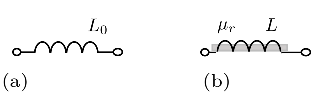
O metamateriałach, czyli czy możemy zmierzyć „ujemną” przenikalność magnetyczną?

*Paweł PERKOWSKI**

* Wydział Nowych Technologii i Chemii, Wojskowa Akademia Techniczna

Teoretyczne podstawy metamateriałów stworzył w latach 60. XX wieku rosyjski fizyk Wiktor Wiesiełago. Będąc jeszcze w szkole średniej interesował się on radiotechniką, odbiornikami radiowymi i był krótkofalowcem. Wiedział, że w obwodach LC dla pewnej szczególnej pulsacji (ω_{LC}) mamy do czynienia z rezonansem prądów (równoległe połączenie cewki o indukcyjności L i kondensatora o pojemności C) albo z rezonansem napięć (szeregowe połączenie cewki i kondensatora). Charakter obwodu dla pulsacji przekraczających pulsację rezonansową zmienia się z pojemnościowego na indukcyjny i vice-versa. Jak napisano w części pierwszej (Δ^6_{23}), pojawienie się rezonansu w szeregowym obwodzie LC skutkuje wyznaczeniem ujemnej przenikalności elektrycznej materiału wypełniającego kondensator. Zobaczymy, czy podobny efekt występuje przy wyznaczaniu „ujemnej” przenikalności magnetycznej ośrodka. Określenie „ujemnej” zostało umieszczone w cudzysłowie – dlaczego, okaże się później...

Materiał magnetyczny charakteryzuje się swoją względną przenikalnością magnetyczną μ_r. Ośrodki amagnetyczne (np. próżnia) mają tę wielkość równą dokładnie jeden. Materiały diamagnetyczne mają przenikalność magnetyczną niewiele mniejszą od jedności, a materiały paramagnetyczne – niewiele większą od jedności. Tylko materiały ferromagnetyczne charakteryzuje duża względna przenikalność magnetyczna. Względna przenikalność magnetyczna jest liczbą bezwymiarową, natomiast przenikalność magnetyczna $\mu = \mu_r\mu_0$ ma taką samą jednostkę co przenikalność magnetyczna próżni μ_0. Gdy cewka nie ma w sobie żadnego materiału (cewka powietrzna), to jej indukcyjność obliczymy ze wzoru: $L_0 = \mu_0 n^2 Sl$, gdzie μ_0 to przenikalność magnetyczna próżni/powietrza, n to liczba zwojów cewki, S to pole przekroju poprzecznego cewki, a l to długość cewki. Gdy umieścimy w cewce materiał posiadający względną przenikalność magnetyczną równą μ_r, wówczas jej indukcyjność wyjściowa L_0 zostanie wymnożona przez μ_r: $L = \mu_r L_0 = \mu_r\mu_0 n^2 Sl$.



Rys. 1. Cewka próżniowa/powietrzna (a). Cewka wypełniona ośrodkiem magnetycznym (b) o względnej przenikalności magnetycznej μ_r

Aby wyznaczyć przenikalność magnetyczną danego materiału, należy zmierzyć indukcyjność cewki pustej L_0, a następnie indukcyjność cewki L z ośrodkiem (rys. 1) i te wielkości podzielić: $\mu_r = \frac{L}{L_0}$.

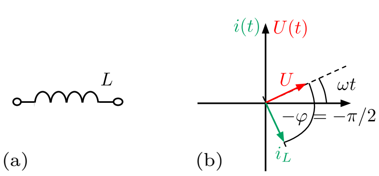
W artykule w Δ^6_{23} omówiono, jak analizator impedancji dokonuje pomiaru impedancji (oporu zespolonego) różnych elementów pasywnych. Możemy zadeklarować w analizatorze impedancji, że mierzymy elementy pasywne w obwodzie zastępczym szeregowym albo równoległym. Do pomiarów opisanych w poprzednim artykule był zastosowany szeregowy układ zastępczy. Tym razem przeanalizujemy równoległy obwód zastępczy. Mierząc napięcie $U(t)$ o pulsacji ω przykładane do elementu (układu) oraz prąd $i(t)$ wywołany tym napięciem, następnie dzieląc te dwie wielkości, otrzymamy impedancję:

$$Z = \frac{U(t)}{i(t)} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j(\omega t - \varphi)}} = \frac{U_0}{i_0} e^{j\varphi} = |Z| e^{j\varphi},$$

gdzie, jak widzimy, impedancja $Z = |Z|e^{j\varphi}$ wprowadza przesunięcie fazowe prądu względem napięcia. Jeśli φ jest dodatnie, to oznacza to, że prąd spóźnia się w stosunku do napięcia o kąt φ i jednocześnie napięcie wyprzedza prąd o kąt φ. Gdy wartość φ jest ujemna, oznacza to, że prąd wyprzedza napięcie o $-\varphi$ (jest to wartość dodatnia).

Idealna cewka

Impedancja idealnej cewki to $Z_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$. Cewka ta wprowadza przesunięcie fazowe między prądem a napięciem. W przypadku gdy mamy do czynienia z idealną cewką (rys. 2), wówczas prąd płynący przez element jest opóźniony w fazie w stosunku do napięcia pomiarowego. Kąt tego przesunięcia fazowego wynosi według definicji $\varphi = \pi/2$. Jednocześnie napięcie wyprzedza prąd o kąt $\pi/2$.

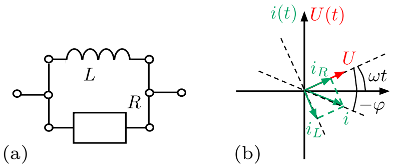


Rys. 2. Cewka o indukcyjności L (a). Wykres wskazowy (b) pokazujący, że wskaz napięcia zewnętrznego U oraz wskaz i_L prądu płynącego przez cewkę obracają się z tą samą prędkością kątową (pulsacją ω), a wskaz prądu jest przesunięty (obrócony) o $\pi/2$ do tyłu względem wskazu napięcia

Obraz komplikuje się, gdy zamiast cewki (nawet idealnej) musimy uwzględniać obecność innych elementów pasywnych: rezystancji R czy pojemności C.

Cewka i rezystor

Załóżmy, że komórka pomiarowa daje się zamodelować jako połączenie równoległe indukcyjności L oraz rezystancji R (rys. 3). Wówczas admitancja Y



Rys. 3. Cewka o indukcyjności L połączona równolegle z rezystancją R (a). Wykres wskazowy (b) pokazujący, że wskaz napięcia zewnętrznego U, wskaz prądu i_L płynącego przez cewkę, wskaz prądu i_R płynącego przez rezystor oraz wskaz prądu wypadkowego i obracają się z tą samą prędkością kątową (pulsacją ω) i wskaz prądu wypadkowego jest przesunięty o $-\varphi$ względem wskazu napięcia. Kąt $-\varphi$ może się zmieniać jako funkcja pulsacji od $-\pi/2$ do zera

(czyli odwrotność impedancji) takiego połączenia będzie wyglądała tak (ma ona część rzeczywistą i część urojoną):

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = G - \frac{j}{\omega L} = G + \frac{1}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}} = G + B_L e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Wielkość $G = 1/R$ nazywamy konduktancją rezystora, a wielkość $B = 1/\omega L$ nazywamy susceptancją cewki.

$$i(t) = U(t)Y = GU_0 e^{j\omega t} + \frac{1}{\omega L}e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} = i_R e^{j\omega t} + i_L e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}.$$

Jak zapisać formułę na prąd $i(t)$ w funkcji kąta przesunięcia φ? Jej postać będzie następująca:

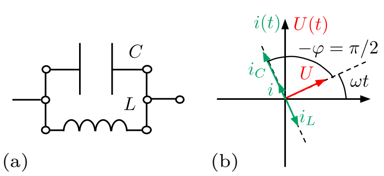
$$i(t) = U(t)Y = U_0 e^{j\omega t}\left(G + \frac{1}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= U_0\sqrt{G^2 + \frac{1}{L^2\omega^2}}e^{j\omega t}\left(\frac{G}{\sqrt{G^2 + \frac{1}{L^2\omega^2}}} - j\frac{G}{\sqrt{G^2 + \frac{1}{L^2\omega^2}}}\right) =$$

$$= i_0 e^{j\omega t}(\cos\varphi - j\sin\varphi) = i_0 e^{\omega t - \varphi}.$$

Wypadkowy prąd będzie cofnięty w fazie o kąt φ względem wymuszenia napięciowego taki, że $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\omega LG} = \frac{1}{\omega L}R = \frac{\omega_{RL}}{\omega}$, gdzie $\omega_{RL} = \frac{R}{L}$ jest zwana pulsacją relaksacyjną obwodu RL a $i_0 = U_0\sqrt{G^2 + \frac{1}{L^2\omega^2}}$. Zarówno amplituda prądu, jak i kąt przesunięcia fazowego zależą od pulsacji napięcia pomiarowego. Analizator impedancji, mierząc równoległe połączenie rezystancji R (konduktancji G) oraz indukcyjności L, zauważy, że moduł prądu i_0 zależy od pulsacji ω oraz że dla niskich pulsacji ($\omega < \omega_{RL}$) przez gałąź z cewką prąd płynie praktycznie w całości, w efekcie czego prąd jest przesunięty w fazie ($-\varphi = -\pi/2$). Dla wysokich częstotliwości ($\omega > \omega_{RL}$) susceptancja cewki (B_L) jest prawie zerowa, więc układ zachowuje się tak, jakby prawie cały prąd płynął przez gałąź z rezystorem. Wówczas przesunięcie fazowe prądu względem napięcia nie występuje ($\varphi = 0$). Gdy zadeklarujemy analizatorowi impedancji, że nasz układ składa się z równoległego połączenia rezystancji R i cewki L, to analizator impedancji te dwie wielkości wyznaczy. Widzimy, że w zależności od pulsacji analizowany element zachowuje się jak zwykły rezystor (dla wysokich częstotliwości) lub jak zwykła cewka (dla niskich częstotliwości).

Kondensator i cewka



Rys. 4. Kondensator o pojemności C połączony równolegle z cewką o indukcyjności L (a). Wykres wskazowy (b) pokazujący, że wskaz napięcia zewnętrznego U, wskaz prądu i_C płynącego przez kondensator, wskaz prądu i_L płynącego przez cewkę oraz wskaz prądu wypadkowego i obracają się z tą samą prędkością kątową (pulsacją ω). Wskaz prądu wypadkowego jest przesunięty o $\pi/2$ do przodu lub o $\pi/2$ do tyłu względem wskazu napięcia – zależy to od tego, czy pulsacja wymuszenia jest większa, czy mniejsza od ω_{LC}.
Na rysunku prąd jest przesunięty o $\pi/2$ względem napięcia

Załóżmy, że cewka pomiarowa daje się zamodelować jako połączenie równoległe pojemności C oraz indukcyjności L (rys. 4). Wówczas admitancja takiego połączenia będzie wyglądała tak:

$$Y = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{-\frac{j}{\omega C}} = \frac{-j}{\omega L} + j\omega C = \frac{1}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}} + \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} = B_L e^{-j\frac{\pi}{2}} + B_C e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Wielkość $B_C = \omega C$ nazywamy susceptancją kondensatora. Zauważmy, że z powodu braku oporu czynnego R w obwodzie w admitancji Y nie występuje konduktancja G. Admitancja będzie po przyłożeniu napięcia zewnętrznego generowała w badanym elemencie prąd według formuły:

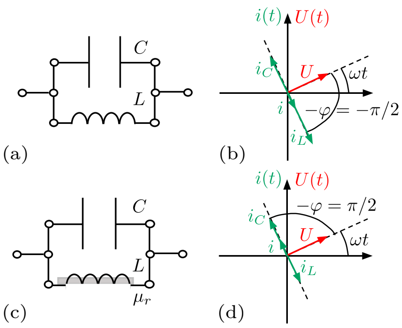
$$i(t) = U(t)Y = U_0 B_L e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} + U_0 B_C e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} = i_L e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} + i_C e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}.$$

Łatwo zauważyć, że istnieje taka pulsacja ω_{LC}, przy której admitancja połączenia kondensatora i cewki jest zerowa. Obliczmy tę pulsację. Przyrównanie modułu admitancji do zera $Y = \frac{1}{\omega_{LC}L} + \omega_{LC}C = 0$ daje nam wartość pulsacji: $\omega_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Pulsację, dla której admitancja układu jest zerowa, nazywamy pulsacją rezonansową lub pulsacją rezonansu prądów. Wzór na admitancję możemy przekształcić do następującej postaci:

$$Y = B_L e^{-j\frac{\pi}{2}} + B_C e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}} + \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{C}{L}}e^{-j\frac{\pi}{2}} + \omega\sqrt{LC}\sqrt{\frac{C}{L}}e^{j\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{C}{L}}\left(\frac{\omega_{LC}}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{\omega}{\omega_{LC}}e^{j\frac{\pi}{2}}\right).$$

Widzimy, że dla pulsacji wyższej ($\omega > \omega_{LC}$) susceptancja kondensatora jest



Rys. 5. Dla pustej cewki połączonej z kondensatorem (a) układ zachowuje się (dla danej pulsacji) jak cewka o zwiększonej lekko indukcyjności. Wskaz prądu w gałęzi z cewką i_L jest dłuższy niż wskaz prądu w gałęzi z kondensatorem i_C (b). Przesunięcie fazowe prądu wypadkowego jest równe $-\pi/2$ – czyli typowe dla indukcyjności. Dla cewki wypełnionej materiałem badanym połączonej z kondensatorem (c) układ zachowuje się jak pojemność. Wskaz prądu w gałęzi z kondensatorem i_C jest dłuższy niż wskaz prądu w gałęzi z cewką i_L (d), ponieważ skrócił się wskaz i_L. Przesunięcie fazowe prądu wypadkowego jest równe $\pi/2$ – czyli typowe dla pojemności. W pomiarze oznacza to, że efektywnie obliczamy ujemną indukcyjność cewki wypełnionej materiałem badanym, a przez to i wyznaczamy ujemną przenikalność magnetyczną μ_r materiału w cewce

większa niż susceptancja cewki ($B_C > B_L$). To oznacza, że nasz element bierny (składający się z kondensatora i cewki) ma dla takich częstotliwości charakter pojemnościowy – prąd w układzie płynie przez gałąź z kondensatorem (prąd jest przesunięty w fazie względem napięcia o $\pi/2$). Natomiast dla pulsacji niższej ($\omega < \omega_{LC}$) susceptancja kondensatora jest mniejsza od susceptancji cewki ($B_C < B_L$). A to oznacza, że element bierny (składający się z kondensatora i cewki – połączonych równolegle) ma dla takich częstotliwości charakter indukcyjny – prąd w układzie płynie przez gałąź z cewką (prąd jest przesunięty w fazie w stosunku do napięcia o $-\pi/2$).

Procedura pomiaru właściwości magnetycznych ośrodka

Załóżmy teraz, że mamy pustą cewkę o indukcyjności $L = 1$ H. Do niej równolegle jest podłączony kondensator o pojemności $C = 1\,\mathrm{nF}$ (rys. 5). Traktujemy tu ten kondensator jako element pasożytniczy. Pulsacja rezonansowa takiego połączenia wynosi:

$$\omega_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1\,\mathrm{H}\cdot 1\cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}}} = 31{,}6\ \mathrm{krad/s}.$$

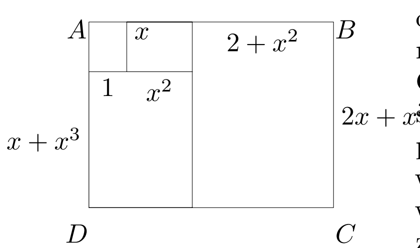
Jeżeli w tym układzie zmierzymy indukcyjność pustej cewki pomiarowej przy pulsacji $\omega = 10$ krad/s (jest spełniony warunek $\omega < \omega_{LC}$ i połączenie LC ma charakter indukcyjny), to zmierzona wartość indukcyjności będzie wynosiła $L_0 = 1{,}11$ H (indeks 0 świadczy o tym, że jest to wynik dla cewki pustej). Otrzymana wartość będzie trochę zawyżona w stosunku do faktycznej indukcyjności cewki ($L = 1$ H). Następnie cewkę pomiarową napełniamy materiałem o względnej przenikalności magnetycznej $\mu_r = 100$ – stałej w szerokim zakresie częstotliwości. Nominalnie indukcyjność cewki wzrasta więc do wartości $L' = 100$ H. Dla takiej cewki i kondensatora (pasożytniczego) pulsacja rezonansowa ulega 10-krotnemu obniżeniu i wyniesie: $\omega_{L'C} = 3{,}16$ krad/s. Jeżeli teraz zmierzymy indukcyjność napełnionej cewki pomiarowej przy pulsacji $\omega = 10$ krad/s (jest spełniony warunek $\omega > \omega_{L'C}$ i połączenie ma charakter pojemnościowy), to wyniesie ona $L_{100} = -11{,}1$ H. Jest ona ujemna, ponieważ widzimy cewkę i sądzimy, że się zachowuje jak cewka, a tymczasem dla takiej pulsacji układ mierzony (cewka i kondensator pasożytniczy równolegle połączone) ma w sumie charakter pojemnościowy. Kiedy obliczymy względną przenikalność magnetyczną materiału, którym wypełniliśmy cewkę, dostaniemy $\mu_r = \frac{L_{100}}{L_0} = -10$. W takim przypadku układ znajdujący się blisko rezonansu daje nam odpowiedź elektryczną, która przez analizator impedancji może być zinterpretowana jako efekt ujemnej przenikalności magnetycznej materiału, którym wypełniamy cewkę.

Podsumowanie

Widzimy, że pomiar dał nam „ujemną” przenikalność magnetyczną ośrodka, który badaliśmy. Otrzymaliśmy wynik dziwny. Ale nie jest on dziwniejszy od wyniku przedstawionego w części pierwszej (Δ^6_{23}), gdzie pomiar dał nam „ujemną” wartość przenikalności ośrodka wypełniającego kondensator. Odpowiedź na pytanie, co doprowadziło do takiego wyniku, jest dokładnie taka sama jak w części pierwszej: sprawił to rezonans w układzie. Czyli pojawienie się pojemności w układzie pomiarowym zmieniło postrzeganie tego ośrodka, którym wypełniliśmy cewkę pomiarową. Zamiast ujemnego przesunięcia fazowego prądu w stosunku do napięcia otrzymaliśmy dodatnie przesunięcie fazowe, czyli układ zmienił swój charakter z indukcyjnego na pojemnościowy.

Przykład przedstawiony w pierwszej i drugiej części tego artykułu dotyczy elementów dyskretnych (cewki i kondensatora). A czy jesteśmy w stanie stworzyć materiał, który w swojej strukturze będzie miał wbudowane cewki i kondensatory tak, aby lekko strojąc pulsację fali elektromagnetycznej w pobliżu rezonansu w strukturze LC móc wykorzystać rezonansowe właściwości takiego nowego materiału? Takie pytanie zadał sobie Wiktor Wiesiełago i doprowadziło ono do wymyślenia ośrodka, który (wszystko na to wskazuje) nie istnieje w przyrodzie, a który nazwano metamateriałem (choć moglibyśmy go nazywać materiałem rezonansowym). O takich ośrodkach i ich unikalnych właściwościach opowiemy w części trzeciej.

Rozwiązanie zadania M 1761.
Odpowiedź: Tak, istnieje.
Najpierw pokażmy, że istnieje prostokąt, który można podzielić na 4 podobne prostokąty o różnych rozmiarach. W tym celu wystarczy w konfiguracji przedstawionej na poniższym rysunku tak dobrać x, aby prostokąt $ABCD$ był podobny do prostokątów, na które został podzielony (które są wzajemnie podobne na mocy konstrukcji).



Szukana wartość x musi spełniać następującą zależność:

$$1 + x^2 + 2 + x^2 = x(2x + x^3),$$

a stąd $x = \sqrt[4]{3}$.
Wobec tego rozważmy prostokąt przedstawiony na rysunku wyżej dla $x = \sqrt[4]{3}$. Spośród czterech prostokątów z podziału wybierzmy ten o najmniejszym polu i podzielmy go w taki sam sposób. Powtarzając opisany podział, wielokrotnie otrzymujemy prostokąty coraz mniejszych rozmiarów. Po 147 podziałach otrzymamy 442 prostokąty spełniające warunki zadania.