Twierdzenie Ramanujana–Nagella i trójkąt Pascala

Bartłomiej PAWLIK, Witold TOMASZEWSKI**

* Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska

Historia pewnego twierdzenia. Spuścizną Srinivasy Ramanujana są nie tylko głębokie teorioliczbowe twierdzenia, ale również liczne hipotezy stanowiące wyzwania dla kolejnych pokoleń matematyków. Jedno z wielu pytań postawionych przez genialnego hinduskiego samouka, datowane na 1913 rok, dotyczyło wyrażenia $2^s - 7$. Ramanujan zauważył, że jest ono kwadratem liczby całkowitej dla s równego $3, 4, 5, 7$ i 15, i chciał wiedzieć, czy istnieją inne całkowite wartości s o tej własności.

Opisywane zagadnienie figuruje jako *Question 464* w słynnym dziele *Collected papers of Srinivasa Ramanujan* z 1927 roku.

W 1959 roku norweski matematyk Thoralf Skolem i jego dwóch amerykańskich kolegów, Sarvadaman Chowla i D.J. Lewis, na łamach *Proceedings of the AMS* wykazali, że nie ma więcej rozwiązań. Rok później Trygve Nagell, krajan Skolema, przedstawił swoje rozwiązanie problemu Ramanujana. Jak się okazało, kolejny dowód jest zarówno prostszy, jak i… starszy! Nagell opublikował rozwiązanie już w 1948 roku w pracy napisanej po norwesku, co skutecznie utrudniło wynikowi przebicie się do świadomości ogółu matematycznej społeczności.

Jeden z autorów niniejszego artykułu zauważył pewną własność trójkąta Pascala, wynikającą z twierdzenia Ramanujana–Nagella. Zanim jednak ją zaprezentujemy, przyjrzymy się pokrótce pierwszym dowodom tego twierdzenia i omówimy jego dalsze losy. Zacznijmy od przedstawienia pewnych podstawowych faktów z zakresu algebry abstrakcyjnej.

Słów kilka o pierścieniach. Na potrzeby tego artykułu pierścień wystarczy rozumieć jako zbiór, do którego należą suma, różnica i iloczyn każdej pary jego elementów – reprezentatywnym przykładem jest pierścień liczb całkowitych. Jak wiemy, każdą liczbę całkowitą różną od $0, 1$ i -1 można jednoznacznie rozłożyć na iloczyn liczb pierwszych (jeżeli rozważana liczba jest ujemna, to na czynniki pierwsze rozkładamy jej moduł i wynik mnożymy przez -1). W terminologii algebraicznej oznacza to, że pierścień liczb całkowitych ma własność *jednoznaczności rozkładu*. Idąc dalej tym tropem, liczby pierwsze nazywamy *elementami nierozkładalnymi* pierścienia liczb całkowitych. Już w XIX wieku zauważono, że nie we wszystkich pierścieniach rozkład na elementy nierozkładalne jest jednoznaczny. Warto tu wspomnieć, że żyjący kilkadziesiąt lat wcześniej wybitny matematyk Leonhard Euler chyba o tym nie wiedział, w efekcie popełniając swój słynny błąd w dowodzie szczególnego przypadku Wielkiego Twierdzenia Fermata (wtedy jeszcze hipotezy) dla $n = 3$. Używając współczesnej terminologii, można napisać, iż Euler nieopatrznie założył, że pierścień liczb postaci $\alpha + \beta \cdot i\sqrt{3}$ (α i β są liczbami całkowitymi, $i^2 = -1$) ma własność jednoznaczności rozkładu. Nie jest to prawdą – przykładowo

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + i\sqrt{3}) \cdot (1 - i\sqrt{3}).$$

Dodajmy, że rozumowanie Eulera można łatwo naprawić, korzystając z metod opisanych w jego pracach, więc często przyznaje się mu autorstwo poprawnego dowodu.

Dwa dowody. Rozwiązania Skolema i Nagella zaczynają się bardzo podobnie. Rozważamy równanie $x^2 + 7 = 2^s$. Jeśli s jest liczbą parzystą, to po przekształceniu otrzymujemy $(2^{s/2} - x)(2^{s/2} + x) = 7$. To daje nam dwie możliwości:

$$\begin{cases} 2^{s/2} - x = 1 \\ 2^{s/2} + x = 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2^{s/2} - x = 7 \\ 2^{s/2} + x = 1 \end{cases},$$

z których wynika, że $s = 4$ oraz $x = \pm 3$. (Potencjalnie wszystkie liczby pojawiające się po prawej stronie powyższych układów równań mogłyby być ujemne, ale po ich zsumowaniu doszlibyśmy do sprzeczności).

Załóżmy teraz, że liczba s jest nieparzysta. Równanie $x^2 = 2^s - 7$ przekształcamy do postaci

$$\frac{x^2 + 7}{4} = 2^t \text{ dla } t = s - 2,$$

Rozwiązanie zadania F 1081. Tworzeniu lodu towarzyszy wydzielanie ciepła topnienia powodujące ogrzewanie wody i lodu. Masa lodu będzie rosła, dopóki mieszanina wody i lodu nie osiągnie temperatury topnienia $T_m = 273{,}15$ K (0°C). Gdyby ciepła właściwe lodu i wody były jednakowe, to mielibyśmy: $Lm_l = mc_w(T_m - T_0)$, czyli $m_l = mc_w(T_m - T_0)/L \approx 0{,}063$ kg. Ciepło właściwe lodu jest jednak mniejsze niż wody. Przeanalizujmy teraz skrajną sytuację – w temperaturze początkowej T_0 od razu powstaje „cały lód”, tzn. powstaje go tyle, że uwolnione ciepło topnienia ogrzewa lód i pozostałą wodę do temperatury dokładnie równej T_m. Mielibyśmy warunek:

$$Lm_l = ((m - m_l)c_w + m_l c_l)(T_m - T_0),$$

czyli:

$$m_l = \frac{mc_w(T_m - T_0)}{L + (c_w - c_l)(T_m - T_0)},$$

co daje $m_l \approx 0{,}059$ kg. Rzeczywista masa lodu znajduje się więc pomiędzy 0,059 kg i 0,063 kg. Dokładna analiza musi uwzględnić to, że kolejne porcje lodu powstają w coraz wyższej temperaturze. Utworzeniu porcji dm_l lodu towarzyszy wzrost temperatury mieszaniny o dT, co prowadzi do równania:

$$Ldm_l = (m - m_l)c_w dT + m_l c_l dT = (mc_w + (c_l - c_w)m_l)dT,$$

a więc

$$(*) \qquad \frac{dm_l}{dT} = \frac{mc_w + (c_l - c_w)m_l}{L},$$

przy czym w chwili początkowej mamy $m_l = 0$ i $T = T_0$. Rozwiązaniem równania $(*)$, co łatwo sprawdzić, jest:

$$m_l(T) = \frac{c_w m}{c_w - c_l} \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{(c_l - c_w)(T - T_0)}{L}\right)\right),$$

a proces zakończy się, gdy $T = T_m$. Dla $T = T_m$ po podstawieniu pozostałych danych liczbowych otrzymujemy $m_l \approx 0{,}061$ kg. Gęstość lodu jest o około 8% mniejsza niż wody, co oznacza, że końcowa objętość mieszaniny będzie o około 5,6 cm^3 większa od początkowej objętości przechłodzonej cieczy. Podane w treści zadania ciepła właściwe odpowiadają zakresowi temperatur od $-10°$ do $0°$ dla lodu i od $-10°$ do $100°$ dla wody w stanie ciekłym – w tych zakresach temperatur zmiany obu wielkości nie przekraczają 0,1 J/(g·K).

Równość $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{1-i\sqrt{7}}{2}=2$ pokazuje nieco zaskakujący fakt, że liczba 2 w rozważanym pierścieniu nie jest nierozkładalna!

a następnie obie strony tego równania rozkładamy na iloczyny:

$$\frac{x+i\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{x-i\sqrt{7}}{2}=\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t\cdot\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^t.$$

Wszystkie otrzymane ułamki należą do pierścienia liczb postaci $\alpha+\beta\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ (gdzie α,β są liczbami całkowitymi). Jak się okazuje, ten pierścień ma własność jednoznaczności rozkładu, a wśród elementów nierozkładalnych są $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ oraz $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$. Z faktów tych wynika, że zachodzi jedna z czterech możliwości opisanych skrótowo poniższymi równaniami:

$$\text{(1a)}\quad \frac{x\pm i\sqrt{7}}{2}=\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t \qquad\qquad \text{(1b)}\quad \frac{x\pm i\sqrt{7}}{2}=-\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t.$$

Możemy ograniczyć się do analizy (1a), gdyż rozwiązania (1b) uzyskujemy z rozwiązań (1a) poprzez zmianę znaku przy x. Od tego miejsca dowody idą innymi drogami.

Chowla, Lewis i Skolem obliczają kolejne potęgi liczby $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ i zauważają, że jeśli potęga ma postać $\frac{x\pm i\sqrt{7}}{2}$, to $x=1,-3,-5,11$ lub -181, co odpowiada rozwiązaniom wskazanym przez Ramanujana. Przykładowo

$$\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^{13}=\frac{-181-i\sqrt{7}}{2}$$

i liczba 181 spełnia równanie $181^2=2^{15}-7$. Uzasadnienie, że nie ma więcej rozwiązań, opiera się na opracowanej przez Skolema metodzie korzystającej z własności liczb p-adycznych.

Nagell natomiast analizuje równanie (1a) oraz wynikające z niego dla $t>1$

$$\text{(2)}\qquad \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t-\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^t=\pm i\sqrt{7}.$$

Dalej argumentuje, że prawa strona powyższej równości musi być równa $-i\sqrt{7}$. (Należy w tym celu rozpatrzeć ją modulo $\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^2$, nie będziemy tu jednak wchodzić w szczegóły tego odrobinę bardziej wyszukanego argumentu). Ze wzoru dwumianowego Newtona wynika, że

$$(a+b)^t-(a-b)^t=2\cdot\left(\binom{t}{1}a^{t-1}b+\binom{t}{3}a^{t-3}b^3+\ldots+\binom{t}{t}b^t\right).$$

Stosując tę zależność w równaniu (2), otrzymujemy

$$2\cdot\frac{\binom{t}{1}(i\sqrt{7})+\binom{t}{3}(i\sqrt{7})^3+\ldots+\binom{t}{t}(i\sqrt{7})^t}{2^t}=-i\sqrt{7},$$

a stąd

$$\binom{t}{1}+\binom{t}{3}(i\sqrt{7})^2+\ldots+\binom{t}{t}(i\sqrt{7})^{t-1}=-2^{t-1}.$$

Pamiętając, że $i^2=-1$ oraz że wszystkie wykładniki po lewej stronie są parzyste, otrzymujemy równanie:

$$(*)\qquad \binom{t}{1}-\binom{t}{3}7+\binom{t}{5}7^2+\ldots\pm\binom{t}{t}7^{\frac{t-1}{2}}=-2^{t-1},$$

z którego w szczególności wynika

$$t\equiv-2^{t-1}\ \mathrm{mod}\ 7.$$

Podstawmy $t=42k+r$ dla r spełniającego $0\leqslant r<42$. Wówczas $t\equiv r$ mod 7. Ponadto na mocy małego twierdzenia Fermata: $2^{7-1}\equiv 1$ mod 7, więc $2^t\equiv 2^r$ mod 7. Otrzymujemy zatem $r\equiv -2^{r-1}$ mod 7.

Łatwo można sprawdzić, że jedyne rozwiązania tej kongruencji to $r=3,5,13$. Nagell pokazuje, że w każdym z tych przypadków, aby spełnione było równanie $(*)$, musi zachodzić $t=r$, co odpowiada rozwiązaniom $s=5,7,15$.

Osobno należy rozpatrzeć łatwy przypadek $t=1$, dla którego równanie (2) nie jest spełnione. Ten przypadek daje rozwiązanie $s=3$.

A po dowodach... Od tamtej pory rozważane twierdzenie doczekało się kilkunastu kolejnych uzasadnień i wielu uogólnień. W tej historii znajduje

Rozwiązanie zadania M 1759.
Zauważmy, że z warunków zadania dla dowolnego $0<k<b$ zachodzi:

$$b+k\mid(a+k)-(b+k)=a-b.$$

Ustalmy liczbę całkowitą $0<k<b$. Ponieważ $\frac{b+k}{b-k}-\frac{k}{b-k}>1$, to istnieje liczba całkowita $n\in\left(\frac{k}{b-k},\frac{b+k}{b-k}\right)$. Wtedy liczba $m=n(b-k)-k$ spełnia nierówności $0<m<b$.
Na mocy uwagi poczynionej na początku $b+m\mid a-b$, jednakże $b+m=(n+1)(b-k)$, skąd dla dowolnego $0<k<b$ mamy $b-k\mid b+m\mid a-b$, więc

$$b-k\mid(a-b)+(b-k)=a-k.$$

Rozwiązanie zadania M 1760.
Udowodnimy, że dla dowolnej pary (x,y) zapisanej na tablicy liczba $2x-y$ jest podzielna przez 7. Dla ułatwienia zapisu podzielność tę oznaczmy jako $T(x,y)$. Rzeczywiście, zachodzi $T(1,2)$, gdyż $2\cdot1-2=0$. Zauważmy, że

$$2\cdot(-a)-(-b)=-(2a-b)$$
$$2\cdot(-b)-(a+b)=3(2a-b)-7a,$$

zatem z $T(a,b)$ wynika $T(-a,-b)$ oraz $T(-b,a+b)$. Ponadto

$$2(a+c)-(b+d)=(2a-b)+(2c-d)$$

i dlatego z $T(a,b)$ i $T(c,d)$ wynika $T(a+c,b+d)$. Dowodzi to, że zachodzi $T(x,y)$ dla każdej pary (x,y), którą można napisać na tablicy.
Ponieważ liczba $2\cdot2022-2023=2021$ nie jest podzielna przez 7, ta para nie może pojawić się na tablicy.

się również akcent polski: w 1956 roku Jerzy Browkin i Andrzej Schinzel rozwiązali równanie diofantyczne $2^x - 1 = y(y+1)/2$, a kilka lat później wykazali równoważność swojego rozwiązania z twierdzeniem Ramanujana–Nagella.

Więcej o dowodach i uogólnieniach można przeczytać w przeglądowej pracy *On the Ramanujan-Nagell Equation and its Generalisations* autorstwa Edwarda L. Cohena.

Najpopularniejsze zastosowanie rozważanego twierdzenia dotyczy teorii kodów korekcyjnych. Otrzymane rozwiązania pozwalają na konstruowanie zbioru C, złożonego z ciągów binarnych długości n o następującej własności:

każdy ciąg binarny długości n różni się o co najwyżej dwa znaki od dokładnie jednego ciągu $c \in C$.

Powyższa własność pozwala na poprawianie błędu w każdym otrzymanym ciągu, a jeżeli w trakcie transmisji, po wysłaniu pewnego ciągu $c \in C$, popełniono co najwyżej dwa błędy, to poprawiony ciąg będzie zgodny z tym, który został wysłany. Dodajmy, że jeżeli x, s spełniają równanie $x^2 = 2^s - 7$, to ciągi, o których tu mowa, mają długość $n = \frac{x-1}{2}$, a zbiór C ma 2^{s-3} elementów.

A co to wszystko ma wspólnego z trójkątem Pascala? Przyjmijmy konwencję indeksowania wierszy trójkąta Pascala od 0, a nie od 1. Jak wiemy, suma wszystkich liczb w n-tym wierszu trójkąta Pascala jest n-tą potęgą liczby 2, co można wyrazić równaniem

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

A czy w wierszach trójkąta Pascala istnieją jakieś sumy częściowe, które również są pewnymi potęgami liczby 2? Ujmując to bardziej formalnie: interesuje nas opisanie zbioru wszystkich trójek (n, s, k) liczb naturalnych takich, że $s \leqslant n$ oraz

$$\sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i} = 2^k. \tag{3}$$

Oczywiście dla każdego n do rozważanego zbioru należą trójki $(n, 0, 0)$ oraz (n, n, n). Dodatkowo możemy do niego dołożyć nieskończenie wiele trójek postaci $(2^k - 1, 1, k)$, ponieważ

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{2^k-1}{i} = \binom{2^k-1}{0} + \binom{2^k-1}{1} = 1 + 2^k - 1 = 2^k.$$

Ostatni typowy podzbiór rozwiązań stanowią pary $(2s+1,\ s+1,\ 2s)$, co wynika z następującego wnioskowania. Jak wcześniej wspomnieliśmy, suma wszystkich elementów w wierszu jest potęgą liczby 2. Wiemy również, że elementy w każdym wierszu ułożone są symetrycznie – fakt ten można uzasadnić wzorem $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Zatem dla $n = 2s+1$ wiersz zawiera dokładnie $2s+2$ elementów, a suma elementów w tym wierszu wynosi 2^{2s+1}. Rozpatrywana suma połowy z nich jest połową sumy wszystkich elementów, więc wynosi 2^{2s}.

Reasumując, jak dotąd ustaliliśmy, że rozwiązaniami równania (3) są trójki

- $(n, 0, 0)$ – przypadek trywialny, pierwszy element w każdym wierszu trójkąta Pascala to 2^0;
- $(2^k - 1, 1, k)$ – suma dwóch początkowych elementów w wierszu trójkąta Pascala w nieskończenie wielu przypadkach jest potęgą liczby 2;
- $(2s+1,\ s+1,\ 2s)$ – suma połowy wszystkich elementów w wierszach zawierających parzystą liczbę elementów jest potęgą liczby 2;
- (n, n, n) – suma wszystkich elementów w każdym wierszu jest potęgą liczby 2.

Wszystkie powyższe rozwiązania będziemy nazywać rozwiązaniami *standardowymi*. Czy istnieją jakieś inne rozwiązania?

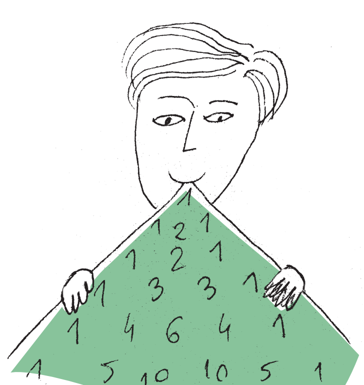
Jak się okazuje, twierdzenie Ramanujana–Nagella rozstrzyga powyższe pytanie dla $s = 2$. Zauważmy, że w tym przypadku interesuje nas równanie

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 2^k,$$

które można łatwo przekształcić do postaci

$$(2n+1)^2 = 2^{k+3} - 7.$$

Z twierdzenia Ramanujana–Nagella wynika, że prawa strona otrzymanego



Oczywiście moglibyśmy przyjąć, że $\binom{n}{k} = 0$ dla $n < k$, ale nie chcemy sztucznie rozszerzać zbioru rozwiązań standardowych o kolejne trywialne przypadki.

Warto dodać, że ciąg sum pierwszych trzech elementów kolejnych wierszy w trójkącie Pascala nosi umowną nazwę *the lazy caterer's sequence* i jest znany jako rozwiązanie następującego zadania kombinatorycznego: Jaka jest największa liczba obszarów, na jaką można podzielić płaszczyznę przy użyciu n prostych?

równania jest kwadratem liczby całkowitej w pięciu przypadkach: dla k równego $0, 1, 2, 4$ i 12. Szukane wartości n to, odpowiednio, $0, 1, 2, 5$ i 90 – po odrzuceniu dwóch pierwszych rozwiązań otrzymujemy indeksy wszystkich wierszy trójkąta Pascala, w których sumy pierwszych trzech elementów są potęgami liczby 2. Zauważmy, że ostatnie otrzymane rozwiązanie – $(90, 2, 12)$ – odpowiadające równaniu

$$\binom{90}{0} + \binom{90}{1} + \binom{90}{2} = 1 + 90 + 4005 = 4096 = 2^{12}$$

nie należy do zbioru rozwiązań standardowych! Istnieje jeszcze jedno rozwiązanie niestandardowe – $(23, 3, 11)$:

$$\binom{23}{0} + \binom{23}{1} + \binom{23}{2} + \binom{23}{3} = 1 + 23 + 253 + 1771 = 2048 = 2^{11},$$

znane wszystkim, którzy spotkali się z konstrukcją kodu Golaya. Czy istnieją inne wiersze trójkąta Pascala, w których suma pierwszych czterech elementów jest potęgą liczby 2? I ogólniej, czy poza dwoma wskazanymi istnieją inne rozwiązania niestandardowe równania (3)? Kto wie, może odpowiedzi kryją się w innych hipotezach Srinivasy Ramanujana...

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1759. Liczby całkowite dodatnie a i b są takie, że $a + k$ jest podzielne przez $b + k$ dla wszystkich liczb całkowitych $0 < k < b$. Udowodnić, że $a - k$ jest podzielne przez $b - k$ dla dowolnej liczby całkowitej $0 < k < b$.
Rozwiązanie na str. 5

M 1760. Na tablicy napisano parę liczb $(1, 2)$. Gdy para liczb całkowitych (a, b) jest zapisana na tablicy, to możemy jeszcze dopisać parę $(-a, -b)$, a także $(-b, a + b)$. Ponadto, jeśli na tablicy zapisane są pary (a, b) i (c, d), to możemy zapisać również parę $(a + c, b + d)$. Czy para $(2022, 2023)$ może kiedyś pojawić się na tablicy?
Rozwiązanie na str. 5

M 1761. Czy istnieje prostokąt, który można podzielić na 442 prostokąty, a wszystkie one są podobne do wyjściowego, jednak żadne dwa nie są przystające?
Rozwiązanie na str. 10

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1081. Woda pozbawiona zanieczyszczeń i pozostawiona bez wstrząsów mechanicznych może zostać ochłodzona do temperatury $T_H \approx 225$ K ($-48°$C) i pozostać w stanie ciekłym (tzw. stan przechłodzenia). W temperaturze $T \leqslant T_H$ w ciekłej wodzie powstają i szybko rosną kryształki lodu. Podobne zjawisko zachodzi, gdy przechłodzoną wodę w temperaturze $T > T_H$ wstrząśniemy, np. wyjmując z zamrażalnika. Jaka masa, m_l, lodu powstanie w butelce zawierającej $m = 0{,}5$ kg wody przechłodzonej w zamrażalniku? Temperatura w zamrażalniku: $T_0 = 263{,}15$ K ($-10°$C). Dane dla wody: temperatura topnienia $T_m = 273{,}15$ K, ciepło topnienia $L = 333{,}6$ J/g, ciepło właściwe przechłodzonej wody $c_w = 4{,}2$ J/(g·K), ciepło właściwe lodu $c_l = 2{,}1$ J/(g·K). Tworzenie i wzrost kryształów lodu są na tyle szybkie, że można pominąć wymianę ciepła z otoczeniem (przez ścianki butelki).
Rozwiązanie na str. 4

F 1082. Po długiej nieobecności wracamy do domu i stwierdzamy, że w naszym pokoju o objętości $V = 60$ m^3 temperatura spadła do wartości $t_p = 0°$C, takiej jak na zewnątrz. Włączamy grzejnik, i po pewnym czasie temperatura osiąga wartość $t_k = 22°$C. Ogrzewanie następuje powoli i przez cały czas ciśnienie wewnątrz pokoju wynosi $p = 10^5$ Pa i jest równe ciśnieniu atmosferycznemu na zewnątrz domu. a) O ile zmieniła się energia wewnętrzna powietrza w pokoju podczas ogrzewania? b) O ile zmieniła się liczba moli powietrza w pokoju? c) Ile ciepła dostarczył grzejnik? W podanym zakresie temperatur powietrze zachowuje się jak gaz idealny (mieszanina gazów o cząsteczkach dwuatomowych: O_2 i N_2). Stała gazowa $R = 8{,}31$ J/(mol·K), temperatura $0°\mathrm{C} = 273{,}15$ K. Pomijamy straty ciepła poprzez ściany i okna pokoju.
Rozwiązanie na str. 16