



Wektory – część 1

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Wektory są obiektami z pogranicza dwóch światów – algebraicznego i geometrycznego. Całą filozofię stosowania rachunku wektorowego do rozwiązywania zadań z geometrii można streścić w jednym zdaniu: pozwalają one zamienić problem geometryczny na problem czysto algebraiczny. Tutaj wymienimy kilka podstawowych własności wektorów, pomijając uzasadnienia – Czytelnik może uzupełnić je samodzielnie lub znaleźć w dobrym podręczniku do geometrii analitycznej.

Zacznijmy od geometrii. Niech $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ będą dowolnymi punktami na płaszczyźnie. Przez **wektor** \vec{AB} rozumiemy będziemy odcinek z wyróżnionym początkiem A i końcem B . Wektory $\vec{A_1B_1}$ i $\vec{A_2B_2}$ uznajemy za **równe**, jeżeli środki odcinków A_1B_2 oraz A_2B_1 pokrywają się. Wektory \vec{AB} i \vec{BA} nazywamy **przeciwnymi**. Szczególnym przypadkiem wektora jest **wektor zerowy** $\vec{0} = \vec{AA}$.

Z punktu widzenia algebry wektorem na płaszczyźnie będziemy nazywać **uporządkowaną parę liczb rzeczywistych**: $\vec{v} = \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (x_v, y_v)$. Jednej parze uporządkowanej (x_v, y_v) odpowiada nieskończenie wiele odcinków \vec{AB} i każde dwa z nich są równe w sensie opisanym w poprzednim akapicie. **Wektorem przeciwnym** do $\vec{v} = (x_v, y_v)$ jest $-\vec{v} = (-x_v, -y_v)$.

Dodawanie wektorów i mnożenie ich przez **skalar** (liczbę) łatwo się definiuje dla postaci algebraicznej:

$$(x_u, y_u) + (x_v, y_v) = (x_u + x_v, y_u + y_v), \quad a(x_v, y_v) = (ax_v, ay_v).$$

Dla wszystkich wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ oraz skalarów a, b zachodzą równości:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \quad (ab)\vec{v} = a(b\vec{v}), \\ (a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}, \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

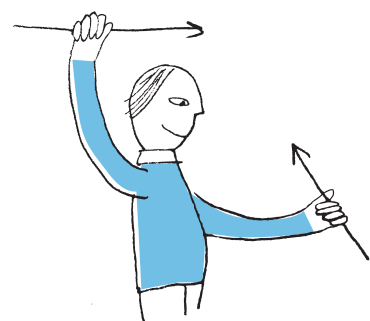
Pierwsza to przemienność, kolejne dwie to prawa łączności, a ostatnie dwie – prawa rozdzielności. Dzięki powyższym własnościom możemy wykonywać działania na wektorach praktycznie tak samo jak na liczbach.

Jeśli wybierzemy punkty A, B, C , dla których $\vec{u} = \vec{AB}$ i $\vec{v} = \vec{BC}$, to $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$. Nazywamy to **regulą trójkąta**. Wynika z niej w szczególności, że $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$. Jeżeli zatem mamy wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ spełniające równość $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, to możemy utworzyć z nich trójkąt (być może zdegenerowany), przesuając je **równolegle**. Stosując równość $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ oraz indukcję, dowodzimy, że $\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n}$ lub równoważnie $\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-1}A_n} + \vec{A_nA_1} = \vec{0}$.

Długością wektora $\vec{v} = (x_v, y_v) = \vec{AB}$ nazywamy liczbę $|\vec{v}| = |\vec{AB}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$. Dla każdego rzeczywistego a zachodzi równość $|a\vec{v}| = |a| \cdot |\vec{v}|$. Dla $a > 0$ wektor $a\vec{v}$ ma ten sam zwrot co wektor \vec{v} , dla $a < 0$ – przeciwny. Na koniec: $0\vec{v} = \vec{0}$. Niezerowe wektory \vec{u} i \vec{v} są **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki skalar a , że $\vec{u} = a\vec{v}$. Zachodzi **nierówność trójkąta** $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$, a indukcyjnie można wykazać, że $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n| \leq |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| + \dots + |\vec{v}_n|$.

Zadania

1. Punkty A, B, C, D leżą na płaszczyźnie. Punkty M i N są środkami odcinków odpowiednio AB i CD . Udowodnić, że $2|MN| \leq |BC| + |DA|$.
2. Udowodnić, że $\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} < \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} + \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$ dla a, b, c będących długościami boków trójkąta.
3. Czworokąty $APQB, BRSC$ i $CTUA$ są równoległobokami. Wykazać, że z odcinków QR, ST, UP można zbudować trójkąt (być może zdegenerowany).
4. Pięć różnych punktów A, B, C, D, E leży na płaszczyźnie. Punkty K, L, M, N są środkami odcinków odpowiednio AB, BC, CD, DE . Punkty P, Q są środkami odcinków odpowiednio KM, LN . Udowodnić, że $PQ \parallel AE$.
5. Punkty E, F, G leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC , przy czym $2|AG| = |GB|, 2|BE| = |EC|$ oraz $2|CF| = |FA|$. Punkty P i Q leżą na odcinkach odpowiednio EG i FG , przy czym $2|EP| = |PG|$ oraz $2|GQ| = |QF|$. Dowiedź, że czworokąt $AGPQ$ jest równoległobokiem.



Wskazówki do zadań

1. Podać stronami równości: $\frac{MN}{AN} = \frac{MA}{AD} + \frac{DN}{AN}$ i $\frac{MN}{BN} = \frac{MB}{BC} + \frac{CN}{BN}$.

2. Rozważmy trójkąt ABC o bokach $a = |BC|, b = |CA|, c = |AB|$ i ich środkach A_1, B_1, C_1 . Ze wzoru na długość mediany zachodzi równość $\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = 2|AA_1|$ oraz dwie analogiczne. Wystarczy wykazać, że $2AA_1 + 2BB_1 + 2CC_1 = 0$.

3. Można zapisać $\vec{QR} + \vec{BS} + \vec{BT} = \vec{0}$ i $\vec{QR} + \vec{ST} + \vec{UP} = \vec{0}$. Niech $\vec{t} = \vec{AB}, \vec{s} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{AD}$, $\vec{e} = \vec{AE}$. Za pomocą tych wektorów można wyrazić $\vec{AK}, \vec{AL}, \vec{AM}, \vec{AN}$, a następnie \vec{AP} i \vec{AQ} .

5. Wygodnie przyjąć oznaczenia $\vec{u} = \vec{AC}, \vec{v} = \vec{BC}, \vec{w} = \vec{CF}$, bo wtedy $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$. Możemy za ich pomocą wyrazić wektory $\vec{FG} = \vec{FA} + \vec{AG}$ i $\vec{GE} = \vec{GB} + \vec{BE}$, a następnie \vec{QP} wyrazić przez \vec{FG} i \vec{GE} .