NIE” zostawmy raczej politykom.

Obie skrajne odpowiedzi prowadzą do różnych modeli, a modele rzeczywistości są istotnym i chyba jedynym sposobem jej zrozumienia. Zatem upraszczajmy i starajmy się coś z tego zrozumieć. Może wraz ze zrozumieniem przyjdzie akceptacja?

Zaskakujące i niebanalne zakończenie książki Giordana sugeruje, że w samotności może być siła. Ale to jest tylko jedna z możliwych interpretacji.

Marek Abramowicz: *Między Bogiem a prawdą* – autobiografia „roztargnionego profesora”

Profesor Marek Abramowicz, światowej klasy astrofizyk, autor setek prac naukowych, który w swej bogatej karierze pracował w wielu instytutach i uniwersytetach Europy i Ameryki, ciągle dokładnie pamięta zadanie, które rozwiązywał podczas finału Olimpiady Matematycznej w liceum. Choć od finału minęło kilkadziesiąt lat, ze szczegółami opisuje rozwiązanie, na które wpadł, i emocje, jakie towarzyszyły mu w tamtej chwili.

W swojej książce Marek Abramowicz dzieli się z czytelnikiem wieloma tego typu wspomnieniami przełomowych momentów ze swojego życia, które kształtowały go jako naukowca oraz jako człowieka. Książka nie jest jednak typową autobiografią. Autor, pisząc np. o swoim zachwycie nad pięknem matematyki, przedstawia rozwiązania konkretnych zadań, definicje, twierdzenia i dowody. Opisuje pewne wybrane zagadnienia fizyki i astronomii w sposób bardzo obrazowy i przystępny (swoje popularyzatorskie umiejętności prezentował swego czasu jako autor artykułów w *Delcie*). Na tym wszystkim autor buduje kolejną warstwę swej opowieści, jaką jest prezentacja poglądów religijno-filozoficznych. Marek Abramowicz artykułuje wprost swoje przekonanie, że pewne fakty naukowe wspierają jego wiarę. Dużo miejsca poświęca np. tzw. *zasadzie antropicznej*. Autor stara się zaznaczać, kiedy relacjonuje obiektywne fakty naukowe, a kiedy swoje osobiste religijne przekonania, nie sposób jednak oprzeć się wrażeniu, że fakty, które wybiera do swojej opowieści są starannie wyselekcjonowane pod z góry założoną tezę.

Można się z Markiem Abramowiczem nie zgadzać, ale z pewnością warto poznać jego argumenty i obserwacje, które prowokują do głębszej refleksji. Niewątpliwie wielkim walorem opowieści jest to, jak daleko autor się w niej odsłania, opisując swoje przeżycia, emocje, historie z życia prywatnego, rodzinnego i wreszcie bardzo osobiste poglądy na kwestie religijne, społeczne czy nawet polityczne. Ta otwartość autora i wielowarstwowość jego opowieści sprawia, że jest to książka zdecydowanie nietypowa i intrygująca. „Roztargniony profesor” pozwala prawie że zajrzeć czytelnikowi do swojej głowy, relacjonując, jakie zakręty życiowe pokonywał i jak splot wydarzeń w jego karierze naukowej i życiu prywatnym oraz dyskusje z innymi badaczami kształtowały jego poglądy na kwestie naukowe i metafizyczne, które wyraża w swojej autobiografii.

Szymon CHARZYŃSKI