Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2023

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 855 ($WT = 1{,}98$) i 856 ($WT = 2{,}20$) z numeru 2/2023

Norbert Porwol	Essen	43,61
Paweł Najman	Kraków	41,91
Radosław Kujawa	Wrocław	41,33
Marcin Kasperski	Warszawa	40,29
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olsztyn	35,26
Michał Adamaszek	Kopenhaga	34,81
Janusz Fiett	Warszawa	33,39
Paweł Kubit	Kraków	33,33
Marek Spychała	Warszawa	30,13

Zadania z matematyki nr 865, 866 *Redaguje Marcin E. KUCZMA*

865. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach A i C są proste (ale nie przy wierzchołkach B i D). Punkt M jest środkiem przekątnej AC. Punkt E jest symetryczny do B względem M. Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach ABC i ADE są przystające.

866. Dane są dwie różne liczby pierwsze p, q takie, że $2^p - 1$ oraz $2^q - 1$ też są liczbami pierwszymi, a ponadto każda z liczb $2^{p-1} - 1$ oraz $2^{q-1} - 1$ dzieli się przez iloczyn pq. Udowodnić, że jeżeli liczba całkowita dodatnia d jest dzielnikiem liczby $2^{pq} - 1$, to liczba $d - 1$ dzieli się przez pq.

Zadanie 866 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

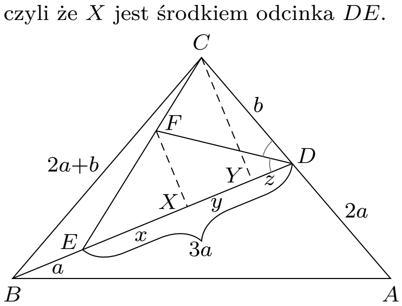
Rozwiązania zadań z numeru 5/2023

Przypominamy treść zadań:

861. Trójkąt ABC jest równoramienny: $AC = BC$. Punkt D leży na boku AC, przy czym $2\,AD = BD$. Punkt E leży na odcinku BD, przy czym $2\,BE = AD$. Wykazać, że $\sphericalangle CDE = 2\sphericalangle CED$.

862. Dany jest graf skierowany o skończenie wielu wierzchołkach (każde dwa różne wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź zorientowana). Każda krawędź jest pokolorowana jednym z m kolorów; zaś z każdego wierzchołka wychodzi więcej niż m krawędzi. Udowodnić, że z każdego wierzchołka można poprowadzić nieskończenie wiele nieskończonych scieżek takich, że dla każdej liczby naturalnej k krawędzie przechodzone w k-tym kroku na wszystkich tych ścieżkach mają jednakowy kolor. (Nieskończona scieżka to nieskończony ciąg kolejno przyległych krawędzi – początkiem kolejnej jest koniec poprzedniej).

861. Niech $BE = a$, $CD = b$; więc $AD = 2a$, $BD = 4a$, $BC = AC = 2a + b$. Dwusieczna kąta CDE przecina odcinek CE w punkcie, który nazwiemy F. Rzuty punktów F i C na prostą BD oznaczmy odpowiednio X i Y. Zadanie sprowadza się do wykazania, że $\sphericalangle FDE = \sphericalangle FED$, czyli że $FD = FE$ – czyli że X jest środkiem odcinka DE.



Przyjmijmy dalsze oznaczenia długości odcinków: $EX = x$, $XY = y$ oraz $YD = z$, gdy (jak na rysunku) punkt Y leży na odcinku BC; natomiast jeśli Y leży na przedłużeniu tego odcinka (tak się dzieje, gdy kąt ADB jest ostry), przez z oznaczymy liczbę ujemną $z = -DY$. W każdym przypadku zachodzi równość

$$x + y + z = 3a; \tag{1}$$

dalsze rachunki są niezależne od konfiguracji. Należy dowieść, że $EX = DX$, czyli że $x = y + z$.

Twierdzenie Pitagorasa w trójkątach CBY i CDY pociąga równość $CB^2 - BY^2 = CD^2 - DY^2$, którą przepisujemy jako

$$(2a + b)^2 - (4a - z)^2 = b^2 - z^2;$$

po rozwinięciu kwadratów i redukcji:

$$2z = 3a - b. \tag{2}$$

Wstawiamy to do równości (1), pomnożonej stronami przez 2, i otrzymujemy

$$2x + 2y = 3a + b. \tag{3}$$

W trójkącie CDE odcinek DF jest dwusieczną kąta CDE, a zatem $CF : FE = CD : DE$, czyli

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{3a}. \tag{4}$$

Z połączenia zależności (3) i (4) widać, że

$$2x = 3a, \qquad 2y = b. \tag{5}$$

Teza $x = y + z$, do której wcześniej zostało sprowadzone zadanie, wynika natychmiast ze związków (2) i (5).

862. Przyjmijmy, że graf ma n wierzchołków. Wybierzmy dowolny wierzchołek $\mathbf{v}_0$. Ustalmy liczbę naturalną r i weźmy pod uwagę wszystkie możliwe ścieżki długości r wychodzące z tego wierzchołka. Ich liczba wynosi co najmniej $(m + 1)^r$, bo z każdego wierzchołka wychodzi co najmniej $m{+}1$ krawędzi. Na każdej z tych ścieżek widzimy pewną sekwencję kolorów. Liczba możliwych sekwencji jest równa m^r. Każda z tych ścieżek kończy się w jednym z n wierzchołków grafu. Niech więc r będzie taką liczbą, że $(m + 1)^r > nm^r$ (dla zadanych wartości m, n taka liczba r niewątpliwie istnieje). Wówczas pewne dwie ścieżki o identycznej sekwencji kolorów docierają do tego samego wierzchołka; nazwijmy go $\mathbf{v}_1$ (może być kilka wierzchołków o tej własności; wybieramy jeden z nich).

Oznaczmy te dwie ścieżki symbolami α, β (możemy przyjąć, że wierzchołki i krawędzie są zawczasu ponumerowane i ustalić dowolny algorytm, wybierający wierzchołek $\mathbf{v}_1$, ścieżkę α i ścieżkę β).

Powtarzamy schemat; rolę wierzchołka $\mathbf{v}_0$ przejmuje wierzchołek $\mathbf{v}_1$. Znajdujemy dwie różne ścieżki długości r, o identycznej sekwencji kolorów, docierające do wspólnego wierzchołka $\mathbf{v}_2$; znów jedną z nich oznaczamy symbolem α, drugą β (według przyjętego algorytmu). Iterując postępowanie (indukcja), dostajemy ciąg wierzchołków $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots$ W każdym z nich mamy do wyboru kontynuację typu α lub β; i przy każdej kontynuacji otrzymamy ścieżki (długości $r, 2r, 3r, \ldots$) o identycznej sekwencji kolorów. Możliwość wyboru na każdym kroku (α lub β) generuje nieprzeliczalnie wiele ścieżek (nieskończonej długości), o jakie chodzi.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.