The Happy End Problem

*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

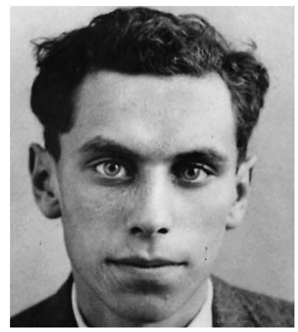
Spotkanie

KöMaL jest skrótem nazwy węgierskiego czasopisma „Középiskolai Matematikai és Fizykai Lapok” wspierającego młodzież zainteresowaną matematyką, fizyką i informatyką. Czasopismo z przerwami istnieje od 1894 roku. Wiosną 1929 roku grupa młodych entuzjastów konkursów *KöMaL* regularnie spotykała się u stóp pomnika Anonymusa w budapesztańskim parku, aby dyskutować o matematyce i rozwiązywać problemy ze zbioru G. Pólyi i G. Szegö „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis” (Springer, Heidelberg, 1925). Początkowo grupę *Anonymus* tworzyli Pál Turán, Márta Wachsberger i Eszter (Esther) Klein. Wkrótce do grupy dołączyli György (George) Szekeres, Miklós Ság, a rok później Pál (Paul) Erdős, Tibor Grünwald (Gallai) i inni.

Współcześnie *Anonymus* może się kojarzyć z grupą aktywistów internetowych, ale stojący w Budapeszcie pomnik poświęcony jest XII-wiecznemu kronikarzowi węgierskiemu, znanemu też jako „Anonim Węgierski”.

Eszter Klein

György Szekeres

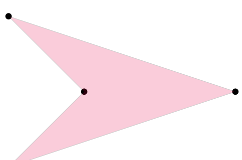


Pál Erdős

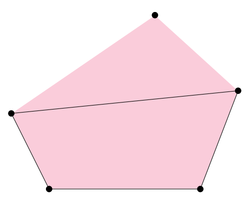
Zimą 1932/33 na spotkaniu grupy *Anonymus* Eszter Klein (studentka fizyki, która właśnie wróciła z semestralnego pobytu na Uniwersytecie w Getyndze) zaprezentowała następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych pięciu (lub więcej) punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, pewne cztery z nich tworzą wielokąt wypukły.*

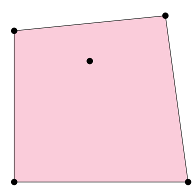
Zbiór na płaszczyźnie jest *wypukły*, gdy wraz z każdą parą swoich punktów zawiera odcinek je łączący. Wypukły jest każdy trójkąt, ale nie każdy czworokąt (rys. 1).



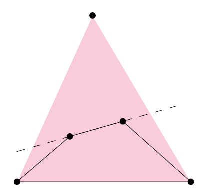
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



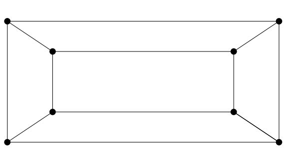
Rys. 4

Uzasadnienie jest następujące. Jeżeli otoczka wypukła zbioru pięciu punktów ma cztery lub pięć wierzchołków (rys. 2, 3), to dowód jest skończony. W przeciwnym wypadku mamy trójkąt zawierający we wnętrzu dwa punkty. Prosta przez nie wyznaczona przecina dwa boki trójkąta (rys. 4), omijając wierzchołki. Punkty tworzące trzeci bok trójkąta z dwoma punktami wewnętrznymi tworzą czworokąt wypukły.

Klein postawiła również poniższe zadanie.

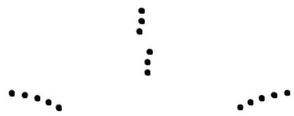
Problem 1. *Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną $N = N(n)$ taką, że wśród dowolnych N punktów na płaszczyźnie, z których żadne 3 nie są współliniowe, pewne n z nich tworzy wielokąt wypukły.*

Częścią problemu jest ustalenie, że dla każdego n liczba $N(n)$ w ogóle istnieje – może dla pewnych n dowolnie wiele punktów na płaszczyźnie nie gwarantuje istnienia n-kąta wypukłego? Odpowiedź wcale nie jest oczywista.



Rys. 5

Wkrótce po postawieniu zadania Endre Makai wykazał, że istnienie pięciokąta wypukłego gwarantuje 9 punktów, i podał kontrprzykład, że 8 punktów nie wystarczy (rys. 5), czyli uzasadnił równość $N(5) = 9$.



Rys. 6

Istnienia sześciokąta wypukłego nie zapewnia 16 punktów (rys. 6), czyli $N(6) > 16$.

Na początku był... Ramsey

Erdős (student piszący doktorat u profesora Lipóta Fejéra) oraz Szekeres (absolwent inżynierii chemicznej), próbując rozszerzyć wynik na wielokąty wypukłe o większej liczbie boków, szybko zdali sobie sprawę, że prosta argumentacja nie wystarczy. Postawili wtedy następującą hipotezę, za udowodnienie której Erdős oferował nagrodę w wysokości 500 $.

Hipoteza 1. $N(n) = 2^{n-2} + 1$ *dla* $n \geqslant 3$.

Po kilku tygodniach Szekeres udowodnił, że „absurdalnie duża liczba punktów" zawsze zapewnia istnienie n-kąta wypukłego – wykorzystał w tym celu *twierdzenie Ramseya*, które za moment przytoczymy. Niezależnie od Szekeresa, Erdős również wykazał, że $N(n)$ istnieje i jest skończone dla każdego n. Zrobił to, nie odwołując się do rezultatu Ramseya, i uzyskał w ten sposób lepsze oszacowanie wartości $N(n)$ niż Szekeres (jednak rozumowanie Szekeresa ma tę zaletę, że może zostać uogólnione na większą liczbę wymiarów). Udowodnili więc oni na dwa różne sposoby następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 (Erdős–Szekeres)**.** *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 3$ *istnieje liczba naturalna* m_0 *taka, że każdy zbiór* $m \geqslant m_0$ *punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, zawiera* n *punktów tworzących wielokąt wypukły.*

Oba dowody można odnaleźć we wspólnej pracy Erdősa i Szekeresa [1], która dała początek kombinatorycznej (dyskretnej) geometrii.

Przytoczmy teraz zapowiadane wcześniej twierdzenie Ramseya i zobaczmy, jak można z niego wyprowadzić twierdzenie Erdősa–Szekeresa.

Twierdzenie Ramseya można także sformułować w wersji nieskończonej (w obu przypadkach zapewnia ono, że w każdym dostatecznie dużym zbiorze pojawi się jakaś regularność).

Twierdzenie Ramseya (przypadek nieskończony). *Dla dowolnych liczb naturalnych* r *i* k*, jeśli wszystkie* r*-elementowe podzbiory nieskończonego zbioru* S *zostały pokolorowane przy użyciu* k *kolorów, to* S *zawiera nieskończony podzbiór* S_∞*, którego wszystkie* r*-elementowe podzbiory są tego samego koloru.*

Twierdzenie Ramseya (przypadek skończony). *Dla dowolnych liczb naturalnych* r*,* n *i* k *istnieje liczba naturalna* $m_0 = R(r, n, k)$ *taka, że jeśli* $m \geqslant m_0$ *i wszystkie* r*-elementowe podzbiory zbioru* m*-elementowego* S_m *zostały pokolorowane przy użyciu* k *kolorów, to* S_m *zawiera podzbiór* n*-elementowy* S_n*, którego wszystkie* r*-elementowe podzbiory są tego samego koloru.*

Liczby $R(r, n, k)$ nazywamy *liczbami Ramseya.* Wyznaczenie ich dokładnej (w sensie: minimalnej) wartości, nawet dla małych parametrów, jest bardzo trudnym problemem obliczeniowym. Więcej na ten temat można przeczytać w artykule T. Bartnickiego *Największa liczba na świecie*, Δ^3_{08}. Możemy teraz przystąpić do pierwszego dowodu twierdzenia Erdősa–Szekeresa.

Dowód 1 (Erdős–Szekeres). Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Zgodnie z twierdzeniem Ramseya w przypadku skończonym (ustalamy $r = 4$ i $k = 2$) istnieje liczba naturalna $m_0 = R(4, n, 2)$ taka, że jeśli $m \geqslant m_0$ i wszystkie 4-elementowe podzbiory zbioru m-elementowego S_m są pokolorowane dwoma kolorami, to zbiór S_m zawiera n-elementowy podzbiór S_n, którego wszystkie 4-elementowe podzbiory są tego samego koloru.

Niech S_m będzie zbiorem $m \geqslant m_0$ punktów płaszczyzny, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. 4-elementowy podzbiór zbioru S_m kolorujemy na czerwono, jeśli tworzy on czworokąt wypukły, a na niebiesko w przeciwnym przypadku. Wówczas zbiór S_m zawiera n-elementowy podzbiór S_n, którego wszystkie 4-elementowe podzbiory mają ten sam kolor. Ten kolor nie może być niebieski, bo w myśl obserwacji Klein każdy zbiór 5 lub więcej punktów zawiera 4-elementowy podzbiór czerwony! Zatem wszystkie 4-elementowe podzbiory zbioru S_n są koloru czerwonego.

Taki zbiór n punktów, w którym każde cztery punkty tworzą czworokąt wypukły, musi być n-kątem wypukłym. Istotnie, gdyby jeden punkt znajdował się we wnętrzu otoczki wypukłej pozostałych $(n-1)$ punktów, to należałby do wnętrza pewnego trójkąta o wierzchołkach wybranych ze zbioru $(n-1)$ punktów, i te 4 punkty tworzyłyby czworokąt niewypukły. Sprzeczność. $\square$

Rozwiązanie zadania F 1084. Wewnątrz powłoki rury przez powierzchnię o promieniu r, $R \leqslant r \leqslant 2R$, na odcinku o długości H przepływa ten sam strumień ciepła. Dla rury z materiału o współczynniku przewodnictwa cieplnego κ mamy więc:

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi r H \kappa \frac{dT}{dr} = \alpha,$$

przy czym α ma wartość stałą, niezależną od r. Otrzymujemy równanie pozwalające znaleźć rozkład temperatury jako funkcji r:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\alpha}{2\pi H r},$$

z warunkami: $T(R) = T_0$ i $T(2R) = T_1$. Jak łatwo sprawdzić, rozwiązaniem tego równania jest:

$$T(r) = T_0 + (T_1 - T_0)\frac{\ln(r/R)}{\ln(2R/R)}.$$

Połowa grubości rury odpowiada $r = 3R/2$. Dla tej wartości r mamy:

$$T(3R/2) = T_0 + (T_1 - T_0)\ln(3/2)/\ln(2) \approx$$
$$\approx T_0 + 0{,}585 \cdot (T_1 - T_0).$$

Powyższy dowód daje ograniczenie górne $N(n) \leqslant R(4, n, 2)$. Michael Tarsi zaobserwował w 2006 roku, że można go poprawić, otrzymując ograniczenie $N(n) \leqslant R(3, n, 2)$.

Dowód 2 (Michael Tarsi). Niech S_m będzie zbiorem $m \geqslant m_0 = R(3, n, 2)$ punktów płaszczyzny, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Numerujemy te punkty liczbami $1, 2, \ldots, m$. Zbiór $\{x, y, z\}$, gdzie $x < y < z$, kolorujemy na czerwono, jeśli poruszamy się od x przez y do z zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a na niebiesko w przeciwnym przypadku. Zgodnie z określeniem m_0 zbiór S_m musi zawierać n-elementowy podzbiór S_n, w którym wszystkie trójelementowe podzbiory mają ten sam kolor, tj. mają tę samą „orientację”, a to oznacza, że punkty zbioru S_n tworzą n-kąt wypukły! $\square$

W kolejnym rozumowaniu Erdős i Szekeres bez odwołania do rezultatu Ramseya uzyskali lepsze oszacowanie wartości $N(n)$. To uzasadnienie jest odrobinę zbyt obszerne, by zmieścić się na łamach tego artykułu, warto jednak przedstawić jeden z kluczowych lematów, który się w tej argumentacji pojawia. Dotyczy on tematu pozornie niezwiązanego, mianowicie: monotonicznych podciągów zadanego ciągu.

Lemat (Erdős–Szekeres). *Jeżeli m, n i s są liczbami naturalnymi takimi, że $s > m \cdot n$ i $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ jest ciągiem różnych liczb rzeczywistych, to zawiera on podciąg rosnący o długości większej niż m lub podciąg malejący długości większej niż n.*

Lemat jest optymalny w tym sensie, że dla każdej pary liczb naturalnych m i n istnieje ciąg $m \cdot n$ różnych liczb rzeczywistych, w którym każdy podciąg rosnący ma długość co najwyżej m i każdy podciąg malejący ma długość co najwyżej n:

$$\begin{pmatrix} n, & n-1, & \cdots, & 1, \\ 2n, & 2n-1, & \cdots, & n+1, \\ \vdots, & \vdots, & \ddots, & \vdots, \\ mn, & mn-1, & \cdots, & (m-1)n+1 \end{pmatrix}.$$

Dowód lematu. Dla każdego j niech m_j (odpowiednio, n_j) oznacza długość najdłuższego podciągu rosnącego (odpowiednio, malejącego) ciągu $\{a_i\}$, który rozpoczyna wyraz a_j. Gdy $j < k$, to pary (m_j, n_j) i (m_k, n_k) są różne, bo jeśli $a_j < a_k$, to $n_j > n_k$, a jeśli $a_j > a_k$, to $m_j > m_k$. Jeżeli dla wszystkich $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $m_j \leqslant m$ i $n_j \leqslant n$, to par (m_j, n_j) jest nie więcej niż $m \cdot n$, a to jest sprzeczne z założeniem $s > m \cdot n$.

Wniosek. *Jeśli $s > n^2$, to zbiór $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ różnych liczb rzeczywistych zawiera podciąg monotoniczny długości $n + 1$.*

Czytając artykuł A. Pełczyńskiego *Trzy rozwiązania zadania o 101 liczbach*, Δ^5_{74}, widzimy, dlaczego P. Erdős nie miałby problemu z rozwiązaniem zadania z XIII Moskiewskiej Olimpiady Matematycznej (1950 r.): „Liczby od 1 do 101 wypisano w dowolnym porządku. Udowodnić, że można z tych 101 liczb wykreślić 90 tak, aby pozostałych 11 utworzyło ciąg monotoniczny, tzn. albo ciąg malejący, albo ciąg rosnący”. W czasie olimpiady udało się to tylko jednemu uczestnikowi.

Zakończenie?

Korzystając z własności istnienia ciągów monotonicznych (szczegóły można znaleźć w pracy [1]), Erdős i Szekeres wykazali, że

$$N(n) \leqslant \binom{2n-4}{n-2} + 1 \approx \frac{4^n}{\sqrt{n}}.$$

Ponadto w 1961 roku w pracy [2] pokazali, że dla każdego $n \geqslant 3$ istnieje konfiguracja 2^{n-2} trójkami niewspółliniowych punktów, w której nie występuje n-kąt wypukły, czyli $N(n) \geqslant 2^{n-2} + 1$. W 2006 roku (już po śmierci George'a) ukazała się praca Szekeresa i Lindsaya Petersa [4] zawierająca wspomagany komputerowo dowód równości $N(6) = 17$, a w 2017 roku Andrew Suk [3] poprawił oszacowanie górne liczby $N(n)$ do $2^{n+o(n)}$. Hipoteza Erdősa i Szekeresa ciągle czeka na rozstrzygnięcie.

Pozostaje wyjaśnić tytuł artykułu. Esther Klein i George Szekeres pobrali się 13 czerwca 1937 roku, co skłoniło Erdősa do nazwania problemu trójki przyjaciół „The Happy End Problem”. Po wybuchu wojny państwo Szekeres wyemigrowali do Australii. Zmarli 28 sierpnia 2005 roku w Adelaide w odstępie godziny.

Biliografia:

[1] P. Erdős, G. Szekeres, *A combinatorical problem in geometry*, Compositio Math. 2 (1935), 463–470.

[2] P. Erdős, G. Szekeres, *On some extremum problem in elementary geometry*, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sek. Mat. 3-4 (1961), 53–62.

[3] A. Suk, *On the Erdős–Szekeres convex polygon problem*, J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), 1047–1053.

[4] G. Szekeres, L. Peters, *Computer solution to the 17-point Erdős–Szekeres problem*, ANZIAM J. 48, no 2 (2006), 151–164.