Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2023

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 857 ($WT = 1{,}39$) i 858 ($WT = 3{,}60$) z numeru 3/2023

Norbert Porwol	Essen	45,16
Paweł Najman	Kraków	43,16
Radosław Kujawa	Wrocław	41,33
Marcin Kasperski	Warszawa	40,29
Michał Adamaszek	Kopenhaga	39,80
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Janusz Fiett	Warszawa	36,16
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olsztyn	35,26
Paweł Kubit	Kraków	34,44
Marek Spychała	Warszawa	31,52

Do matematycznego Klubu 44 dołącza z dalekiej Nadrenii pan Norbert Porwol. Witamy!

Zadania z matematyki nr 867, 868

Redaguje Marcin E. KUCZMA

867. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 3$, dla których istnieje n-elementowy zbiór różnych liczb całkowitych M o następującej własności: w każdym trójelementowym podzbiorze zbioru M są dwie liczby, których suma jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym.

868. Ciąg nieskończony $a_1, a_2, \ldots$ jest dany wzorami: $a_1 = 1$,
$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$
Wykazać istnienie i znaleźć wartość granicy $\lim\limits_{n\to\infty}\big(a_n - \sqrt{2n}\big)$.

Zadanie 868 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2023

Przypominamy treść zadań:

863. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze $p > 2$ takie, że każda z liczb $p + 4k^2$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, p-1$, także jest liczbą pierwszą.

864. Znaleźć liczbę $C > 0$ o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ oraz dla każdego układu liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ spełniającego warunki $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ oraz $x_1 + \ldots + x_n = 0$ zachodzi nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \geqslant Cn \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$
Im większa stała C, tym lepsze rozwiązanie.

863. Niech p będzie liczbą pierwszą spełniającą podany warunek. Gdyby była to liczba postaci $4x+1$, mielibyśmy $p + 4x^2 = (2x+1)^2$, wbrew żądaniu, by wartościami wyrażenia $p + 4k^2$ $(0 < k < p)$ były liczby pierwsze. Zatem $p = 4x - 1$ dla pewnego całkowitego $x \geqslant 1$. Możemy również napisać $p = 4y - 9$, gdzie oczywiście $y = x + 2$.

Weźmy najpierw pod uwagę przypadek, gdy któraś z liczb x, y ma dzielnik nieparzysty $d > 1$. Gdyby był to dzielnik liczby x, wówczas, biorąc $k = \frac{1}{2}(d-1)$ (i zauważając, że skoro $d \leqslant x$, to $0 < k < p = 4x-1$), otrzymalibyśmy
$$p + 4k^2 = 4x - 1 + (d-1)^2 = 4x + d^2 - 2d;$$
to liczba złożona, bo dzieli się przez d (i jest większa niż d).

W takim razie jedynie y może mieć dzielnik nieparzysty $d > 1$. Jeśli $d = 3$, wówczas liczba pierwsza $p = 4y - 9$ dzieli się przez 3, czyli równa się 3. Sprawdzamy, że $p = 3$ spełnia wymagany warunek.

Dalej przyjmijmy, że $d > 3$. Bierzemy $k = \frac{1}{2}(d-3)$ (gdzie znów $d \leqslant y$, więc $0 < k < p = 4y-9$) i dostajemy
$$p + 4k^2 = 4y - 9 + (d-3)^2 = 4y + d^2 - 6d;$$
jak poprzednio, to liczba złożona, bo dzieli się przez d (i jest większa niż d, skoro $y \geqslant d \geqslant 5$).

Pozostała możliwość, że żadna z liczb x, y nie ma dzielnika nieparzystego $d > 1$, czyli że obie są potęgami dwójki. Przy tym różnią się o 2, więc muszą to być liczby $x = 2$, $y = 4$. Wyznaczają liczbę pierwszą $p = 7$. Sprawdzamy, że i ona spełnia wymagany warunek.

Stąd odpowiedź: szukane liczby p to 3 i 7, i tylko one.

864. Przyjmijmy, że $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m < 0 \leqslant x_{m+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Suma wszystkich x_i jest zerowa, wobec czego
$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{m} |x_i| = \sum_{i=m+1}^{n} |x_i| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$
Weźmy pod uwagę sumę liczb nieujemnych, którą oznaczymy S, oraz sumę niektórych jej składników, oznaczoną S':
$$S = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (x_k - x_j), \qquad S' = \sum_{1\leqslant j\leqslant m<k\leqslant n} (x_k - x_j)$$
(m, n to stałe; sumowanie po wszystkich wskazanych parach j, k). Jasne, że $S \geqslant S'$. Przekształcamy te wyrażenia:
$$S = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} x_k - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n} x_j = $$
$$= \sum_{k=1}^{n}(k-1)x_k - \sum_{j=1}^{n}(n-j)x_j = \sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} 2ix_i - (n+1)\sum_{i=1}^{n} x_i = 2\sum_{i=1}^{n} ix_i$$
(skorzystaliśmy z założenia $\sum x_i = 0$); i druga suma:
$$S' = m\sum_{k=m+1}^{n} x_k - (n-m)\sum_{j=1}^{m} x_j =$$
$$= m\sum_{k=m+1}^{n} |x_k| + (n-m)\sum_{j=1}^{m} |x_j| =$$
$$= m\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|x_i| + (n-m)\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = \frac{1}{2}\cdot n\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$
(użyliśmy równości $(*)$). Nierówność $S \geqslant S'$, przepisana teraz jako
$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \geqslant \frac{1}{4}\cdot n\sum_{i=1}^{n}|x_i|,$$
pokazuje, że $C = \frac{1}{4}$ jest stałą uniwersalną, o jaką chodzi. Zwiększyć jej nie można, o czym świadczy przykład: $n = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (w którym $S = S'$).

[Michał Adamaszek, autor zadania, zaproponował powyższe rozwiązanie. Zadanie daje się zrobić kilkoma sposobami, ale to autorskie rozumowanie wydaje się najzręczniejsze.]