

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$   $J \cdot s$   $\pi=3,141592\dots$

# deltoid

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

NR 8 (591) 2023

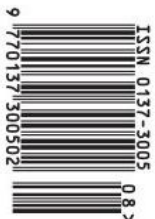
CENA 6 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)




Co kodują  
cienie?

str. 6

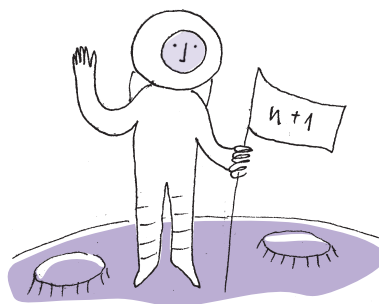


Nakład: 2800 egz.

## SPIS TREŚCI NUMERU 8 (591)

„Experiment” z nieskończonością <i>Miroslaw Lachowicz</i>	str. 1
 Zadania	str. 3
Nowe przygody papierowej tasiemki <i>Piotr Pikul</i>	str. 4
Co kodują cienie? <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 6
Twierdzenie Tomaszewskiego <i>Aleksander Pawlewicz</i>	str. 8
 Przypadki chodzą po... laboratoriach <i>Magdalena Fikus</i>	str. 10
Wyniki olimpiad 2022/2023	str. 11
Problem kozy a piłka w puszcze <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 15
ALPINE: holistyczne spojrzenie na młode galaktyki we wczesnym Wszechświecie <i>Michael Romano</i>	str. 16
Janek matematyk <i>Mariusz Skalba</i>	str. 18
Klub 44	str. 20
Prosto z nieba: Najsamotniejsze galaktyki we Wszechświecie	str. 22
Niebo w sierpniu	str. 22
Aktualności	str. 24
Najgorszy sort odkrycia naukowego	
 Łańcuchy Markowa – część 2 <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

**W następnym numerze:  
Mały krok dla człowieka,  
wielki skok dla indukcji.**



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, prof. UW, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, prof. UW, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Marta Gródek, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# „Experyment” z nieskończonością

Miroslaw LACHOWICZ\*

\*Instytut Matematyki Stosowanej  
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Międzynarodowe Spotkania Artystyczne  
„Experyment”



Logo „Experymentu” 2022. Zdjęcie wykonane przez Dorotę Bulińską

W Zbąszyniu, nad jeziorem Błędno, w zachodniej Wielkopolsce corocznie odbywa się „Experyment” (kochana Redakcjo: proszę nie zmieniać pisowni, tak właśnie się nazywa: jak Experyment to eksperyment [Zgoda. – przyp. red.]). Jest to międzynarodowe spotkanie artystów posługujących się różnymi środkami wyrazu. Teatr, muzyka, taniec, malarstwo, fotografia, a przede wszystkim działania artystyczne, które trudno ująć w jednym określeniu. Jest to wydarzenie unikalne na dużą (światową, moim zdaniem) skalę. Jest to święto otwarcia, poszukiwania i znajdowania wspólnego języka – również dosłownie. To prawdziwy fenomen, jakiego nie spotkałem w innych miejscach. Experyment dzieje się od 2001 roku, trzymany silną ręką organizatorów – małżeństwa Katarzyny Kutzmann-Solarek i Ireneusza Solarka. Oby dział się dalej!

W roku 2022 Experyment pod tytułem „Bezkręś – infinity” odbywał się po raz pierwszy w samym środku upalnego lata (bywał na początku całkiem letniego lata), w dniach 23–29 lipca. Organizator, Ireneusz Solarek, uznał, że skoro i tak się tam kręcę, to mógłbym coś powiedzieć. Rzeczywiście mogłem. Wprawdzie tytuł przerastał moje (zapewne nie tylko moje) możliwości, ale jak Experyment, to eksperyment (to już zresztą napisałem). Najpierw się więc zgodziłem, a później przestraszyłem, co chyba było właściwą kolejnością.

Co ma zrobić matematyk w takiej eksperymentalnej sytuacji? Powiedzieć, że w zasadzie matematycy wcale nie potrzebują nieskończoności, choć chętnie o niej mówią? Że z nieskończonością jest jak z czasem? Jak nas nie pytają, to wiemy, a jak pytającemu chcemy wytłumaczyć, to nie wiemy. Zupełnie jak święty Augustyn.

Sytuacja wyglądała na dość beznadziejną, gdyż należało się spodziewać statystycznego podejścia do matematyki u potencjalnych odbiorców. Czyli „matematyka jest królową nauk”, ale lepiej się od niej trzymać z daleka. Nawiasem mówiąc: ciekawe, czy ktoś potrafiłby uzasadnić, o co chodzi z tą królową, gdyż patrząc na naukę, raczej tego nie widać. Nawet gdyby królową rozumieć we współczesnym sensie brytyjskim.

Oto jednak w środku upalnego lipcowego dnia w sali nieczynnego zbąszyńskiego muzeum zebrała się tak liczna grupa osób, że więcej by już tam nie weszło (a wydawałoby się, że zawsze może wejść jeszcze jedna, jak w znanym dowcipie o indukcji). Nieskończoność przyciągnęła?

Zacząłem od akcji „przekażmy sobie wstęgę Möbiusa” na znak poszukiwania prawdy. Ze wstęgą Möbiusa można robić cudeńka, na przykład przecinając ją wzdłuż, a potem jeszcze raz. . . Nawiasem mówiąc, tego typu obiekt był znany przed Augustem Ferdinandem Möbiusem (1790–1868) – można go znaleźć na mozaikach rzymskich z III wieku. Wspomniałem o grafikach Mauritsa C. Eschera (1898–1972), inspirowanych wstęgą Möbiusa, z mrówkami (czerwonymi) chodzącymi po wstędze. Szwajcarski rzeźbiarz Max Bill (1908–1994) tworzył rzeźby o kształcie przypominającym wstęgę Möbiusa, nazywając ją „wstęgą bez końca”. Odniesienia do niej w sztuce są tak liczne, że ich wymienienie wymagałoby długiego opisu. Stylizowana wstęga jest symbolem recyklingu, a zatem czegoś „nieskończonego” (powiedzmy, potencjalnie). A skoro już przy recyklingu jesteśmy, warto wspomnieć, że nieskończone byłyby wszystkie procesy okresowe. „Byłyby”, gdyby istniały – okresowość przez nas obserwowana jest jednak tylko efektem we (względnie) małej skali czasowej; nie jest ona okresowością matematyczną.

Tak jak okrąg jest idealizacją czegoś okrągłego, tak nieskończoność jest idealizacją czegoś bardzo dużego. Nie mamy wprawdzie na co dzień bezpośrednio do czynienia z wielkimi liczbami, ale one otaczają nas zewsząd. Oto kilka ogromnych liczb „z życia”, które łatwo napisać, jednak tak naprawdę trudno jest sobie wyobrazić. Szacuje się, że w naszej galaktyce znajdują się setki miliardów

W Delcie ukazało się wiele artykułów o nieskończoności. Wymieniam niektóre, zachęcając do poszukiwań.

A. Białynicki-Birula, *Po co matematykowi nieskończoność?*,  $\Delta_{07}^5$

W. Guzicki, *Kombinatoryka i nieskończoność*,  $\Delta_{13}^7$

J. Jaszńska, *Równe i różne nieskończoności*,  $\Delta_{13}^7$

M. Kordos, *Tako rzecze Arystoteles*,  $\Delta_{13}^7$

M. Lachowicz, *Nieskończoność nieskończenie użyteczna*,  $\Delta_{13}^7$

M. Szurek, *Czy nieskończoność jest?*,  $\Delta_{13}^7$

J. Tyszkiewicz, *Po co mi nieskończoność?*,  $\Delta_{13}^7$

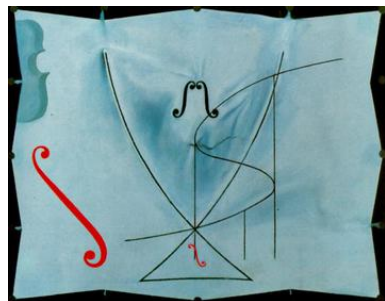
M. Korch, *Nieskończoność*,  $\Delta_{19}^1$

M. Korch, *Hotel Hilberta*,  $\Delta_{19}^1$

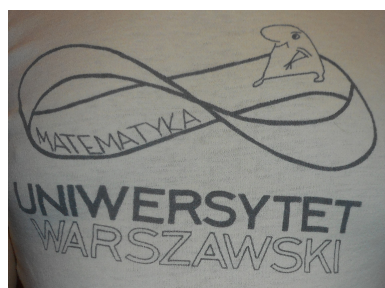
M. Korch, *Nieskończoność nieskończoności*,  $\Delta_{20}^1$



Silną inspiracją była dla mnie książka P. Odifreddiego *Ritratti dell'infinito* (Rizzoli, 2020) oraz liczne jego prezentacje na YouTube.



S. Dalí, „Ogon jaskółki” (1983). Źródło: Wikipedia



Grafika na koszulce Wydziału MIM UW z lat 80. ubiegłego wieku

gwiazd, zaś samych galaktyk w widzialnym (obserwowalnym) Wszechświecie są biliony (podobno około dwóch). Liczba neuronów w mózgu człowieka to (prawie) sto miliardów. Archimedes z Syrakuz (287–212 p.n.e) oszacował liczbę ziarenek piasku, które wypełniłyby cały Wszechświat (taki, jak go sobie wyobrażał Archimedes) na  $10^{63}$ . Było to ćwiczenie na wynaleziony przez niego wzór na objętość kuli, a cała trudność dotyczyła zapisu tej dużej liczby w systemie używanym przez Greków. Współcześnie liczbę atomów we Wszechświecie szacuje się (bardzo zgrubnie) na  $10^{80}$ .

W życiu codziennym często 1000 to już dużo. Zapewne odwołując się do tej intuicji, John Wallis w 1655 roku przyjął na oznaczenie nieskończoności znany dzisiaj symbol  $\infty$ . Jak się wydaje, były to dwie stylizowane litery D lub jedna litera M oznaczające w systemie rzymskim 1000. Niektórzy jednakże utrzymują, że mogła to być stylizowana literka  $\omega$  – ostatnia litera alfabetu greckiego.

Odniesienie do nieskończoności można znaleźć w malarstwie – na przykład w dziełach wspomnianego już Eschera oraz Salvadora Dalego (1904–1989). Escher tworzył parkietaże z elementami zmniejszającymi w kierunku brzegu. Oczywiście nieskończoności nie mógł stworzyć, ale udało mu się ją zasugerować. Zbliżając się do brzegu, elementy stają się coraz mniejsze, a zatem „dojście” do brzegu jest niemożliwe. Jest to odniesienie do geometrii hiperbolicznej (o której można wiele przeczytać w  $\Delta_{18}^8$ ). Podobny efekt uzyskał w grafikach, np. w „Cyklu granicznym III” z roku 1959. Dalí w sposób istotny inspirował się matematyką. Dzieło „Twarz wojny” (jakże aktualne obecnie) z roku 1940 sugeruje nieskończone kopie przerażającej twarzy jako okropieństwa wojny. Ostatnie dzieło Dalego, „Ogon jaskółki”, było bezpośrednio zainspirowane matematyką. Na obrazie umieszczone są symbole całek i linie odnoszące się do teorii katastrof René Thoma. Dalí określił teorię Thoma jako „najpiękniejszą teorię estetyczną na świecie”. W kilku swoich dziełach Dalí wykorzystywał geometrię czterowymiarową. Najslawniejszym przykładem jest „Corpus hypercubus” (zwany też „Ukrzyżowaniem”) z 1954 roku.

Zgodnie z koncepcją Arystotelesa (384–322 p.n.e.) można mówić o nieskończoności potencjalnej lub aktualnej. Pierwsza odnosi się do obiektów skończonych, ale nieograniczonych (jak liczby naturalne). W matematyce sprowadza się do rozpatrywania pojęcia granicy. Nieskończoność aktualna (dokonana) istnieje bezpośrednio. Dzisiaj może to się wydać dziwne, ale wielu matematyków nie akceptowało takiej nieskończoności. Gottfried W. Leibniz (1646–1716) powiedział, że nie ma niczego bardziej namacalnego niż absurdalność idei liczby właściwie nieskończonej. Podobnie Carl F. Gauss (1777–1855) napisał: „Protestuję przeciw użyciu nieskończonych wielkości, jako czegoś kompletnego. To nigdy nie jest dopuszczalne w matematyce”.

Dopiero Georg Cantor (1845–1918) wprowadził nas do Raju, przynajmniej zdaniem Dawida Hilberta (1862–1943): „Nikt nas nie wypędzi z Raju, który stworzył Cantor”. Badania pojęcia nieskończoności doprowadziły Cantora do konkluzji, że nie ma jednej jedynej (jak matki), ale nieskończenie wiele nieskończoności. Odsyłam tutaj do wymienionych na marginesie poprzedniej strony artykułów Michała Korcha, które precyzują, co należy przez to rozumieć. Odnosząc się do sprawy popularnie, można powiedzieć, że Cantor był w stanie dla „każdej nieskończoności” określić „nieskończoność od niej większą”. W ten sposób tworzył się układ nieskończoności i pewność, że nie może istnieć

największa. Witkacy (S.I. Witkiewicz, 1885–1939) w dramacie „Tumor Mózgowicz” ujął to tak:

*Nad zrębem planety,  
Pośród gwiazdnej nocy,  
Szereg alefów w nieskończoność pełnie.  
I nieskończoność, unieskończoniona  
Zamiera w sobie, przez siebie zdradzona.*

Dla Cantora, formalnie protestanta (luteranina), był to również problem natury teologicznej. Jego kontakty z odpowiednią kongregacją w Watykanie i jej prefektem kardynałem Johannesem B.G. Franzelinem (1816–1886) to zapewne temat na bardzo ciekawą książkę (lub film), i dziwne jest, że jeszcze taka się nie pojawiła (albo ja o tym nie wiem). Sam fakt, że luteranin zwraca się do kongregacji katolickiej, jest interesujący. Ostateczne ustalenia były pozytywne dla Cantora: uznano, że nie ma problemów teologicznych z jego odkryciem. Prawdziwą nieskończonością jest ta, która odpowiada Bogu, a te Cantora to tylko obiekty pozaskończone (*transfinite*). Wikipedia (w wydaniu angielskim) ujmuje to tak: *W matematyce liczby pozaskończone to liczby, które są „nieskończone” w tym sensie, że są większe niż wszystkie liczby skończone, ale niekoniecznie absolutnie nieskończone. Należą do nich liczby kardynalne pozaskończone, które są liczbami kardynalnymi używanymi do ilościowego określania wielkości zbiorów nieskończonych, oraz liczby porządkowe pozaskończone, które są liczbami porządkowymi używanymi do*

uporządkowania zbiorów nieskończonych. Dalej to samo źródło: *Niewielu współczesnych pisarzy podziela te skrupuły; obecnie przyjęto zwyczaj określania liczb kardynalnych i porządkowych pozaskończonych jako liczb nieskończonych. Niemniej jednak termin „transfinité” również pozostaje w użyciu.*

Dzisiaj teoria Cantora należy do kanonu wiedzy matematycznej, ale środowisko przyjmowało z trudem i oporem jego idee. Można wprost powiedzieć: nie było Cantorowi łatwo! Przeczy to popularnej tezie, że w matematyce albo coś jest prawdziwe, albo nie, i nie ma innych kryteriów. Są, są!

Na koniec warto wspomnieć o liczbach nadrzeczywistych (*surreal numbers*) wprowadzonych przez Johna H. Conwaya (1937–2020), będących uogólnieniem

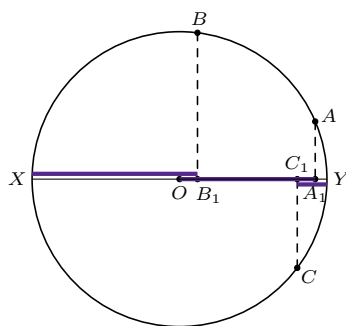
liczb kardynalnych, na których można przeprowadzać działania arytmetyczne. Dobrym wprowadzeniem do tej tematyki jest książka Donalda E. Knutha (wybitny informatyk, szerzej znany m.in. jako twórca systemu składu komputerowego  $\text{\TeX}$ , w którym składana jest również *Delta*).

D.E. Knuth, *Liczb nadrzeczywiste. Jak dwoje byłych studentów nakręciło się na czystą matematykę i odnalazło pełnię szczęścia*, Copernicus Center Press, 2022.

Odkrywanie i badanie nieskończoności pozostanie najwyższym szczytem usiłowań intelektualnych człowieka. Narzuca się analogia matematyki i himalaizmu. Jedno i drugie warto robić, by przekonać się, jak wysoko człowiek może się wznieść. Za jedno i za drugie można zapłacić wysoką cenę, ale nie powinno być miejsca na rezygnację.



## Zadania



Przygotował Dominik BUREK

**M 1753.** W okręgu  $\Omega$  o środku w punkcie  $O$  narysowano cięciwy  $AB$  i  $AC$ , których długość jest równa promieniowi  $\Omega$ . Oznaczmy przez  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  rzuty prostokątne kolejno punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$  na dowolną średnicę  $XY$  okręgu  $\Omega$ . Udowodnić, że długość jednego z odcinków  $XB_1$ ,  $OA_1$  i  $C_1Y$  jest sumą długości dwóch pozostałych.

Rozwiązanie na str. 8

**M 1754.** Dane są liczby rzeczywiste nieujemne  $x, y, z$ , z takie, że

$$\frac{2}{1+x^3} + \frac{2}{1+y^3} + \frac{2}{1+z^3} = 3.$$

Udowodnić, że

$$\frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1-y}{1-y+y^2} + \frac{1-z}{1-z+z^2} \geq 0.$$

Rozwiązanie na str. 19

**M 1755.** Udowodnić, że dowolną dodatnią liczbę wymierną można przedstawić jako iloraz iloczynów silni liczb pierwszych (niekoniecznie różnych), przykładowo:

$$\frac{10}{9} = \frac{2! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

Rozwiązanie na str. 17

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1077.** Po sformułowaniu przez Newtona prawa powszechnego ciężenia nieznaną pozostawała wartość występującej w nim stałej grawitacji  $G$ . Znany był jednak promień Ziemi,  $R \approx 6400$  km, i typowe gęstości skał występujących na jej powierzchni,  $\rho \approx 2,7$  g/cm<sup>3</sup> (np. granit  $\rho = 2,7$  g/cm<sup>3</sup>, kwarc  $\rho = 2,65$  g/cm<sup>3</sup>, wapień  $\rho = 2,8$  g/cm<sup>3</sup>), oraz wartość przyspieszenia spadku swobodnego,  $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup>.

(a) Na podstawie tych danych „pomóż Newtonowi” i oszacuj wartość stałej grawitacji  $G$ , przyjmując stałą gęstość rozkładu masy Ziemi.

(b) Po zmierzeniu przez Cavendisha wartości stałej  $G$  (uzyskał wartość bardzo bliską przyjmowanej obecnie,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>) można było wyznaczyć masę Ziemi,  $M \approx 6,0 \cdot 10^{24}$  kg, i jej średnią gęstość  $\rho \approx 5,5$  g/cm<sup>3</sup>. Oszacuj, ile wynosi  $\rho_c$  – gęstość materii w środku Ziemi. Przyjmij liniowy wzrost gęstości z głębokością.

Uwaga: Dane w treści zadania odpowiadają wartościom przyjmowanym współcześnie.

Rozwiązanie na str. 18

**F 1078.** W badaniach promieniotwórczości używa się liczników cząstek. Po zarejestrowaniu impulsu (cząstki) licznik powraca do stanu „gotowości” do rejestracji następnego impulsu w czasie  $\tau$ , zwanym *czasem martwym licznika*. Rozpady promieniotwórcze mają charakter przypadkowy, ale można założyć, że ich średnia liczba na jednostkę czasu jest stała – zakładamy przy tym, że czas pomiaru  $t$  jest długi w porównaniu z czasem martwym  $\tau$ , ale krótki w porównaniu z czasem połowicznego rozpadu badanej próbki.

(a) W czasie  $t$  zarejestrowano  $M$  cząstek. Oszacuj liczbę cząstek, które rzeczywiście dotarły do licznika. Przyjmij, że  $t \gg M\tau$ .

(b) Jak wyznaczyć czas martwy licznika, dysponując dwoma różnymi źródłami promieniowania?

Rozwiązanie na str. 19

# Nowe przygody papierowej tasiemki

Piotr PIKUL\*

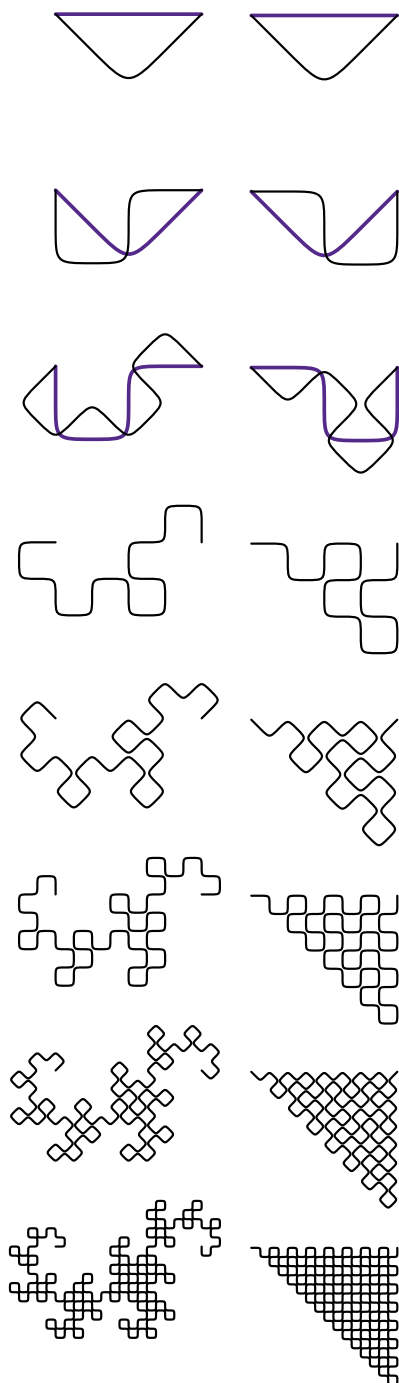
\* Wydział Matematyki i Informatyki,  
Uniwersytet Jagielloński

Kiedy jeszcze niedawno uważałem, że dekada jest czymś bardzo podobnym do ery geologicznej, na łamach *Delty* ukazał się artykuł Tomasza Idziaszka *Fraktalny świat papierowej tasiemki* ( $\Delta_{11}^7$ ). Czytelnicy, w tym autor niniejszego artykułu, mogli się z niego dowiedzieć o smoczey krzywej, której kolejne przybliżenia konstruujemy z wielokrotnie złożonego na pół paska papieru, rozwiniętego tak, aby wszystkie zagięcia tworzyły kąt prosty. Fraktal otrzymany jako granica tych przybliżeń zwany jest *smokiem Heighwaya*. Od razu pojawiło się u mnie pytanie o efekty innych metod składania tytułowej tasiemki. Dobrze, że artykuł wspominał o algorytmicznym podejściu do generowania takich krzywych, bo inaczej trudno byłoby uzyskać (tak) ciekawe rezultaty. Na szczęście pierwszy przykład, o którym opowiem, jeszcze daje się łatwo wykonać, nawet jeśli nie mamy *czarnego pasa w origami*.

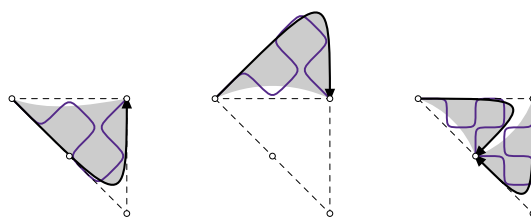
Jaka może być najprostsza modyfikacja konstrukcji Heighwaya? Możemy za każdym razem odwracać naszą składankę na drugą stronę. Nie jest oczywiste, że to cokolwiek zmienia, ale od tego są eksperymenty, aby się przekonać! Czytelnika, który w miejsce samodzielnej zabawy paskami papieru od razu zacznie studiować rysunki na marginesie, uprzedzamy, że co drugi rysunek jest odbity symetrycznie (względem osi poziomej), aby łatwiej było zauważyć relację pomiędzy kolejnymi generacjami. Ostatecznie, zamiast odwracać całą tasiemkę, możemy każde kolejne złożenie wykonywać w przeciwną stronę niż poprzednie (raz zaginając do góry, a raz do dołu). Rozpieszczony przez smoczą krzywą miłośnik „prawdziwych” fraktali będzie zapewne rozczarowany. Kolejne kroki konstrukcji przybliżają bowiem krzywą... wypełniającą trójkąt prostokątny równoramienny.

Należy w tym miejscu nadmienić, że po każdym kolejnym złożeniu trójkąt „wypełniany” przez krzywą będzie coraz mniejszy. Liczba odcinków wypełniających trójkąt rośnie proporcjonalnie do kwadratu liczby odcinków przypadającej na długość jego boku (czyli proporcjonalnie do pola powierzchni). Skracając „odcinek jednostkowy” dwukrotnie (dzieje się to po każdym złożeniu), czterokrotnie zwiększamy „zapotrzebowanie” na odcinki wypełniające trójkąt, jednocześnie zaśledwie podwajając ich liczbę. Wygodnie jest zatem myśleć, że za każdym razem długość krzywej rośnie  $\sqrt{2}$ -krotnie. Przy okazji zauważymy, że przejście do kolejnego kroku można przedstawić jako zastąpienie każdego odcinka dotychczasowej łamanej przez dwa wzajemnie prostopadłe (tworzące ze swym „przodkiem” trójkąt prostokątny równoramienny). Ta konstrukcja pozwala uzasadnić, że krzywa nigdy nie przecina samej siebie (choć jeśli nie zaokrąglimy jej na wierzchołkach, będą to punkty odwiedzane dwukrotnie), ale po więcej szczegółów tego rozumowania odsyłam do tekstu wspomnianego na początku.

Spróbujmy odpowiedzieć sobie na pytanie, czy tak zadana krzywa naprawdę wypełnia trójkąt prostokątny równoramienny – kilka rysunków nie jest przecież dowodem! Rozważmy rozkładanie paska papieru. Ewidentnie obie połówki staną się przystającymi figurami. Co więcej, te figury to poprzednie generacje krzywej, choć odbite symetrycznie i pomniejszone. Stąd wniosek, że kolejny krok konstrukcji zakłada pomniejszenie krzywej, odbicie symetryczne (odwracamy tasiemkę) oraz umieszczenie jej dwóch kopii w określony sposób (prostopadle, ze wspólnym „końcem”). Innymi słowy, jest to system złożony z dwóch przekształceń afinicznych, który pozwala tworzyć kolejne generacje.

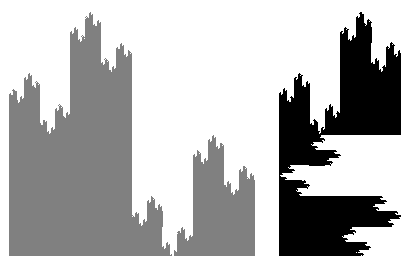


Początkowe generacje smoczey krzywej oraz jej „odwracanego” krewnego

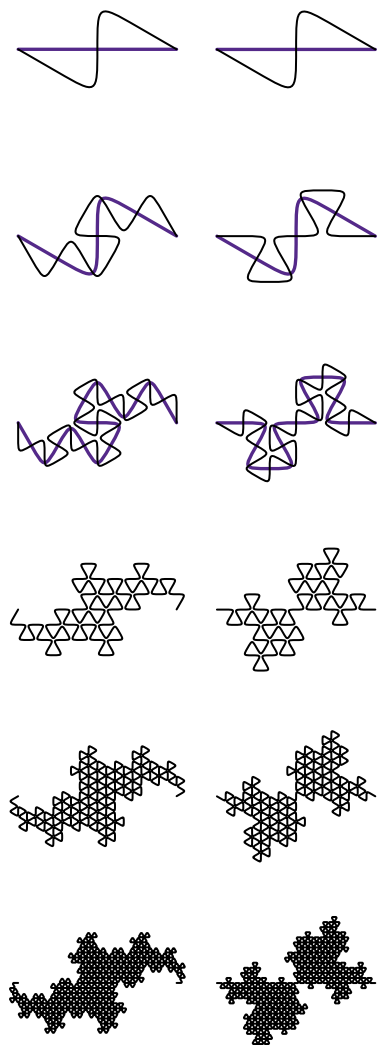


Oba rozważane przekształcenia są *zweżające* (zmniejszają odległości między punktami  $\sqrt{2}$ -krotnie). Można stąd wywnioskować, że *zweżający* jest również

W  $\Delta_{11}^7$  znajduje się także artykuł Przemysława Kiciaka o systemach iterowanych przekształceń (IFS), gdzie Czytelnik znajdzie nieco więcej szczegółów.



Figury graniczne przy odwracaniu co drugi raz



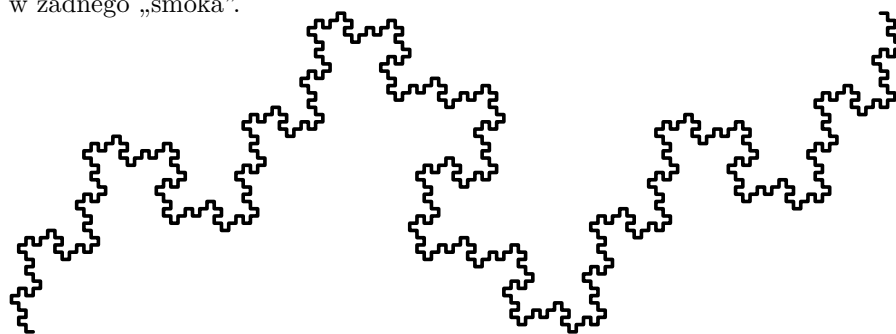
Początkowe generacje trójsmoka (terdragona) oraz wariantu z odwracaniem tasiemki (trójmuszki)

układ tych przekształceń, rozumiany jako przekształcenie określone na przestrzeni niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów płaszczyzny (należy oczywiście odpowiednio dobrać metrykę na tej przestrzeni; nie będziemy tu wchodzić w szczegóły). Dzięki twierdzeniu Banacha o punkcie stałym, startując od dowolnego początkowego zbioru (domkniętego i ograniczonego), będziemy zbliżali się do jedynego punktu stałego naszego przekształcenia. Skoro kolejne generacje krzywej powstają w wyniku iterowania wspomnianego systemu, będą one zbiegały do tego konkretnego zbioru ograniczonego. Czytelnik zechce sprawdzić, że trójkąt prostokątny równoramienny faktycznie jest punktem stałym (sumą swoich obrazów w obu przekształceniach).

To może teraz spróbujemy odwracać naszą tasiemkę co drugi raz? Jest to sensowna konstrukcja i daje inny rezultat niż dwie poprzednie. Trudniej ją jednak opisać jako system przekształceń iterowanych, ponieważ przejścia do kolejnych generacji nie są takie same (jedno wiąże się z odbiciem symetrycznym, a drugie nie). Należałoby potraktować dwa kroki konstrukcji jako jeden, bardziej skomplikowany (złożony z czterech przekształceń). Tak naprawdę, w zależności od tego, czy zakończymy konstrukcję na kroku parzystym, czy nieparzystym, otrzymamy inny rezultat, ponieważ „dwukrok” pomiędzy generacjami parzystymi to nieco inne przekształcenie niż to startujące w kroku nieparzystym.

Czytelnik zapewne już się domyśla, że odwracając co trzeci raz, będziemy mieli do wyboru trzy figury graniczne. Czy muszą być one różne? Aż strach pomyśleć, co by było, gdybyśmy odwracali pasek w nieregularnych interwałach...

Do tej pory rozważaliśmy składanie tytułowej tasiemki na pół. Samo to (oraz odwracanie) daje nam już nieskończenie wiele możliwości, ale to nie powód, aby nie szukać dalej. Może spróbujemy składać na trzy? Jeśli będziemy każdorazowo związać krzywą w „minimalistyczną harmonijkę” (lub, jak kto woli, literę N), po rozłożeniu dostaniemy poskręcaną linię, która jednak nijak nie formuje się w żadnego „smoka”.



Jeśli jednak rozłożymy ją na siatce trójkątnej (czyli każde zagięcie będzie tworzyło kąt  $60^\circ$ ), otrzymamy efekt bardziej zbliżony do smoczej krzywej, występujący w literaturze pod nazwą *terdragon* (trójsmok?). Podobnie jak klasyczny smok Heighwaya, trójsmok może wypełnić płaszczyznę, a do tego posiada środek symetrii. Tak jak w przypadku smoczej krzywej, przyglądając się, czym zastępujemy każdy odcinek podczas przechodzenia do kolejnej generacji, możemy wywnioskować brak samoprzecięć.

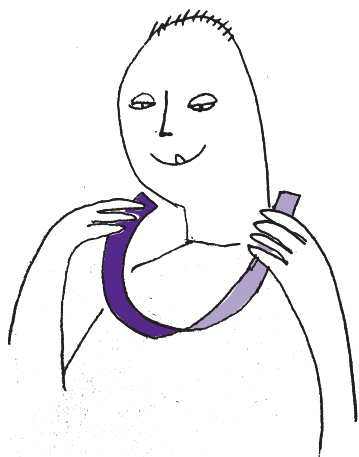
Jeśli konstrukcję trójsmoka zmodyfikujemy poprzez każdorazowe odwracanie naszego „origami”, otrzymamy zupełnie inny kształt, o równie fraktalnej naturze oraz intrygującej, wąskiej talii. Pomimo pozornego posiadania dwóch części, ta *muszka* (trójmuszka?) jest sumą trzech pomniejszonych kopii samej siebie, co raczej nie jest zaskakujące, biorąc pod uwagę metodę składania. Ponadto ma ona zdolność wypełniania płaszczyzny. Fakt ten możemy uzasadnić, zaczynając od pokrycia pewnej trójkątnej siatki (kraty?) początkowymi etapami konstrukcji (choćby krokami zerowymi – prostymi odcinkami) i zauważenia, że przy przejściu do kolejnej generacji nadal cała zagęszczona siatka będzie pokryta. Dla *zwykłego* trójsmoka taki argument również działa, a na kwadratowej siatce można w analogiczny sposób uzasadnić szczelność pokrycia płaszczyzny smokami Heighwaya.



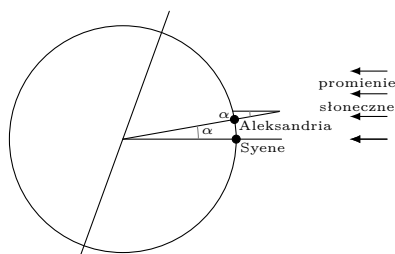
Opisana operacja na ciągach (złożenie w kształt B taśmki poskładanej uprzednio w kształt A) jest (co nie wydaje się oczywiste) łączna  $((A * B) * C = A * (B * C))$ . Ma to kluczowe znaczenie, także dla dowodu pewnych przytoczonych w artykule faktów.  
Ciąg L również daje smoczą krzywą, choć odbitą symetrycznie.

Mówiąc o „równoważności”, mamy na myśli przybliżanie tej samej granicznej figury.

Brak stykających się zakrętów to po części wina siatki sześciokątnej.



\* Wydział Matematyki i Fizyki  
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska



Rys. 1  
Przez moc zbioru skończonego rozumiemy liczbę jego elementów. Moc zbioru  $E$  będziemy oznaczać przez  $|E|$ .

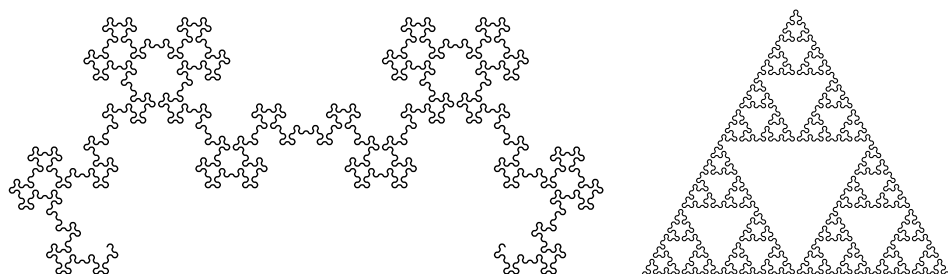
Jeszcze tylko kilka słów na temat kodowania opisanych fraktali. We *Fraktalnym świecie*... była mowa o przetwarzaniu ciągów (np. LLPLLPP) opisujących kolejne zakręty krzywej. Przechodząc do kolejnej iteracji, pomiędzy każde dwie litery dotychczasowego ciągu (a także na początku i na końcu) wstawiamy „wzór składania”, przy czym co drugą wstawkę „sprzęgamy”. Sprzężenie polega na odwróceniu kolejności zakrętów i zamianie ich na przeciwne (np.  $\overline{PPLP} = LPLL$ ). Odwracanie taśmki na drugą stronę realizujemy poprzez zamianę wszystkich liter na przeciwne (tj.  $P \leftrightarrow L$ ), bez odwracania kolejności. Dla *trójmuszki* pierwsze trzy ciągi prezentują się następująco (akurat  $\overline{PL} = PL$ ):

$$PL \quad PL \ L \ PL \ P \ PL \quad PL \ L \ PL \ P \ PL \ P \ PL \ L \ PL \ P \ PL \ L \ PL \ L \ PL \ P \ PL$$

Warto tu wspomnieć o możliwości opisywania tej samej konstrukcji za pomocą różnych podstawowych ciągów zagięć. Na przykład klasyczną smoczą krzywą generujemy za pomocą ciągu P, ale moglibyśmy użyć PPL. Jeśli będziemy stosować odwracanie taśmki (po każdym złożeniu), to przedstawione sposoby składania przestaną być „równoważne”. „Metoda P” zaprowadzi nas do trójkąta, a „metoda PPL” z odwracaniem za każdym razem okazuje się innym sposobem opisu „metody P” z odwracaniem co drugi raz.

Na zakończenie jeszcze jeden przykład: składanie PP, czyli na trzy części, ale *do środka*, zamiast w trójsmoczą *harmonijkę*. W trzecim kroku konstrukcji ciąg zakrętów zawiera już fragment PPPP, czyli zakręcając o  $90^\circ$ , otrzymamy samoprzecięcie (z nałożeniem na siebie całych odcinków krzywej). Warto zatem rozważyć jakiś rozartykowany kąt składania. Została nam jeszcze jedna elegancka siatka na płaszczyźnie – sześciokątna. Jeśli damy jej szansę, zaginając naszą krzywą pod kątem  $120^\circ$ , otrzymamy intrygujący *fraktalny* wzorek, który nie tylko nie ma samoprzecięć, ale nawet nie ma stykających się wierzchołków! Nie tworzy też jednak wypełnionej figury.

To teraz jeszcze, z przyzwyczajenia, zmodyfikujmy konstrukcję poprzez każdorazowe odwracanie. Wygląda znajomo? Zaiste fraktalny jest świat papierowej taśmki!



## Co kodują cienie?

Jarosław GÓRNICKI\*

Spektakularne wykorzystanie cienia pokazał w Starożytności Eratostenes, szacując około 240 r. p.n.e. wielkość Ziemi. Prześledźmy jego rozumowanie.

W dniu przesilenia letniego w Syene (dzisiejszy Assuan) stojący prosto drąg nie rzuca cienia w południe. W tym samym momencie drąg w Aleksandrii rzuca cień, który odpowiada kątowi  $\alpha = 7\frac{1}{5}^\circ (= \frac{1}{50} \cdot 360^\circ)$ , jak na rysunku 1.

Eratostenes przyjął, że Aleksandria i Syene leżą na tym samym południku (w rzeczywistości Syene leży o  $3^\circ$  na wschód od Aleksandrii) i odległość między nimi jest równa 5000 stadiów (1 stadion  $\approx 160$  m). Daje to długość południkowego obwodu Ziemi równą 250 000 stadiów, czyli około 40 000 km. Całkiem niezłe!

Pozostając w cieniu geometrii, rozważmy teraz następujący problem. Załóżmy, że  $E \subset \mathbb{R}^3$  jest skończonym zbiorem punktów (ogólnie, zbiorem ograniczonym i domkniętym), dla którego znamy jego rzuty prostokątne  $E_{xy}$ ,  $E_{xz}$ ,  $E_{yz}$  na trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny. Czy można oszacować moc (objętość) zbioru  $E$ , znając jedynie moc (pole) jego rzutów? Pozytywną odpowiedź na to pytanie daje nierówność Loomisa–Whitneya, której najprostszą wersję prezentujemy poniżej:

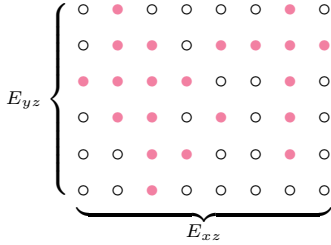


**Twierdzenie 1** (nierówność Loomisa–Whitneya, 1949). *Dla dowolnego skończonego zbioru punktów  $E \subset \mathbb{R}^3$*

$$|E| \leq \sqrt{|E_{xy}| \cdot |E_{xz}| \cdot |E_{yz}|},$$

gdzie  $E_{xy}$ ,  $E_{xz}$ ,  $E_{yz}$  to rzuty prostokątne zbioru  $E$  na trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny.

*Dowód.* Poprowadzimy rozumowanie indukcyjne ze względu na liczbę różnych współrzędnych  $z$ -owych w zbiorze  $E$ .



Rys. 2. Punkty zbioru  $E$  oznaczono kolorem. Nierówność  $|E| \leq |E_{xz}| \cdot |E_{yz}|$  jest oczywista i oznacza jedynie, że w zbiorze  $E$  jest nie więcej punktów niż w opisanym na nim prostokącie

Załóżmy najpierw, że wszystkie punkty zbioru  $E$  leżą na jednej płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny  $OXY$ . W tym przypadku  $|E| = |E_{xy}|$  i dla punktów leżących na wyróżnionej płaszczyźnie zachodzi  $|E| \leq |E_{xz}| \cdot |E_{yz}|$  (rys. 2), więc nierówność będąca tezą twierdzenia jest prawdziwa.

Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla  $k \geq 1$  (lub mniej) różnych współrzędnych  $z$ -owych w zbiorze  $E$ . Rozważmy przypadek, gdy tych współrzędnych jest  $k + 1$ . Niech  $\pi$  będzie płaszczyzną równoległą do płaszczyzny  $OXY$ , która dzieli zbiór  $E$  na dwa niepuste zbiory  $F$  i  $G$  i nie zawiera punktów zbioru  $E$ . Wtedy

$$|E| = |F| + |G|, \quad |E_{xz}| = |F_{xz}| + |G_{xz}|, \quad |E_{yz}| = |F_{yz}| + |G_{yz}|,$$

i oczywiście

$$|F_{xy}| \leq |E_{xy}| \quad \text{i} \quad |G_{xy}| \leq |E_{xy}|.$$

Zauważmy jeszcze, że dla dowolnych liczb  $a, b, c, d \geq 0$  prawdziwa jest nierówność  $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)}$ , co łatwo sprawdzamy przez podniesienie obu stron nierówności do kwadratu. Korzystając z założenia indukcyjnego i przedstawionych zależności, dostajemy:

$$\begin{aligned} |E| = |F| + |G| &\leq \sqrt{|F_{xy}| \cdot |F_{xz}| \cdot |F_{yz}|} + \sqrt{|G_{xy}| \cdot |G_{xz}| \cdot |G_{yz}|} \leq \\ &\leq \sqrt{|E_{xy}|} \cdot \left( \sqrt{|F_{xz}| \cdot |F_{yz}|} + \sqrt{|G_{xz}| \cdot |G_{yz}|} \right) \leq \\ &\leq \sqrt{|E_{xy}|} \cdot \left( \sqrt{|F_{xz}| + |G_{xz}|} \cdot \sqrt{|F_{yz}| + |G_{yz}|} \right) = \\ &= \sqrt{|E_{xy}| \cdot |E_{xz}| \cdot |E_{yz}|}. \end{aligned}$$

Odwołanie do twierdzenia o indukcji matematycznej kończy uzasadnienie.  $\square$

W ogólności nierówność Loomisa–Whitneya pozwala na przykład stwierdzić, że:

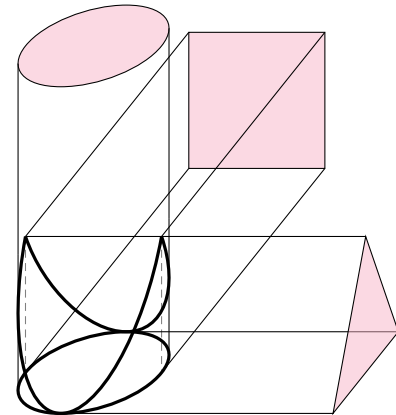
*Objętość bryły trójwymiarowej nie jest większa od pierwiastka kwadratowego z iloczynu pól rzutów prostokątnych tej bryły na trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny.*

Na przykład łatwiej oszacować objętość bryły, której trzy rzuty prostokątne dają cienie w kształcie koła, kwadratu i trójkąta równoramiennego, niż ją sobie wyobrazić (rys. 3). Jeśli bok kwadratu ma mieć długość 1, to prawa strona nierówności Loomisa–Whitneya jest w tym przypadku równa  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,886$ . A jaka jest objętość tej bryły? Choć nierówność Loomisa–Whitneya ma charakter geometryczno-analityczny, to jej rozmaite warianty (uogólnienia) pojawiają się m.in. w analizie funkcjonalnej, probabilistyce, algebrze, teorii informacji. Pokażemy teraz takie nieoczekiwane zastosowanie w teorii grafów.

*Grafem* na płaszczyźnie nazwiemy skończony zbiór punktów (wierzchołków) i krawędzi łączących niektóre z nich. Wykluczamy występowanie pętli, czyli krawędzi o tym samym początku i końcu, oraz krawędzi wielokrotnie łączących tę samą parę wierzchołków. Przez *trójkąt w grafie* rozumiemy zbiór trzech wierzchołków połączonych krawędziami.

**Twierdzenie 2.** *Jeśli graf zawiera  $k$  krawędzi, to ma co najwyżej  $\frac{\sqrt{2k^3}}{3}$  trójkątów.*

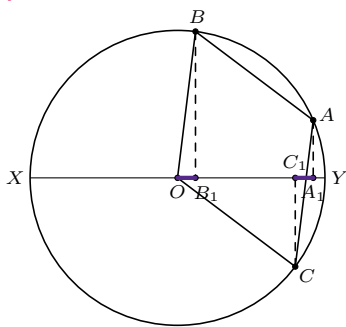
*Dowód.* Niech  $W$  będzie zbiorem wierzchołków grafu. Oznaczmy przez  $m$  liczbę występujących w nim trójkątów. Zbiór  $W^3 \subset \mathbb{R}^3$  jest zbiorem uporządkowanym trójek wierzchołków. Niech  $E \subset W^3$  będzie zbiorem wszystkich trójek wierzchołków, które tworzą w rozważanym grafie trójkąt.



Rys. 3



**Rozwiązanie zadania M 1753.**  
Rozważmy konfigurację taką, jak na rysunku.



Czworokąt  $ABOC$  jest rombem, więc rzuty prostokątne odcinków  $AC$  i  $BO$  na prostą  $XY$  są równe, czyli  $OB_1 = A_1C_1$ . Ponieważ  $OX = OY$ , dostajemy

$$\begin{aligned} XB_1 &= XO + OB_1 = \\ &= OY + A_1C_1 = OA_1 + C_1Y, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie.

Zbiór  $E$  ma  $6m$  elementów, gdyż każdemu trójkątowi w grafie odpowiada  $3! = 6$  elementów  $W^3$ . Rzut prostokątny zbioru  $E$  na płaszczyznę  $OXY$  (tzn. zbiór  $E_{xy}$ ) zawiera wyłącznie pary wierzchołków połączonych krawędzią. Ponieważ każda krawędź wyznacza dwa wierzchołki, więc liczba wierzchołków w zbiorze  $E_{xy}$  nie przekracza  $2k$ , gdzie  $k$  jest liczbą krawędzi. Podobnie jest w każdym z pozostałych rzutów  $E_{xz}$  oraz  $E_{yz}$  zbioru  $E$ . Zatem zgodnie z nierównością Loomisa–Whitneya  $(6m)^2 \leq 2k \cdot 2k \cdot 2k$ , skąd wynika teza.  $\square$

Oszacowanie liczby trójkątów w grafie ma pewien związek z teorią baz danych w kontekście *zapytań trójkątnych* (*triangle queries*), które często pojawiają się w sytuacjach praktycznych. Ograniczenie z twierdzenia pomaga oszacować złożoność algorytmów, które realizują te zapytania. Więcej na ten temat można przeczytać na przykład w rozdziale 1.2 pracy Hunga Ngo *Worst-Case Optimal Join Algorithms: Techniques, Results, and Open Problems*, dostępnej w serwisie [arxiv.org](http://arxiv.org). A ponieważ trójkąty w grafach są takie przydatne, przedstawimy jeszcze jedno klasyczne twierdzenie, które jest z nimi związane.

**Twierdzenie 3** (W. Mantel, 1906). *Jeśli graf nie zawiera trójkątów, to ma co najwyżej  $\frac{n^2}{4}$  krawędzi.*

*Dowód.* Niech  $G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  będzie grafem o  $n$  wierzchołkach, niezawierającym trójkąta. Przez  $d_i$  oznaczmy liczbę krawędzi wychodzących z wierzchołka  $v_i$ . Niech  $A$  będzie największym w  $G$  zbiorem wierzchołków, w którym żadne dwa wierzchołki nie są połączone krawędzią. Zauważmy, że zbiór  $B = G \setminus A$  zawiera przynajmniej jeden z końców każdej krawędzi, zatem  $|E| \leq \sum_{v_i \in B} d_i$  (w sumie po prawej stronie liczone są wszystkie krawędzie, przy czym dwukrotnie liczone są te między dwoma wierzchołkami z  $B$ ). Ponadto jeśli weźmiemy dowolny wierzchołek, to żaden z jego sąsiadów nie może być połączony (inaczej powstałby trójkąt), w związku z czym liczba tych sąsiadów nie może być większa od  $|A|$  (z definicji zbioru  $A$ ). Stosując nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną, otrzymujemy zatem

$$|E| \leq \sum_{v_i \in B} d_i \leq |B| \cdot |A| \leq \left( \frac{|A| + |B|}{2} \right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

co kończy dowód i niniejszy artykuł.  $\square$

## Twierdzenie Tomaszewskiego

Aleksander PAWLEWICZ

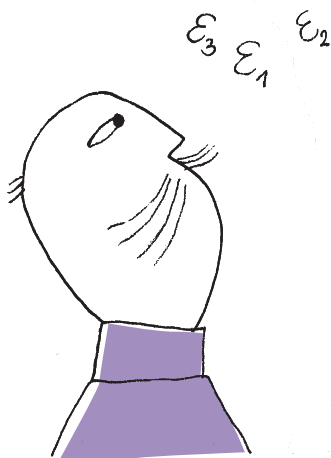
W kwietniu 1986 roku na łamach czasopisma „The American Mathematical Monthly” Richard Guy zaprezentował pewną hipotezę, wskazując jako jej autora Bogusława Tomaszewskiego. Hipoteza brzmiała tak:

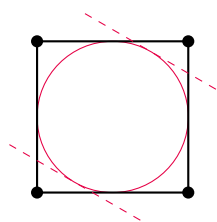
**Hipoteza.** Rozważmy  $n$  liczb rzeczywistych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  spełniających równość  $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1$ . Czy wśród  $2^n$  wyrażeń postaci  $|\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n|$ , gdzie każda z liczb  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  jest równa  $+1$  lub  $-1$ , wyrażeń o wartości  $> 1$  może być więcej niż tych o wartości  $\leq 1$ ?

Przez 34 lata problem pozostawał otwarty. Pomimo licznych prób nie był znany żaden dowód potwierdzający hipotezę ani ją obalający. Dopiero w 2020 roku na portalu arxiv.org pojawił się artykuł *Proof of Tomaszewski’s Conjecture on Randomly Signed Sums* zawierający negatywną odpowiedź na postawione wyżej pytanie. Autorami artykułu są Nathan Keller i Ohad Klein. Praca ta po pewnych modyfikacjach liczy 76 stron, a w skróconej wersji ukazała się w „Advances in Mathematics”. Już sama objętość świadczy o dużej trudności dowodu.

W niniejszym artykule zwięźle przedstawimy historię problemu, a także pewne wnioski wynikające z hipotezy, którą aktualnie możemy już nazywać twierdzeniem: spośród wyrażeń postaci  $|\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n|$  co najmniej połowa musi być nie większa od 1. Sami autorzy dowodu preferują sformułowanie probabilistyczne:

**Twierdzenie.** Niech  $X = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ , gdzie  $a_i$  to liczby spełniające  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ , zaś  $x_i$  są niezależnymi zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości  $+1$  i  $-1$  z równym prawdopodobieństwem. Wówczas  $\mathbb{P}(|X| \leq 1) \geq \frac{1}{2}$ .





Niezależnie od wyboru kierunku stycznych co najmniej połowa wierzchołków leży między nimi

Te i wiele innych cennych informacji o Hipotezie i próbach jej dowodzenia można znaleźć we wspomnianym już artykule:

N. Keller, O. Klein, *Proof of Tomaszewski's Conjecture on Randomly Signed Sums*, Adv. Math. 407 (2022). Artykuł dostępny również pod adresem <https://arxiv.org/abs/2006.16834>

Oszacowanie obok warto porównać z centralnym twierdzeniem granicznym: według niego rozkład zmiennej losowej  $\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}$  zbiega przy  $n \rightarrow \infty$  do rozkładu normalnego, w szczególności prawdopodobieństwo

$\mathbb{P}(|x_1 + \dots + x_n| \leq \sqrt{n})$  zbiega do  $\mathbb{P}(|N(0, 1)| \leq 1) \approx 0,68$ .

Jest to lepszy wynik, ale prawdziwy jedynie w granicy. Dla ustalonego  $n$  prawdopodobieństwo może być istotnie mniejsze.

Istotnie, w opisanym modelu każdy z  $2^n$  możliwych ciągów  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  jest równie prawdopodobny jako wynik losowania  $x_1, \dots, x_n$ . Prawdopodobieństwo  $\mathbb{P}(|X| \leq 1)$  opisuje więc proporcję liczby *dobrych* ciągów (czyli takich, dla których omawiane wyrażenie jest nie większe od 1) do liczby wszystkich ciągów.

To samo twierdzenie można równoważnie sformułować jeszcze inaczej: jeśli w  $n$ -wymiarową kostkę wpisano  $n$ -wymiarową kulę, a następnie wybrano dwie równoległe hiperpłaszczyzny styczne do kuli, to przynajmniej połowa wierzchołków kostki leży pomiędzy tymi hiperpłaszczyznami (lub na nich). Ilustrację dla  $n = 2$  zamieszczamy obok.

**Historia.** Zanim uzyskano nierówność sformułowaną w powyższym twierdzeniu, przez kilkanaście lat otrzymywano stopniowo coraz lepsze oszacowania. Pierwszym znaczącym wynikiem na tym polu była nierówność  $\mathbb{P}(|X| \leq 1) \geq \frac{1}{3}$  otrzymana w 2002 roku przez A. Ben-Tala, A. Nemirovskiego i C. Roosa. Kolejny rezultat uzyskał w 2012 roku I. Shnurnikov – udowodnił mianowicie nierówność  $\mathbb{P}(|X| \leq 1) \geq 0,36$ . Pierwszymi, którzy przekroczyli barierę  $3/8$ , byli R. B. Boppana i R. Holzman. W 2017 roku wykazali oni, że wartość  $\mathbb{P}(|X| \leq 1)$  może być oszacowana z dołu przez **0,406**. Kolejne dwa ograniczenia dolne ukazały się w podobnym czasie. Najpierw R. B. Boppana i H. Hendriks wykazali, że  $\mathbb{P}(|X| \leq 1) \geq 0,428$ , a następnie V. Dvořák, P. van Hintum i M. Tiba pokazali, że po prawej stronie powyższej nierówności można wstawić **0,46**. Dwa ostatnie wyniki zostały opublikowane w latach 2020 i 2021.

W czasie gdy dowodono coraz lepsze oszacowania dolne, omówione powyżej, pojawiały się także coraz lepsze wyniki dowodzące pożądaną nierówności  $\mathbb{P}(|X| \leq 1) \geq \frac{1}{2}$  w szczególnych przypadkach. Najpierw w roku 1992 pojawił się dowód twierdzenia, gdy liczba zmiennych  $x_i$  i liczb  $a_i$  nie przekracza dziesięciu. Wynik ten zawdzięczamy R. Holzmanowi i D. J. Kleitmanowi. Innym kierunkiem dowodzenia hipotezy było wykazanie jej dla wszystkich  $a_i$  równych. Dokonał tego M. C. A. van Zuijlen w roku 2011. Kilka lat później, w roku 2018 T. Toufar udowodnił sformułowaną w twierdzeniu nierówność przy założeniu, że wszystkie poza jednym  $a_i$  są równe. Nieco innym kierunkiem uogólnień było wykazanie w roku 2015 przez V. K. Bentkusa i D. Dzindzalieta, że nierówność jest prawdziwa, gdy największa z liczb  $|a_i|$  nie przekracza 0,16.

**Wnioski płynące z twierdzenia.** Aby zilustrować twierdzenie, omówimy teraz jego szczególny przypadek: pewną nierówność dwumianową. Przyjmijmy, że wszystkie współczynniki  $a_1, \dots, a_n$  są równe, czyli niech  $a_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Na mocy twierdzenia Tomaszewskiego wiemy, że

$$\mathbb{P}(|x_1 + \dots + x_n| \leq \sqrt{n}) \geq \frac{1}{2},$$

gdzie  $x_i$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie  $\mathbb{P}(x_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ .

Wróćmy do sformułowania deterministycznego. Powyższa nierówność oznacza, że spośród wszystkich  $2^n$  wyborów wartości  $\pm 1$  w ciągu  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  mamy

$$|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n| \leq \sqrt{n}$$

dla co najmniej połowy z nich, a więc co najmniej  $2^{n-1}$ . Odpowiedzmy teraz w inny sposób na pytanie o liczbę takich wyborów. Jeśli w wybranym ciągu jest  $k$  liczb  $+1$  i  $n - k$  liczb  $-1$ , to suma  $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$  wynosi  $k - (n - k)$ , czyli  $2k - n$ . Warunek  $|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n| \leq \sqrt{n}$  sprowadza się więc do

$$\frac{n - \sqrt{n}}{2} \leq k \leq \frac{n + \sqrt{n}}{2}.$$

Dla ustalonego  $k$  spełniającego te warunki możliwych ustawień  $\pm 1$  jest  $\binom{n}{k}$ , co pozwala przeformułować naszą nierówność w postaci:

$$\sum_{k=\lceil \frac{n-\sqrt{n}}{2} \rceil}^{\lfloor \frac{n+\sqrt{n}}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \geq 2^{n-1}.$$

Wniosek: około  $\sqrt{n}$  największych wyrazów ciągu o wyrazach  $\binom{n}{k}$  daje w sumie więcej, niż pozostałe wyrazy tego ciągu.



## Przypadki chodzą po... laboratoriach

Ktoś kiedyś powiedział, że sukces przychodzi do przygotowanych. Zapewne dotyczyć to może odkryć w naukach doświadczalnych, nawet takich odkryć, których badacz przed doświadczeniem nie przewidywał. Zakładamy, że doświadczenie prowadzi się zgodnie z racjonalnymi i prawidłowymi zasadami, i nagle...

Jak Grzegorz Mendel wybierał obiekt swoich badań – groch – nie wiem. Wiem jednak, że miał ogromne szczęście, ponieważ cechy, które oceniał, były kodowane na różnych chromosomach grochu i były cechami jednogennymi (za daną cechę odpowiada tylko jeden gen). Wiadomo, że jeden ze znanych botaników, któremu Mendel wysłał swoje wyniki końcowe z prośbą o ich ocenę, zasugerował mu powtórzenie na innej roślinie. Dziś wiemy, że wprowadziłyby badacza jedynie w konfuzję.

Przypadek penicyliny jest zapewne wszystkim znany, więc tylko przypomnę, że odkrycie bakterii wrażliwych na jakies substancje wydzielane przez grzyby, *Penicillium*, przytrafiło się dzięki przypadkowemu pozostawieniu płytek doświadczalnych dość długo na stole laboratoryjnym po zakończeniu doświadczenia, które nie miało na celu poszukiwania antybiotyku.

Pewnego wieczora Marshall Nirenberg kończył doświadczenie obejmujące proces życiowy roślinnego wirusa i zorientował się, że do mieszaniny reakcyjnej warto by dodać nic polinukleotydową podobną do RNA. Skoro nie miał takiej substancji pod ręką, wyruszył na poszukiwania piętro wyżej i ktoś podarował mu próbkę kwasu rybopolinukleotydowego (poli U). Wtedy w probówkach Nirenberga pojawił się nieprzewidziany osad. Badacz mógł próbkę wylać do zlewu, ale postanowił sprawdzić, co się stało. Okazało się, że jest to polimer aminokwasu, fenyloalaniny, nierozpuszczalny w wodzie. Po dokładniejszej analizie rezultatu tego procesu uczeni uznali to za pierwszy dowód na kodowanie syntezy białka przez kwas nukleinowy i identyfikację tripletu UUU kodującego włączenie do białka fenyloalaniny (Nagroda Nobla 1968).

Podobno Kary Mullis, stojąc i nudząc się w długim korku na autostradzie, zajął się rozważaniem możliwości procesu mnożenia *in vitro* bardzo dużej liczby określonych fragmentów DNA, genów. Wiedział tyle, ile każdy ówczesny student genetyki: znał budowę chemiczną RNA, DNA, wiedział o zasadzie komplementarności nukleotydów z dwu nici w dwuniciowych helisach, wiedział o istnieniu i cechach enzymów polimeryzujących kwasy nukleinowe, wiedział także, że dwie nici helisy rozdzielają się w podwyższonej temperaturze. I właśnie Mullis, a nie statystyczny student, te wszystkie cechy rozważył łącznie (w tym długim korku) i następnego dnia rozpoczął w laboratorium próby doświadczenia, które potem nazwano PCR. Realisci mówią także, że powtarzalne doświadczenie PCR zabrało Mullisowi ponad pół roku. Było punktem startowym do zdefiniowanej syntezy fragmentów DNA (Nagroda Nobla 1993).

W końcu lat 70. po „niedzielnym” popularzatorskim wykładzie, który miałam na Wydziale Fizyki, podszedł do mnie słuchacz i powiedział: „Niewiele wiem o tych kwasach nukleinowych, ale skoro niosą one ładunki, to na pewno muszą oddziaływać z polami elektrycznymi. Nazywam się Jerzy Zieliński i pracuję w Instytucie Elektrotechniki. Może byśmy znaleźli pole współpracy?”. Nie mieliśmy wtedy komputerów, nie istniały przeglądarki. Zaszłam się na 2 tygodnie w bibliotece. I znalazłam ciekawe a nierozpoznane w tej dziedzinie zjawiska związane z działaniem różnych pól elektrycznych na błony komórkowe. W Instytucie Elektrotechniki skonstruowano nowe generatory zmiennych pól elektrycznych. Niestety, nie mogę zamieścić szczęśliwego zakończenia o Nagrodzie Nobla, ale w ciągu 10 lat wytworzyliśmy w zgodnej współpracy ponad 10 dobrych publikacji, 2 doktoraty, kilka prac magisterskich, dwa długoterminowe staża zagraniczne. I wypromowaliśmy do podobnych badań dziwnego, kulistego mutanta – grzyba *Neurospora crassa*. Wspólny tytuł naszych publikacji: *Bioelektroreologiczny model komórki świadczy o małym znanych wówczas cechach komórek, ich sprężystości i lepkości*.

Wszystkie te przypadki cechują się tym, że badacz nie zaniedbywał przypadkowo, jak sądził, uzyskanego wyniku. Takie wyniki trzeba powtórzyć i jeśli się potwierdzą, nie wylewać dziwnych roztworów i osadów z probówek – pomyśleć. Warto rozmawiać z różnorodnymi badaczami i uważnie ich słuchać.

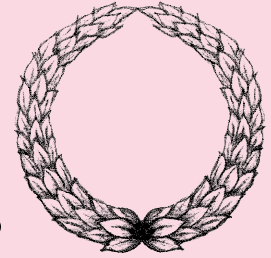
Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)



Reologia – dział mechaniki ośrodków ciągłych zajmujący się plastycznymi deformacjami (odkształceniami) oraz płynięciem substancji.



# Wyniki Olimpiad 2022/2023



## LXXIV Olimpiada Matematyczna

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1952 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 783 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 127 uczniów.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 31 marca br. postanowił przyznać 39 tytułów laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):

### Nagrody stopnia pierwszego

**Mateusz Gabzdyl** (30) – V LO w Bielsku-Białej

### Nagrody stopnia drugiego

**Piotr Miernik** (26) – LO im. św. Jadwigi Królowej w Kielcach

**Jakub Bereza** (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Michał Lipiec** (24) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Krzysztof Salata** (24) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Konstanty Smolira** (24) – Prywatnego LO im. Królowej Jadwigi w Lublinie

**Robert Soboński** (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Antoni Buraczewski** (23) – LO Nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu

### Nagrody stopnia trzeciego

**Cezary Galiński** (20) – II LO im. Mieszka I w Szczecinie

**Jan Radomiński-Lasek** (20) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Helena Arendacz** (18) – XIII LO w Szczecinie

**Mariam Baghdasaryan** (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Rafał Bawolek** (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Mikołaj Cudny** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Wojciech Domin** (18) – LO Nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu

**Jeremi Hyska** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Paweł Jastrzębski** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Mikołaj Jędruch** (18) – I LO im. Juliusza Słowackiego w Przemyślu

**Robert Kluszczyński** (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Maja Kokot** (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Krzysztof Kujawa** (18) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni

**Jan Kwieciński** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Stanisław Lada** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Hai An Mai** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Wojciech Malinowski** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Filip Maniżak** (18) – LO im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie

**Gabriela Pietras** (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Miłosz Płatek** (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Mateusz Przebieracz** (18) – VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach

**Kajetan Ramsza** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Patryk Rosół** (18) – III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

**Szymon Tobiasz** (18) – I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim

**Krzysztof Zdon** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Antoni Łuczak** (17) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

### Nagrody stopnia czwartego

**Jan Gwiazda** (14) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Grzegorz Kaczmarek** (14) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Filip Maziarka** (14) – III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

**Krzysztof Lalicki** (13) – LO im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie

**Mateusz Wawrzyniak** (13) – Akademickiego LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu

Nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie zadania z finału LXXIV OM otrzymały następujące osoby:

**Helena Arendacz** – XIII LO w Szczecinie

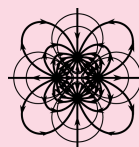
**Antoni Buraczewski** – LO nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu

**Michał Lipiec** – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Gabriela Pietras** – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Miłosz Płatek** – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Pełną treść komunikatu prasowego można odnaleźć na stronie [om.mimuw.edu.pl](http://om.mimuw.edu.pl)



## OLIMPIADA FIZYCZNA

# LXXII Olimpiada Fizyczna

Jak co roku, w roku szkolnym 2022/23 przeprowadzona została Olimpiada Fizyczna. Jest to jedna z najstarszych olimpiad przedmiotowych (pierwsza odbyła się w 1951 r.), a jednocześnie jedna z najbardziej ambitnych. Organizatorem Olimpiady jest Polskie Towarzystwo Fizyczne, wspierana jest przez 14 wyższych uczelni, będących bazą Komitetu Głównego i Komitetów Okręgowych, oraz przez inne instytucje naukowe. Olimpiada finansowana jest w znacznej części przez dotację z MEiN.

Olimpiada składała się z trzech etapów. W pierwszym etapie – od początku września do 19 listopada 2022 r. uczestnicy rozwiązywali zadania w domu lub w szkole, korzystając z wszelkich pomocy. W pierwszej części tego etapu uczniowie rozwiązywali kilkanaście prostych zadań, wpisując wyniki do formularza w komputerze, w drugiej – rozwiązywali klasyczne zadania rachunkowe oraz przeprowadzali doświadczenia. Zadania doświadczalne polegały na wyznaczeniu tzw. modułu Kirchhoffa drutu miedzianego (odpowiednik modułu Younga, ale dotyczący skręceń drutu, a nie rozciągania) oraz na wyznaczeniu maksymalnej chwilowej mocy mechanicznej mięśni swoich nóg podczas pionowego skoku z miejsca, z wykorzystaniem akcelerometru z telefonu komórkowego. Trzecie, najbardziej klasyczne doświadczenie polegało na wyznaczeniu siły elektromotorycznej i oporu wewnętrznego baterii AAA. Podane było też zadanie numeryczne, polegające na znalezieniu ruchu małego klocka poruszającego się z tarcieniem po wewnętrznej stronie walcowej rynny.

Drugi etap Olimpiady odbył się w warunkach kontrolowanych w 13 miastach będących siedzibami Komitetów Okręgowych. Składał się z części teoretycznej (15 stycznia 2023 r.) oraz części doświadczalnej (19 lutego 2023 r.). Część teoretyczna polegała na rozwiązaniu trzech zadań. Dwa z nich to dość klasyczne zagadnienia mechaniczne i elektromagnetyczne. Natomiast trzecie zadanie dotyczyło urządzenia do magazynowania energii w postaci skroplonego dwutlenku węgla. Zadanie nie było szczególnie trudne, ale nietypowe. Zadanie doświadczalne polegało na wyznaczeniu współczynnika załamania kwarcu. Zadanie w zasadzie proste, pomiar polegał na wyznaczeniu kąta Brewstera, jednak badane płytki kwarcowe były nieprzezroczyste, co stanowiło pewną trudność koncepcyjną.

Trzeci etap odbył się w Warszawie w dniach 15–16 kwietnia 2023 r., wzięło w nim udział 78 osób. Pierwszego dnia uczestnicy rozwiązywali zadanie doświadczalne, polegało ono na wyznaczeniu współczynnika tarcia statycznego nici o szkło (próbówkę szklaną) oraz o teflon (walec teflonowy). Uczestnicy mieli ciężarki (kulki stalowe o danych średnicach) oraz elementy do dość dowolnego ustawiania próbek i walca. Podana była informacja, jak maksymalna siła tarcia zależy od kąta nawinięcia nici na walec (jest to zależność wykładnicza). Zadanie jest o tyle ciekawe, że wyznaczyć należy wielkość bezwymiarową, a do jej wyznaczenia nie jest potrzebna żadna wielkość wymiarowa, jedynie stosunek ciężarów zaczepionych do dwóch końców nici oraz kąta nawinięcia nici na walec lub próbkę. Zadania teoretyczne natomiast dotyczyły zagadnień mechanicznych (sprężyste zderzenie toczonej się kuli z przeszkodą) i elektrycznych (wyznaczenie natężenia prądu płynącego w przewodzącej cieczy). Najciekawsze zadanie dotyczyło modelu podwodnego gejzera. Pełną treść wszystkich zadań można znaleźć na stronie [www.kgof.edu.pl](http://www.kgof.edu.pl).

Tradycyjnie zadania finałowe były bardzo trudne. Tym niemniej najlepsi uczestnicy rozwiązali w zasadzie poprawnie wszystkie zadania.

Wyniki 72 Olimpiady Fizycznej zostały ogłoszone 18 kwietnia 2023 roku. Tytuł finalisty przyznano wszystkim uczestnikom trzeciego etapu, tytuł laureata

25 osobom, które uzyskały najwyższe wyniki. Wszyscy finaliści zwolnieni są z matury z fizyki, mają też pierwszeństwo do przyjęcia na studia na wielu wyższych uczelniach.

Zwycięzcą Olimpiady został Stanisław Karpiejczyk z XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Pierwszych 5 uczestników zostało zaproszonych do udziału w Międzynarodowej Olimpiadzie Fizycznej, która odbędzie się w Tokio, kolejnych 5 uczestników – do udziału w Europejskiej Olimpiadzie Fizycznej w Hanowerze.

Oto pełna lista laureatów 72 Olimpiady Fizycznej:

**Stanisław Karpiejczyk**, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa

**Filip Baciak**, I Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Chrzanów

**Andrzej Maroń**, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa

**Michał Lipiec**, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków

**Mateusz Kamiński**, VI Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza, Kraków

**Michał Balczyk**, I Liceum Ogólnokształcące Dwujęzyczne im. Edwarda Dembowskiego, Gliwice

**Stanisław Sawicki**, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków

**Jakub Artyszuk**, XIII Liceum Ogólnokształcące, Szczecin

**Bartłomiej Wolny**, II Liceum Ogólnokształcące im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego, Rybnik

**Franciszek Sowisz**, VIII Liceum Ogólnokształcące im. A. Mickiewicza, Poznań

**Konrad Kaczmarczyk**, II Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Tarnowskie Góry

**Justyna Strejczek**, Liceum w Chmurze, Warszawa

**Jakub Schindler**, Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Wrocławskiej, Wrocław

**Mikołaj Kuziuk**, Prywatne Liceum im. Królowej Jadwigi, Lublin

**Mateusz Brauckhoff**, XIII Liceum Ogólnokształcące, Szczecin

**Jan Malawski**, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków

**Wojciech Kukiełka**, I Liceum Ogólnokształcące, Radzyń Podlaski

**Kacper Omieliańczyk**, II Liceum Ogólnokształcące im. Anny z Sapiechów Jabłonowskiej, Białystok

**Bartłomiej Lech**, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa

**Cezary Galiński**, II Liceum Ogólnokształcące im. Mieszka I, Szczecin

**Jan Wanatowicz**, II Liceum Ogólnokształcące im. M. Kopernika w Mielcu, Mielec

**Jan Błażuk**, II Liceum Ogólnokształcące im. księżnej Anny z Sapiechów, Białystok

**Maksymilian Wdowiarz-Bilski**, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków

**Maciej Wójcik**, Liceum Ogólnokształcące im. Jana III Sobieskiego, Lublin

**Antoni Buraczewski**, III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza, Wrocław



# LXVI ogólnopolska Olimpiada Astronomiczna

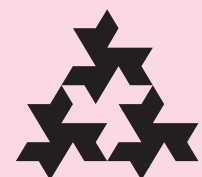
W tym roku miała miejsce 66. edycja Olimpiady Astronomicznej, organizowanej corocznie dla uczniów szkół ponadpodstawowych. Konkurs ten prowadzony był w kilku etapach. Pierwszy etap obejmował dwie serie zadań oraz zadanie obserwacyjne, rozwiązywane samodzielnie przez uczniów i dostarczone korespondencyjnie. Zawody półfinałowe (II etap) rozegrały

się w kilku miastach Polski, a finał (III etap) odbył się w Planetarium Śląskim w Chorzowie. Do etapu drugiego zakwalifikowano 72 uczniów, a do finału awansowało 20 osób. Finałiści rywalizowali w rozwiązywaniu zadań teoretycznych i z analizy danych, a także zadań przeprowadzanych pod sztucznym niebem planetarium. A oto laureaci:



- I miejsce: **Maksymilian Wdowiarz-Bilski** – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków
- II miejsce: **Krzysztof Król** – XIII Liceum Ogólnokształcące, Szczecin
- III miejsce: **Piotr Jędrzejczyk** – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków
- IV miejsce: **Gniewosz Armista** – Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Wrocławskiej, Wrocław
- V miejsce: **Michał Jagodziński** – XIII Liceum Ogólnokształcące, Szczecin
- VI miejsce: **Bartłomiej Lech** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa
- VII miejsce: **Wojciech Kukiełka** – I Liceum Ogólnokształcące, Radzyń Podlaski

Pierwszych pięciu laureatów będzie reprezentować Polskę podczas 16. Międzynarodowej Olimpiady z Astronomii i Astrofizyki, która odbędzie się w dniach 10–20 sierpnia w Planetarium Śląskim w Chorzowie oraz Międzynarodowym Centrum Kongresowym w Katowicach.



Olimpiada Informatyczna

## XXX Olimpiada Informatyczna

W dniach 20–24 marca 2023 roku w Warszawie odbyły się zawody III stopnia, jubileuszowej, XXX Olimpiady Informatycznej. Zostało do nich zakwalifikowanych 104 zawodników. W ciągu dwóch dni zawodów III stopnia zawodnicy rozwiązywali w sumie sześć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Ceremonia zakończenia Olimpiady Informatycznej połączona z obchodami jej 30-lecia odbyła się 24 marca w Auditorium Maximum Uniwersytetu Warszawskiego.

Komitet Główny przyznał tytuły laureatów I, II i III miejsca zgodnie z poniższą listą (w nawiasach liczba zdobytych punktów oraz szkoła) i wyróżnił tych spośród finalistów, którzy zdobyli co najmniej 115 punktów. Laureaci Olimpiady otrzymali stypendia z Programu Stypendialnego Olimpiady Informatycznej ufundowane przez instytut badawczy NASK – PIB; stypendia przyznano także nauczycielom za osiągnięcia w pracy z uczniami uzdolnionymi informatycznie. Lista wszystkich finalistów i lista wyróżnionych nauczycieli są dostępne na stronie [oi.edu.pl](http://oi.edu.pl).

### Laureaci I miejsca

1. **Antoni Buraczewski** (600, LO nr III im. Adama Mickiewicza, Wrocław)
2. **Adam Gąsienica-Samek** (383, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa)
3. **Rafał Mańczyk** (373, LO nr XIV im. Polonii Belgijskiej, Wrocław)
4. **Olaf Targowski** (365, III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
5. **Konstanty Smolira** (361, Prywatne Liceum im. Królowej Jadwigi, Lublin)
6. **Waldemar Lamandini** (318, III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
7. **Jakub Pniewski** (317, III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
8. **Marek Muzyka** (314, LO nr XIV im. Polonii Belgijskiej, Wrocław)

### Laureaci II miejsca

9. **Ignacy Boehlke** (308, XIII LO, Szczecin)
- 10.–11. **Stanisław Karpieńczyk** (303, XIV LO, Warszawa),  
**Krzysztof Olejnik** (303, I LO, Koszalin)
12. **Paweł Zalewski** (277, XIV LO, Warszawa)
13. **Jan Zakrzewski** (254, Akademickie LO Politechniki Śląskiej, Gliwice)
14. **Bartosz Drabiński** (249, III LO, Gdynia)
15. **Olaf Surgut** (248, LO nr XIV, Wrocław)

16. **Marcin Rymkiewicz** (241, XIV LO, Warszawa)
17. **Jerzy Olkowski** (237, XIV LO, Warszawa)
18. **Rafał Bawołek** (230, V LO, Kraków)
19. **Jan Gwiazda** (229, XIV LO, Warszawa)
20. **Kajetan Ramsza** (209, XIV LO, Warszawa)
21. **Adam Hybsz** (202, Zespół Szkół Technicznych, Ostrów Wlkp.)
22. **Mateusz Wawrzyniak** (200, Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej, Wrocław)
- 23.–24. **Maksym Iskierski** (195, XIII LO, Szczecin),  
**Robert Soboński** (195, XIV LO, Warszawa)

### Laureaci III miejsca

25. **Paulina Żeleźnik** (194, LO nr XIV, Wrocław)
26. **Hubert Wasilewski** (192, XIV LO, Warszawa)
27. **Mateusz Kowalski** (189, VI LO, Bydgoszcz)
28. **Jan Myszka** (188, Szkoła w Chmurze, Warszawa)
29. **Jakub Bereza** (179, XIV LO, Warszawa)
30. **Karol Łacina** (178, LO nr XIV, Wrocław)
- 31.–32. **Atanazy Gawrysiak** (177, XIV LO, Warszawa),  
**Michał Szeliga** (177, XIV LO, Warszawa)
33. **Cezary Galiński** (176, II LO, Szczecin)
34. **Jakub Koliński** (173, III LO, Gdynia)
35. **Sylwia Sapkowska** (168, II LO, Białystok)
36. **Bartłomiej Stefański** (167, LO nr VII, Wrocław)
37. **Mateusz Jurach** (162, LO nr XIV, Wrocław)
38. **Kacper Omiełiańczyk** (160, II LO, Białystok)
- 39.–41. **Karol Bonat** (154, XIV LO, Warszawa),  
**Stanisław Lada** (154, XIV LO, Warszawa)  
**Damian Sosulski** (154, LO nr III, Wrocław)
42. **Kuba Wałęga** (152, LO nr III, Wrocław)
- 43.–44. **Jan Kwieciński** (150, XIV LO, Warszawa),  
**Jacek Markiewicz** (150, III LO, Tarnów)
45. **Karol Bielaszka** (145, III LO, Tarnów)
46. **Paweł Mieszkowski** (144, XIV LO, Warszawa)
- 47.–48. **Michał Plata** (142, LO nr III, Wrocław),  
**Karol Żeleźnik** (142, LO nr XIV, Wrocław)



## XVII Olimpiada Informatyczna Juniorów

Finał XVII OIJ miał miejsce 6–7 maja 2023 roku na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Łącznie w zawodach wystartowało 112 zawodniczek i zawodników.

Oto lista laureatów (kolejność według zajętego miejsca):

### Laureaci I stopnia

Samuel Maj, Michał Wolny, Piotr Dybich, Jan Kosiorowski, Jakub Woźniak, Krzysztof Witkowski, Antoni Nowak.

### Laureaci II stopnia

Urszula Pandel, Adam Szymaszkiwicz, Tymon Durlej, Jakub Świtoń, Patrycja Pisanko, Bartosz Bartodziej, Michał Mieszek, Jakub Wasilewski, Kirill Volchenko, Tymon Tłuczek, Michał Stanczewski, Marcin Krysiak, Bartosz Malinowski, Szymon Czaplinski, Franciszek Wolski, Cyprian Biesaga, Hugo Stefaniak, Kalina Staszewska, Emil Makal.

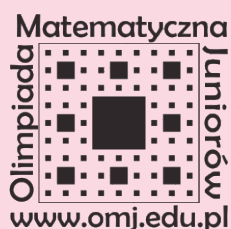
### Laureaci III stopnia

Mateusz Wilgosz, Tomasz Zalewski, Michał Roguz, Krzysztof Michalik, Adam Dubrowski, Juliusz Klim, Stanisław Sitek, Filip Bąk, Joachim Kołodziejski, Kacper Odzimek, Adam Bogdanowicz, Michał Maciołka,

Dawid Halat, Stanisław Truszel, Konrad Kaźmierczak, Filip Klim, Jan Jurkowski, Marek Konieczny, Michał Urbański, Michał Bublewicz, Adam Wystrychowski, Jargalan Myagmardorj, Miłosz Popowicz, Stefan Winiarski, Joanna Dorosz, Piotr Guziński, Marek Sokołowski, Wojciech Pasternak.

### Finałiści z wyróżnieniem

Konrad Pierzchała, Antoni Moskal, Mateusz Kowalski, Bartosz Brutt, Jan Safiańczuk, Stanisław Strzębicki, Bartosz Lorenc, Adrian Falak-Cyniak, Michał Englart, Dawid Popiel, Adam Zych, Adrian Krząstek, Szymon Grzesiak, Maksymilian Skiepmo, Szymon Tkocz.



## XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 8427 uczniów z 1136 szkół, do zawodów stopnia drugiego przystąpiło 1228 uczniów z 695 szkół, a do zawodów stopnia trzeciego – 168 uczniów ze 124 szkół.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów na posiedzeniu w dniu 18 marca br. postanowił przyznać 98 osobom tytuł laureata pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w obrębie każdej grupy laureatów kolejność jest alfabetyczna):

### Laureaci I stopnia (wynik 30 punktów na finale)

Maria Kulyk, Łucja Łyziak, Michał Piotr Wolny.

### Laureaci I stopnia (23–24 punkty)

Mikołaj Ignacy Badura, Tymoteusz Czapkowski, Błażej Dratwa, Tomasz Piotr Ferenc, Dominik Findeisen, Michał Franciszek Fronczek, Filip Janusz Klim, Marek Konieczny, Julian Zbigniew Kuryłowicz-Kaźmierczak, Emil Marcin Makal, Aleksander Rotkiewicz, Wojciech Jakub Szymczyk, Jakub Zagrodzki.

### Laureaci II stopnia (16–22 punktów)

Oskar Mirosław Adamczyk, Borys Budny, Antoni Zawisza Chwiejczak, Franciszek Czapplewski, Aleks Czufarow, Wojciech Dudek, Piotr Dominik Grądział, Rafał Grzyb, Alicja Anna Kaliszewska, Juliusz Stanisław Klim, Rafał Czesław Kubień, Adam Paweł Kurzyński, Aleksander Piotr Lada, Karol Matyka, Karolina Michalak, Stanisław Nawrocki, Szymon Ignacy Pilipczuk, Anna Dagmara Pilipczuk, Kalina Staszewska, Igor Sudyka, Stanisław Mariusz Szymala, Adam Tomasz Wiatr.

### Laureaci III stopnia (10–15 punktów)

Wojciech Antoniewicz, Dawid Natan Bociąga, Anna Helena Bryłowska, Michał Paweł Bublewicz, Filip Bydałek, Kacper Jan Chabowski, Bartosz Datka,

Jakub Dębowski, Piotr Jan Dybich, Julian Karol Forsyński, Igor Gustaw Gębski, Marta Grzeszkiewicz, Maciej Hryniewicz, Maria Janyńska, Tadeusz Andrzej Jastrzębski, Michał Jaśkowski, Tomasz Karol Józwiak, Samuel Juszkiewicz, Wanda Maria Kaczmarek, Grzegorz Kędzior, Anna Kicińska, Dorota Kosek, Jan Kosiorowski, Nina Kreft, Emilia Joanna Królikowska, Olena Celina Kukielka, Mateusz Kukier, Weronika Karolina Kwolek, Mateusz Lachowicz, Jacek Łakomski, Leon Matachowski, Alicja Mościcka, Jargalan Myagmardorj, Maksym Jan Osak, Tomasz Ostrowski, Lena Karolina Ożóg, Adam Paprzycki, Karol Pezda, Patrycja Weronika Pisanko, Paweł Podbielski, Paulina Prędkiewicz, Edward Rasiewicz, Stanisław Jan Ryżko, Mateusz Rząsa, Tsimafei Shauchenka, Artur Adam Smoleński, Kajetan Marek Sosnowski, Krzysztof Ziemowit Suligowski, Maciej Szostakiewicz, Szymon Piotr Tkocz, Franciszek Karol Ulatowski, Maria Warachim, Mateusz Wilgosz, Mateusz Władysław Wilk, Dominika Wojdacz, Adam Wystrychowski, Piotr Rafał Zalewski, Amelia Zduńczyk, Marek Zięba, Jakub Maciej Żyto.

Pełną treść komunikatu można odnaleźć na stronie [www.omj.edu.pl](http://www.omj.edu.pl).

# Problem kozy a piłka w puszcze

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

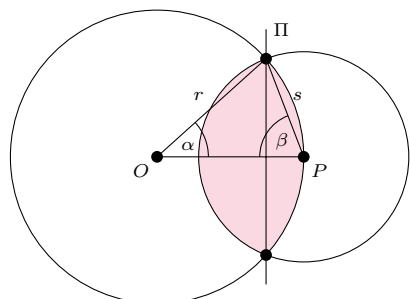
Michał MIŚKIEWICZ\*

W popularnym dowcipie kury na pewnej farmie przestały składać jajka, więc poproszono o pomoc fizyka teoretycznego. Ten po tygodniu wrócił z rozwiązaniem problemu – zastrzegł jednak, że jego rozwiązanie działa jedynie dla sferycznych kur w próżni.

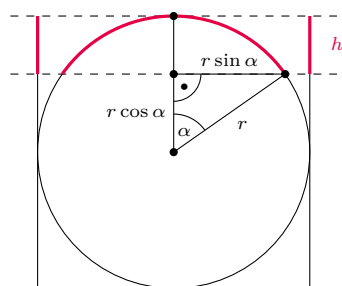
Nieco podobnie jest z geometrycznym problemem kozy, o którym w  $\Delta_{23}^6$  pisał Jerzy Pryga. Wyjściowe zadanie dotyczyło kozy na okrągłym pastwisku, ale matematycy zauważyli, że analogiczne zagadnienie w trzech wymiarach jest łatwiejsze, więc postanowili zająć

się właśnie nim. Żeby nadać problemowi namiastkę realności, podmieńmy kozę na kanarka i pastwisko na klatkę. Brzmi on wtedy następująco: wewnątrz sferycznej klatki zamknięty jest kanarek, dodatkowo przywiązany za nóżkę sznurkiem do pewnego punktu klatki (zob. rys. 1). Jaki powinien być stosunek długości sznurka do promienia klatki, by kanarek miał dostęp dokładnie do połowy objętości klatki?

Jak za chwilę się przekonamy, znalezienie właściwej długości sznurka nie wymaga zaawansowanej matematyki.



Rys. 1. Oznaczenia:  
 $O$ ,  $r$  – środek i promień klatki;  
 $P$ ,  $s$  – punkt zaczepienia i długość sznurka;  
 $\Pi$  – płaszczyzna przecięcia sfer  $S(O, r)$  i  $S(P, s)$



Rys. 2. Piłka w puszcze: czasza sfery ma to samo pole co odpowiadający jej fragment walca

**Piłka w puszcze.** W artykule *Piłka w puszcze* ( $\Delta_{14}^4$ ) Marek Kordos pokazał – idąc śladami Archimedesusa – że jeśli kulę o promieniu  $r$  włożymy do pionowego walca o tym samym promieniu, a następnie przetniemy ją dwiema poziomymi płaszczyznami odległymi o  $h > 0$ , to powstałe plasterki kuli i walca będą miały taką samą powierzchnię boczną:  $2\pi r \cdot h$ . W szczególności, gdy jedno z cięć przebiega stycznie do kuli, otrzymujemy wzór na pole powstałej na sferze czaszy (zob. rys. 2).

W sytuacji jak na rysunku, gdy czasza jest wyznaczona przez kąt  $\alpha$ , łatwo jest odczytać równość  $h = r - r \cos \alpha$ , a więc pole czaszy wynosi  $2\pi r^2(1 - \cos \alpha)$ . Ten wzór można zapisać w równoważny, dobrze zapadający w pamięć sposób:

**Zadanie.** Jeśli w pewnym punkcie sfery oprzemy igłę cyrkla, a jego rysikiem zaznaczymy na sferze okrąg, to pole czaszy ograniczonej tym okręgiem jest dane wzorem  $\pi R^2$ , gdzie  $R$  jest odległością między igłą a rysikiem. *Uwaga:* promień sfery nie gra tu roli!

Możemy też na tej podstawie obliczyć objętość wycinka kuli wyznaczonego przez czaszę – objętość ta jest proporcjonalna do pola czaszy, a więc wynosi:

$$\frac{\text{pole czaszy}}{\text{pole sfery}} \cdot \text{objętość kuli} = \frac{2\pi r^2(1 - \cos \alpha)}{4\pi r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3(1 - \cos \alpha).$$

**Równanie długości sznurka.** Wróćmy do problemu kanarka. Obszar, do którego ma on dostęp, jest przedzielony płaszczyzną  $\Pi$  na dwie części (zob. rys. 1); wyznaczmy najpierw objętość tej po prawej stronie  $\Pi$ . Można ją przedstawić jako różnicę objętości wycinka kuli oraz stożka o wierzchołku w  $O$ . Objętość wycinka obliczyliśmy już powyżej (jest to  $\frac{2}{3}\pi r^3(1 - \cos \alpha)$ ), a stożek ma wysokość  $r \cos \alpha$  i promień podstawy  $r \sin \alpha$ , więc jego objętość to  $\frac{1}{3} \cdot r \cos \alpha \cdot \pi (r \sin \alpha)^2$ . Analogicznie wyznaczamy objętość lewej części obszaru. W efekcie, po skorzystaniu z „jedynki trygonometrycznej”, interesujące nas równanie to:

$$\frac{1}{3}\pi r^3(\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2) + \frac{1}{3}\pi s^3(\cos^3 \beta - 3 \cos \beta + 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Można je jednak znacząco uprościć, korzystając z zależności  $s = 2r \cos \beta$  i  $\alpha = \pi - 2\beta$  (które wynikają z równoramienności trójkąta zaznaczonego na rys. 1). Po zastosowaniu pierwszego z nich  $s$  znika z pola widzenia,  $r$  zresztą również, gdyż  $r^3$  się skraca. Drugie daje nam  $\cos \alpha = 1 - 2 \cos^2 \beta$ , i w rezultacie pozostaje równanie na  $\cos \beta$ :  $8 \cos^3 \beta - 6 \cos^4 \beta = 1$ . Interesujący nas stosunek długości sznurka do promienia klatki,  $x := \frac{s}{r}$ , to nic innego jak  $2 \cos \beta$ , więc spełnia on równanie:

$$8x^3 - 3x^4 = 8.$$

W interesującym nas przedziale  $(0, 2)$  jest tylko jedno rozwiązanie:  $x \approx 1,23$ . A gdybyśmy z jakiegoś powodu uparli się, że rozwiązanie chcemy zobaczyć w postaci *jawnej*, to i na to jest rada – dla równań czwartego stopnia dostępne są wzory Cardano–Ferrari, które w naszym przypadku dają:

$$x = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left( \sqrt{a} - \sqrt{\frac{16}{3} - a + \frac{128}{27\sqrt{a}}} \right), \text{ gdzie } a = \frac{16}{9} + \frac{4}{3} \left( \sqrt[3]{4 + \sqrt{8}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{8}} \right).$$

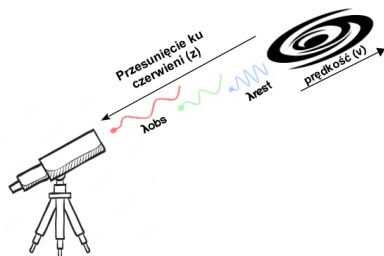
Czytelnika zainteresowanego zgłębieniem tajemnic kóz i kanarków odsyłam do oryginalnego artykułu na ten temat: Graham Jameson, Nicholas Jameson, *Goats and birds*, „The Mathematical Gazette”, 2017.



# ALPINE: holistyczne spojrzenie na młode galaktyki we wczesnym Wszechświecie

\* Narodowe Centrum Badań Jądrowych, członek projektu ALPINE

ALMA (Atacama Large Millimeter/submillimeter Array, o którym pisaliśmy też w  $\Delta_{21}$  w artykule Aleksandry Hamanowicz *Astronomia milimetrowa – obserwatorium ALMA*) jest teleskopem radiowym zbudowanym z 66 anten rejestrujących promieniowanie pochodzące ze źródeł astrofizycznych w zakresie od 0,3 do 3,6 mm. Obserwatorium ALMA jest usytuowane na płaskowyżu Chajnantor na pustyni Atacama w Chile, na wysokości powyżej 5000 m ponad poziomem morza.



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie pojęcia przesunięcia ku czerwieni. Ponieważ Wszechświat się rozszerza, galaktyki oddalają się od nas z coraz większą prędkością. W konsekwencji światło emitowane przez odległą galaktykę ( $\lambda_{rest}$ ) przed dotarciem do Ziemi ( $\lambda_{obs}$ ) zostanie rozciągnięte i przesunięte w kierunku czerwonej części widma elektromagnetycznego. To przesunięcie ku czerwieni  $z$  jest proporcjonalne do prędkości galaktyki, która z kolei jest związana z jej odległością poprzez prawo Hubble'a, jak poniżej:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}} = \frac{v}{c} = \frac{Hd}{c},$$

gdzie  $c$  to prędkość światła,  $H$  to stała Hubble'a, a  $d$  to odległość od galaktyki. Jak pokazano powyżej, im wyższe przesunięcie ku czerwieni, tym dalsza galaktyka. O relacji między przesunięciem ku czerwieni a odległością można przeczytać w artykule Szymona Charzyńskiego z  $\Delta_{23}$ .

Ze względu na przesunięcie ku czerwieni promieniowanie w zakresie UV dla odległych galaktyk na Ziemi obserwowane jest w zakresie optycznym.

Michael ROMANO\*

Wszechświat jest zamieszkały przez wiele galaktyk o różnych kształtach, kolorach i właściwościach. Jednak te źródła nie zawsze były takie, jakimi wydają się być dzisiaj. Spoglądając w przeszłość, kiedy Wszechświat miał zaledwie miliard lat, astronomowie są w stanie zobaczyć początkowe fazy formowania się galaktyk. Na ich podstawie próbują zrozumieć, jak pierwsze skupiska gwiazd, gazu i pyłu (główne składniki galaktyk) ewoluowały w kosmiczne struktury obserwowane obecnie.

To właśnie był główny cel projektu o nazwie *ALMA Large Program to INvestigate C<sup>+</sup> at Early times* (czyli w skrócie, ALPINE, o którym pisaliśmy już w  $\Delta_{20}$ , K. Małek, *Prosto z nieba*). Jak sugeruje sama nazwa programu, projekt ten używa w swoich obserwacjach teleskopu ALMA, aby scharakteryzować promieniowanie podczerwone emitowane przez młode galaktyki. Obserwacje zostały przeprowadzone dla 118 pierwotnych galaktyk, które docierające teraz do teleskopu światło wysłały, gdy Wszechświat miał zaledwie od 1 do 1,5 miliarda lat. W żargonie astronomicznym mówimy, że galaktyki znajdują się na przesunięciu ku czerwieni między 4 a 6 (zobacz rys. 1). Ten przedział czasowy stanowi kluczową fazę ewolucji galaktyk, łącząc niedojrzałe jeszcze, nastoletnie w skali czasowej Wszechświata, galaktyki znajdujące się na wysokim przesunięciu ku czerwieni z ich bardziej dojrzałymi odpowiednikami w najbliższym otoczeniu Ziemi. Otóż w ciągu tych zaledwie 500 milionów lat, który to przedział czasu pokrywa swoimi obserwacjami ALPINE, galaktyki doświadczają gwałtownego wzrostu swojej masy gwiazdowej poprzez przekształcanie zawartego w nich gazu w gwiazdy, a także poprzez łączenie się z innymi galaktykami (tzw. zderzające się galaktyki,  $\Delta_{22}$ , William Pearson, *Poszukiwanie zderzających się galaktyk*). W międzyczasie te młode galaktyki znajdują się pod wpływem obecnych w ich centrach supermasywnych czarnych dziur oraz wybuchów starych gwiazd w ośrodku międzygwiazdowym. Oba te czynniki są w stanie tłumić powstawanie gwiazd poprzez podgrzewanie gazu i wyrzucanie go na zewnątrz galaktyki.

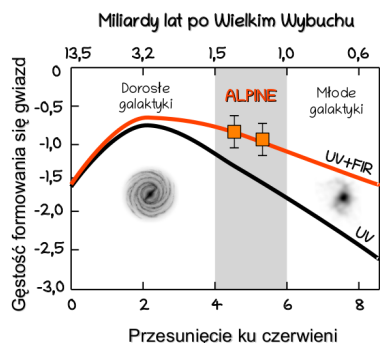
Przed 2013 rokiem, czyli przed pojawieniem się teleskopu ALMA, jedynym sposobem na określenie formowania się i ewolucji odległych źródeł było spojrzenie na ich promieniowanie w zakresie ultrafioletowym (UV). Wadą obserwacji w zakresie promieniowania UV jest jego absorbowanie przez obłoki pyłowe znajdujące się w bliskim otoczeniu młodych gwiazd. Obłoki te rozgrzewają się pod wpływem absorbowanego promieniowania UV i ponownie emitują promieniowanie o większej długości fali, a mianowicie w podczerwieni, głównie tej dalekiej (FIR, *far infra-red*). Innymi słowy, przesłonięte pyłem regiony formowania się gwiazd wewnątrz tych galaktyk były niewidoczne dla teleskopów optycznych, przez co astronomowie stracili znaczną część informacji ukrytych w zakresie FIR. Aby uzupełnić brakującą wiedzę astrofizyczną dotyczącą tempa tworzenia się gwiazd w młodym Wszechświecie, zespół naukowców z projektu ALPINE rozpoczął w 2018 roku dużą kampanię obserwacyjną. Kampania ta miała na celu zmierzenie zawartości gazu i pyłu w młodościanych galaktykach poprzez przyjrzenie się ich właściwościom w podczerwieni. Ze względu na przesunięcie ku czerwieni promieniowanie FIR dla tych obiektów przesunięte jest w obszar submilimetrycznych długości fal i dzięki temu dostępne dla detektorów ALMA. W szczególności, naukowcy pracujący w przeglądzie ALPINE ustawili anteny radiowe teleskopu tak, aby wykryć emisję na długości fali 158  $\mu\text{m}$  pochodzącą od jonu C<sup>+</sup>, dodatkowo naładowanego atomu węgla, produkowanego głównie przez promieniowanie UV nowo narodzonych gwiazd wewnątrz ich macierzystych galaktyk.

Węgiel jest jednym z najbardziej powszechnych pierwiastków występujących we Wszechświecie i stanowi potężne narzędzie do badania struktury i składu galaktyk. Analizując linie emisyjne wytwarzane przez atomy węgla oraz

Tłumaczenie:

Katarzyna MAŁEK

ich rozkład przestrzenny, można uzyskać informacje o rotacji galaktyk, ich morfologii oraz o tym, jak wiele gwiazd się w nich tworzy. Ponadto częstotliwości bliskie linii emisyjnej  $C^+$  są bezpośrednio związane z liczbą fotonów produkowanych przez ziarna pyłu wokół młodych gwiazd. Zgrubne zliczenie tych fotonów pozwala astronomom wnioskować o zawartości pyłu w pierwotnych galaktykach i wkładzie ukrytego pod warstwą tempa tworzenia się gwiazd. Zespół ALPINE połączył dane z ALMA z danymi otrzymanymi na innych długościach fal, uzyskanymi wcześniej przez inne teleskopy kosmiczne i naziemne rozsięte po całym świecie. Dzięki temu możliwe było globalne zbadanie charakterystyki tych interesujących, odległych od nas źródeł. Na przykład wykorzystano optyczne obserwacje pochodzące z Kosmicznego Teleskopu Hubble'a (dalej nazywać go będziemy HST), aby oszacować tempo powstawania gwiazd w aktywnie gwiazdotwórczych, jednak wolnych od pyłu, regionach wyselekcjonowanych wcześniej 118 galaktyk. Badacze użyli też danych pochodzących z kosmicznego teleskopu Spitzer'a do wykrycia emisji pochodzących ze starych gwiazd, które dostarczają informacji o całkowitej masie gwiazdowej galaktyki. Dzięki temu wielowątkowemu podejściu naukowcy z ALPINE uzyskali ważne informacje na temat struktury odległych galaktyk zamieszkujących młody Wszechświat.



Rys. 2. Szkic pokazujący historię formowania się gwiazd we Wszechświecie przed (czarna linia) i po (czerwona linia) uwzględnieniu nowych danych pochodzących z przeglądu ALPINE (pomarańczowe kwadraty). Gęstość formowania się gwiazd jest pokazana jako funkcja przesunięcia ku czerwieni (oś dolna) lub miliarda lat, które upłynęły od Wielkiego Wybuchu (oś górna). ALPINE zebrał pomiary gazu i pyłu w galaktykach o przesunięciu ku czerwieni rzędu 5, czyli w epoce przejściowej między pierwotną a dojrzałą ewolucją galaktyk. Na podstawie rys. 1 z pracy Faist A. i inni (2022), "ALPINE: A Large Survey to Understand Teenage Galaxies", Universe, vol. 8, issue 6, s. 314

Jednym z najważniejszych rezultatów tego projektu było odkrycie silnie zapyłonych galaktyk tak odległych, że obserwujemy ich światło wyemitowane zaledwie 1,2 miliarda lat po Wielkim Wybuchu (przesunięcie ku czerwieni 5). Część z nich zawierała tak dużo pyłu, że była całkowicie niewidoczna nawet dla czujnego oka HST (stąd nazwa „HST-dark”). Te źródła zostały po raz pierwszy zaobserwowane za pomocą zespołu teleskopów ALMA. Było to naprawdę zaskakujące odkrycie. Przed odkryciem ALPINE astronomowie uważali, że galaktyki w bardzo młodym Wszechświecie nie miały czasu, aby uformować wystarczającą liczbę gwiazd czy też wyprodukować duże ilości pyłu i ciężkich pierwiastków w swoim ośrodku międzygwiazdowym. Dodatkowo, podczas analizy morfologii i kinematyki emisji  $C^+$  okazało się, że znaczny procent tych młodych galaktyk oddziaływał ze sobą! Jednak najbardziej zadziwił wynik dotyczący kinematyki tych obiektów – zaobserwowano, że wiele z „nastoletnich” galaktyk wykazywało już pierwsze oznaki uporządkowanej rotacji. Ta uporządkowana rotacja może być odpowiedzialna za powstanie obecnych galaktyk o strukturze spiralnej, jak nasza Droga Mleczna. Wszystkie te wyniki wskazują, że pierwotne galaktyki były o wiele bardziej dojrzałe, niż się spodziewano, podważając nasze obecne modele formowania i ewolucji galaktyk.

Przykład wpływu wyników ALPINE na dotychczasową wiedzę o odległych galaktykach widać na rysunku 2. Tutaj naszkicowana jest historia powstawania gwiazd we Wszechświecie, w przedziale czasu od 0,6 miliarda lat po Wielkim Wybuchu do dnia dzisiejszego. Wcześniejsze badania UV/optyczne (nieuwzględniające wkładu od obiektów pyłowych) szacowały szczyt tempa formowania się nowych gwiazd na okres około 10 miliardów lat temu. Szczyt ten poprzedzony był mozolnym wzrostem tempa powstawania gwiazd od czasu Wielkiego Wybuchu (czarna linia na rys. 2). Najnowsze wyniki ALPINE (czerwona linia) pokazują, że po uwzględnieniu obserwowanej w ich programie emisji FIR z tych galaktyk tempo formowania się gwiazd w pierwotnym Wszechświecie było znacznie bardziej dynamiczne i 0,6 miliarda lat po Wielkim Wybuchu plasowało się na podobnym poziomie, jaki obserwujemy obecnie. Równocześnie badania te po raz kolejny pokazały, że informacje o tempie formowania gwiazd ukryte w promieniowaniu podczerwonym mają kluczowe znaczenie dla badania historii formowania się gwiazd we Wszechświecie.

Przyszłe obserwacje pozwolą astronomom uzyskać jeszcze bardziej solidne wnioski na temat składu, struktury i formowania się młodocianych galaktyk. W szczególności pomogą w tym obserwacje pochodzące z Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba. Ten operujący w zakresie podczerwonym teleskop satelitalny NASA charakteryzuje się głęboką czułością i wysoką rozdzielczością. Pozwoli on na otwarcie na oścież okna umożliwiającego badanie odległego Wszechświata. Będzie on dostarczał ważne informacje na temat procesów fizycznych, które sprawiają, że pierwotne galaktyki dorastają tak zaskakująco szybko.



#### Rozwiązanie zadania M 1755.

Wystarczy udowodnić tezę dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$ . Przeprowadźmy rozumowanie indukcyjne. Oczywiście  $n = 1 = \frac{2!}{2!}$ , dalej założmy, że dowolna liczba całkowita dodatnia mniejsza od  $n$  posiada żądane przedstawienie. Możemy zapisać:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k = \frac{p_1!}{(p_1 - 1)!} \cdot \frac{p_2!}{(p_2 - 1)!} \cdot \dots \cdot \frac{p_k!}{(p_k - 1)!},$$

dla pewnych liczb pierwszych  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k \leq n$ . Jednakże każdą z liczb  $1, 2, \dots, p_k - 1$  zapiszemy w żądany sposób, więc mianowniki  $(p_i - 1)!$  dla  $(1 \leq i \leq k)$  również, a więc  $n$  także.

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wiem, że polski i matematyka to najważniejsze przedmioty w szkole, ale ja wolę matematykę, bo nie ma w niej żadnych takich  $\epsilon$ ,  $q$ .

(z wywiadu z Jankiem, kandydatem na stypendystę Funduszu na Rzecz Dzieci)

Drogi Czytelniku, mając 7 lat mogłeś już wiedzieć, że są liczby parzyste i nieparzyste. Każda liczba naturalna  $m$  (czyli całkowita dodatnia) jest jednej z rzeczonych postaci:

$$m = 2k \text{ albo } m = 2k + 1, \text{ gdzie } k = 0, 1, 2, \dots$$

Jeśli podobnie jak cytowany wyżej Janek lubieś dodawać małe liczby, to szybko odkryłeś, że obowiązują następujące reguły:

- parzysta plus parzysta równa się parzysta,
- parzysta plus nieparzysta równa się nieparzysta,
- nieparzysta plus nieparzysta równa się parzysta.

Reguły te można krótko zakodować tak:  $p + p = p$ ,  $p + n = n$ ,  $n + n = p$ .

Dorastając, poznałeś z pewnością reguły mnożenia liczb dodatnich i ujemnych:

- dodatnia razy dodatnia równa się dodatnia,
- dodatnia razy ujemna równa się ujemna,
- ujemna razy ujemna równa się dodatnia.

Skrótowno i symbolicznie:  $d \cdot d = d$ ,  $d \cdot u = u$ ,  $u \cdot u = d$ . To praktycznie tak samo jak poprzednio, tylko zamiast  $p$  jest  $d$ , a zamiast  $n$  jest  $u$ .

Wyobrażam sobie, że gdy już wszystkie wiatry dzieciństwa przewiały Twoją niezdecydowaną głowę i wyjaśniło się, że muzykantem raczej nie zostaniesz, to zapisałeś się na Międzykierunkowe Studia Ekonomiczno-Matematyczne. Tam, na przedmiocie Algebra II, dotarliście do teorii grup. A po sesji na imprezie studenckiej zastanawialiście się, dlaczego złożenie wszystkich sześciu izometrii własnych trójkąta równobocznego w dowolnej kolejności nie może być nigdy identycznością? Rozstrzygnęła to odosobniona trzeźwa uwaga: są trzy permutacje parzyste i trzy nieparzyste, a więc iloczyn wszystkich permutacji musi być permutacją nieparzystą! Zadziałała naturalna ekstrapolacja wcześniejszej reguły mnemotechnicznej.

Te dość uniwersalne zasady pobudzały też do rozmyślań arytmetycznych młodocianego Karolka (Gaussa), gdy przygotowywał ostatni, najbardziej skomplikowany rachunkowo, rozdział swojej genialnej książki *Disquisitiones Arithmeticae*. A oto próbka jego kompozycji binarnych form kwadratowych.

Niech  $p$  oznacza dowolną liczbę naturalną, która daje się przedstawić jako

$$p = x^2 + 6y^2, \text{ przy pewnych całkowitych } x, y;$$

natomiast  $n$  niech oznacza liczbę postaci:

$$n = 2x^2 + 3y^2, \text{ gdzie } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Uzasadnimy teraz, że żadna liczba naturalna nie jest równocześnie postaci  $x^2 + 6y^2$  oraz  $2z^2 + 3t^2$  przy pewnych całkowitych  $x, y, z, t$ . Istotnie, przypuśćmy, że mamy „kontrprzykład”:  $x^2 + 6y^2 = 2z^2 + 3t^2$ . Wówczas  $x^2$  oraz  $2z^2$  dają tę samą resztę z dzielenia przez 3. Ponieważ kwadrat liczby całkowitej może dawać z dzielenia przez 3 wyłącznie reszty 0 i 1, więc obie liczby  $x^2$  i  $2z^2$  muszą być podzielne przez 3. Dlatego  $x = 3x_1$  oraz  $z = 3z_1$  dla pewnych liczb całkowitych  $x_1, z_1$ . Wstawiając te zależności do wyjściowej równości, uzyskujemy  $9x_1^2 + 6y^2 = 18z_1^2 + 3t^2$ , czyli  $3x_1^2 + 2y^2 = 6z_1^2 + t^2$ . Wygląda znajomo? Dostaliśmy kolejny „kontrprzykład”; zamiast czwórki liczb  $(x, y, z, t)$  jest  $(t, z_1, y, x_1)$ . Ta druga czwórka jest jednak „mniejsza” (np. w sensie sumy kwadratów). Ale nie możemy zmniejszać tych kontrprzykładów w nieskończoność, co kończy nasze uzasadnienie.

Mamy ponadto następujące trzy cudowne wzory:

$$\begin{aligned} (x^2 + 6y^2)(z^2 + 6t^2) &= (xz - 6yt)^2 + 6(xt + yz)^2, \\ (x^2 + 6y^2)(2z^2 + 3t^2) &= 2(xz + 3yt)^2 + 3(xt - 2yz)^2, \\ (2x^2 + 3y^2)(2z^2 + 3t^2) &= (2xz + 3yt)^2 + 6(xt - yz)^2, \end{aligned}$$

więc znowu działają te same zasady.



## Rozwiązanie zadania F 1077.

(a) Według prawa Newtona przyspieszenie spadku swobodnego na powierzchni Ziemi o masie  $M$  i promieniu  $R$  wynosi:

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Do tego wzoru podstawmy masę  $M$  obliczoną przy założeniu, że Ziemia jest kulą o jednorodnej gęstości,  $\rho_0 = 2,7 \text{ g/cm}^3$ :

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0.$$

Otrzymujemy oszacowanie:

$$G = \frac{3g}{4\pi R \rho_0}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy  $G \approx 1,38 \cdot 10^{-10} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

(b) Przyjmijmy model, w którym gęstość masy zmienia się liniowo z odległością  $r$  od środka Ziemi:

$$\rho(r) = \rho_c - (\rho_c - \rho_0) \frac{r}{R},$$

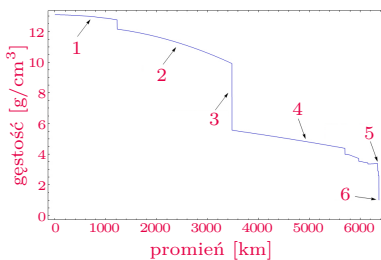
$\rho_0 = 2,7 \text{ g/cm}^3$  jest gęstością na powierzchni Ziemi ( $r = R$ ), a  $\rho_c$  to poszukiwana gęstość w jej środku ( $r = 0$ ). Obliczmy całkowitą masę Ziemi:

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr = 4\pi R^3 \left( \frac{\rho_c}{12} + \frac{\rho_0}{4} \right).$$

Otrzymujemy:

$$\rho_c = \frac{3M}{4\pi R^3} - 3\rho_0.$$

Po podstawieniu danych liczbowych  $\rho_c \approx 13,8 \text{ g/cm}^3$ . Geofizycy przyjmują  $\rho_c \approx 13,1 \text{ g/cm}^3$ .



- 1 - jądro wewnętrzne,
- 2 - jądro zewnętrzne,
- 3 - CMB,
- 4 - płaszcz,
- 5 - nieciągłość Moho,
- 6 - ocean

Rysunek przedstawia wspólnie przyjmowany model rozkładu gęstości wewnątrz Ziemi; widoczna na nim linia prosta to „nasz” model z części (b) rozwiązania. Wykres na podstawie A. M. Dziewonski and Don L. Anderson, *Physics of Earth and Planetary Interiors*, **25**, 297 (1981).

**Rozwiązanie zadania F 1078.**

Jeśli w czasie  $t$  zarejestrowano  $M$  cząstek, to w sumie w ciągu czasu  $M\tau$  licznik nie rejestrował docierających do niego cząstek. Oznaczmy jako  $N$  rzeczywistą liczbę cząstek. Na podstawie założenia, że liczba cząstek w jednostce czasu jest stała, mamy:

$$\frac{N}{t} = \frac{M}{t - M\tau}.$$

(a) Jako oszacowanie rzeczywistej liczby cząstek otrzymujemy:

$$N = \frac{Mt}{t - M\tau}.$$

(b) Do wyznaczenia martwego czasu licznika potrzebna jest znajomość różnicy liczby zliczeń w sytuacjach różniących się jedynie wpływem czasu martwego. Możemy to osiągnąć, porównując liczby impulsów w pomiarach:  $M_1$  – tylko pierwsze źródło,  $M_2$  – tylko drugie,  $M_3$  – oba jednocześnie. Należy pamiętać, że w każdym z pomiarów rejestrowane są także cząstki „tła” niezależnego od naszych źródeł – w czasie  $t$  każdorazowo ich liczba wynosi  $B_0$ . Dla  $\tau = 0$  mielibyśmy:  $N_3 = N_1 + N_2 - B_0$ , bo dla zliczeń, gdy  $\tau = 0$ , jest  $N_i = N_{i0} + B_0$ . Dla  $\tau > 0$  do związku  $N_3 = N_1 + N_2 - B_0$  podstawmy oszacowania na podstawie zarejestrowanych wartości  $M_1, N_2, M_3$  oraz  $B$  – oddzielnie zmierzonej wartości tła:

$$\frac{M_1 t}{t - M_1 \tau} + \frac{M_2 t}{t - M_2 \tau} = \frac{M_3 t}{t - M_1 \tau} + \frac{B t}{t - B \tau}.$$

Wartość  $\tau$  otrzymamy jako rozwiązanie wynikającego stąd równania kwadratowego. Ponieważ jednak zakładamy, że  $M_i \tau \ll t$  oraz  $B \tau \ll t$ , to możemy posłużyć się liniowymi przybliżeniami każdego z wyrazów:

$$\frac{M_i t}{t - M_i \tau} \approx M_i \left( 1 + M_i \frac{\tau}{t} \right);$$

$$\frac{B t}{t - B \tau} \approx B \left( 1 + B \frac{\tau}{t} \right).$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\tau \approx \frac{(M_1 + M_2 - M_3 - B)t}{M_3^2 + B^2 - M_1^2 - M_2^2}.$$

**Rozwiązanie zadania M 1754.**

Zachodzi nierówność  $1 - x^3 \leq \frac{3}{2}(1 - x^2)$ , gdyż po przekształceniach sprowadza się do nierówności  $(x - 1)^2(2x + 1) \geq 0$ , która jest prawdziwa dla  $x \geq 0$ . Podstawiając dla wygody  $x_1 = x, x_2 = y$  i  $x_3 = z$ , dostajemy zatem:

$$0 = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{2}{1 + x_i^3} - 1 \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{1 - x_i^3}{1 + x_i^3} \leq \frac{3}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{1 - x_i^2}{1 + x_i^3} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{1 - x_i}{1 - x_i + x_i^2}.$$

W powyższej opowieści zilustrowaliśmy rolę grupy cyklicznej dwuelementowej. To zaledwie początek wspaniałej niekończącej się historii... a Janek pragnie w niej uczestniczyć i dlatego wnosi o stypendium. W jego liście można przeczytać również:

*Co prawda nie lubię  $\epsilon$  i  $q$ , ale też pragnę, aby świat był dobry i piękny. Bo nie jest tak, że nie możemy zastosować naszej ukochanej matematyki do jakichkolwiek wyższych celów. Pokażę od razu zastosowanie do celów najwyższych – do etyki. Niech zatem będzie  $n$  cnót głównych. Powiemy, że osoba jest rozwiązła, wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada żadnych cnót. Mówimy wreszcie, że dwie grupy osób są ekwimoralne, gdy mają ten sam zestaw cnót. Wykażę następujące*

**Twierdzenie etyczne.** W każdej grupie więcej niż  $n$  „nierozwiązanych” osób istnieją dwie rozłączne podgrupy ekwimoralne.

*A oto mój dowód. Niech  $m$  będzie liczbą osób w grupie. Osobie numer  $k$  przyporządkujemy wektor cnót*

$$\gamma_k = (c_{k,1}, c_{k,2}, \dots, c_{k,n}) \in \mathbb{R}^n \text{ dla } k = 1, 2, \dots, m,$$

przy czym

$$c_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k\text{-ta osoba ma cnotę } j, \\ 0 & \text{gdy } k\text{-ta osoba nie ma cnoty } j. \end{cases}$$

*Ponieważ  $m > n$ , to z algebry liniowej wiemy, że istnieją  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ , nie wszystkie równe 0, takie, że*

$$(\spadesuit) \quad a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + \dots + a_m \gamma_m = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

*Jako zbiór numerów pierwszej grupy przyjmujemy  $K = \{k \leq n: a_k > 0\}$ ; jako zbiór numerów drugiej grupy  $L = \{l \leq n: a_l < 0\}$ . Równość  $(\spadesuit)$  na  $j$ -tej współrzędnej zapisuje się wtedy jako*

$$(\heartsuit) \quad \sum_{k \in K} a_k c_{k,j} = \sum_{l \in L} (-a_l) c_{l,j}.$$

*Wszystkie składniki występujące po obu stronach równości  $(\heartsuit)$  są nieujemne.*

*Jeśli zatem  $j$ -ta cecha występuje wśród osób ze zbioru  $K$  (tzn.  $c_{k,j} = 1$  dla pewnego  $k \in K$ ), to musi występować również wśród osób ze zbioru  $L$  (inaczej lewa strona  $(\heartsuit)$  byłaby dodatnia, a prawa zerowa). Analogiczny argument dowodzi, że jeśli  $j$ -ta cecha występuje wśród osób ze zbioru  $L$ , to musi również występować wśród zbioru  $K$ . Czy podoba się Państwu mój dowód?*

Tak... i to bardzo. Chociaż przedstawione przez Ciebie twierdzenie nie jest nowe, to podoba mi się zaproponowana nazwa i sposób, w jaki o nim opowiedziałeś. A propos oryginalnego nazewnictwa: pewne znane twierdzenie Halla z kombinatoryki nazywane jest *twierdzeniem o kojarzeniu małżeństw*. Wróćmy jednak do Twojego podania: doceniając Twój wysiłek, zaangażowanie i entuzjazm, przyznajemy Ci rzeczony stypendium.

I w ten oto sposób historia Janka Matematyka zaczęła się szczęśliwie, czyli dramatycznie inaczej niż się skończyła słynna historia Janka Muzykanta.

\*\*\*

*Jakże piękne jest Pole Mokotowskie – zagaił Zygmunt – I jak dobrze jest tu przyjść po sesji do pubu.*

*Czy widzieliście ostatnio Janka ...? – zapytał nerwowo Tomasz – Gdzieś zniknął, jakby go w ogóle nie było! – dodał niepewnie.*

*Może pomylił się w swoim roztargnieniu i poszedł do pubu Lolek? – snuła roztropne wyjaśnienia Katarzyna.*

*A może po prostu on woli matematykę i nudzi się w naszym wytornym  $\epsilon$ - $q$ -towarzystwie? – zniuansował Zygmunt.*

Ptaki, które uwiły swoje gniazda na koronach drzew otaczających puby, kwiliły na nutkę: ... *oj, mądry Jaś, oj mądry...* – przed Jankiem otwierała się wielka kariera naukowa...





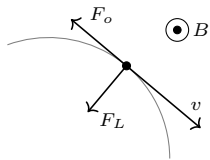
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2023

Przypominamy treść zadań:

**756.** Komora Wilsona znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B = 10^{-2}$  T. Cząstka naładowana wpada do tej komory z prędkością prostopadłą do linii pola  $\vec{B}$ . Stosunek ładunku do masy cząstki wynosi  $\alpha = q/m = 10^8$  C/kg. Po obrocie wektora prędkości o kąt  $\pi/2$  względna zmiana promienia krzywizny toru cząstki wynosi  $\varepsilon = 5\%$ . W tym momencie pole magnetyczne zostaje wyłączone i cząstka do chwili zatrzymania przebywa jeszcze drogę  $L = 30$  cm. Siła oporu podczas ruchu cząstki ma wartość proporcjonalną do jej prędkości. Znaleźć prędkość, z jaką cząstka wpadła do komory.

**757.** Ciało sztywne porusza się ruchem postępowym po szorstkiej powierzchni poziomej. W chwili  $t_0 = 0$ , gdy prędkość ciała wynosi  $v_0$ , zaczyna działać na nie siła  $F(t)$  rosnąca w czasie, działająca przez cały czas wzdłuż prostej przechodzącej przez środek masy ciała, o zwrocie zgodnym z wektorem  $v_0$ . Po czasie  $t$  prędkość ciała ma wartość  $v_t$ , przy czym  $v_t = 5$  m/s, gdy  $v_0 = 1$  m/s, i  $v_t = 13$  m/s, gdy  $v_0 = 10$  m/s. Znaleźć zależność  $v_t = f(v_0)$  dla dowolnych  $v_0$ .



Rys. 1

**756.** Podczas ruchu cząstki działa na nią styczna do toru siła oporu  $\vec{F}_o = -kv$ . Równanie ruchu wzdłuż trajektorii cząstki ma postać  $m dv/dt = -kv$ , stąd  $ds = v dt = -m dv/k$ , a dla skończonych przyrostów

$$(1) \quad \Delta s = -m \Delta v/k.$$

Gdy pole magnetyczne jest włączone, na cząstkę działa prostopadle do toru siła Lorentza (rys. 1), a promień krzywizny toru, gdy prędkość wynosi  $v$ , ma postać

$$(2) \quad R = \frac{mv}{qB} = \frac{v}{\alpha B}.$$

Zgodnie z treścią zadania po obrocie wektora prędkości o  $\pi/2$

$$(3) \quad \frac{-\Delta R_1}{R_0} = \frac{-\Delta v_1}{v_0} = \frac{\varepsilon}{100\%} = \gamma = 0,05,$$

gdzie  $v_0$  jest szukaną prędkością, z jaką cząstka wpada do komory, a  $R_0$  początkowym promieniem krzywizny toru. Zgodnie z (1)–(3) i uwzględniając, że  $-\Delta R_1 \ll R_0$ , możemy napisać:

$$(4) \quad \Delta s_1 \cong \frac{\pi R_0}{2} = \frac{\pi v_0}{2\alpha B}, \quad \Delta v_1 = -\gamma v_0, \quad \frac{m}{k} = \frac{\pi}{2\alpha B \gamma}.$$

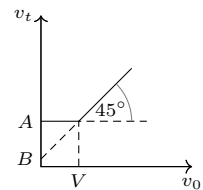
Gdy ruch cząstki jest prostoliniowy, w (1) podstawiamy:  $\Delta s = L$ ,  $\Delta v = -v_0(1 - \gamma)$ , stąd

$$L = \frac{\pi v_0 (1 - \gamma)}{2\alpha B \gamma}.$$

Szukana prędkość dana jest wzorem

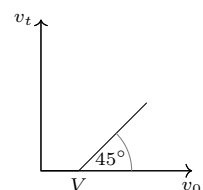
$$v_0 = \frac{2\alpha L B \gamma}{\pi(1 - \gamma)} = 10^4 \text{ m/s}.$$

**757.** Od chwili  $t = 0$  na ciało działają dwie siły:  $F(t)$  rosnąca w czasie i siła tarcia, która może przybierać wartości od zera do  $\mu mg$ , gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia, a  $m$  masą ciała. Gdy  $F(0) > \mu mg$ , przyspieszenie ciała  $a(t) = (F(t) - \mu mg)/m > 0$  i zmiana prędkości w danym przedziale czasowym nie zależy od prędkości początkowej:  $v_t = v_0 + C$ , gdzie  $C$  jest dodatnią stałą. Dane w zadaniu wskazują, że  $v_t - v_0$  nie jest stałe, zatem  $F(0) < \mu mg$ . Ponieważ siła rośnie w czasie, to w pewnym momencie  $\tau$  osiąga ona wartość  $\mu mg$ , przy czym wyróżniona w zadaniu chwila końcowa może być większa albo mniejsza od  $\tau$ .



Rys. 2

1)  $t > \tau$ . Tu również możliwe są dwa przypadki: a) w chwili  $\tau$  prędkość ciała  $v_\tau = 0$  oraz b)  $v_\tau > 0$ . Przypadek a) może zachodzić tylko przy odpowiednio małych prędkościach początkowych. Prędkość  $v_t$  nie zależy wtedy od  $v_0$  (ciało porusza się ruchem opóźnionym, zatrzymuje się i w chwili  $\tau$  znowu zaczyna poruszać się z przyspieszeniem, „zapominając” o prędkości początkowej):  $v_t = A = \text{const} > 0$ . Przypadek b) zachodzi, gdy prędkość początkowa osiąga taką wartość  $V$ , przy której ciało nie zatrzymuje się. Wtedy  $v_t = v_0 + B$ . Wykres zależności  $v_t = f(v_0)$  przedstawia rysunek 2.



Rys. 3

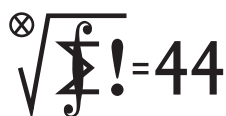
2)  $t < \tau$ . Gdy  $v_0 > V$ , ciało porusza się ruchem opóźnionym i  $v_t - v_0 = D = \text{const} < 0$ . Dla  $v_0 \leq V$  ciało zawsze się zatrzyma:  $v_t = 0$ . Wykres zależności  $v_t = f(v_0)$  przedstawia rysunek 3.

Dane liczbowe można dopasować tylko do rysunku 2. Otrzymujemy:

$$v_t = 5 \text{ m/s} \quad \text{dla } v_0 \leq 2 \text{ m/s},$$

$$v_t = v_0 + 3 \text{ m/s} \quad \text{dla } v_0 > 2 \text{ m/s}.$$

# Klub 44 M



Redaguje Marcin E. KUCZMA

## Rozwiązania zadań z numeru 4/2023

Przypominamy treść zadań:

**859.** Dla ustalonej liczby naturalnej  $n \geq 2$  wyznaczyć liczbę słów długości  $n$ , tworzonych z symboli  $A, B$  i mających następującą własność: w każdym spójnym odcinku słowa liczba wystąpień symbolu  $A$  różni się od liczby wystąpień symbolu  $B$  co najwyżej o 2.

**860.** Znaleźć wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające równanie

$$f(xf(y)) = xf(y) + yf(x) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 853 ( $WT = 2,44$ ) i 854 ( $WT = 1,56$ ) z numeru 1/2023

Norbert Porwol	Essen	41,83
Paweł Najman	Kraków	39,93
Radosław Kujawa	Wrocław	39,13
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olsztyn	33,06
Paweł Kubit	Kraków	31,35
Janusz Fiett	Warszawa	31,19
Michał Adamaszek	Kopenhaga	30,63

**859.** Przedmiotem rozważań są słowa  $x_1 \dots x_n$  o wyrazach  $x_i \in \{-1, +1\}$ , w których liczby  $-1, +1$  zastępują (odpowiednio) symbole  $A, B$ . Niech

$$s_k = x_1 + \dots + x_k \quad \text{dla } k = 1, \dots, n; \quad s_0 = 0.$$

Każdy ciąg  $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ , w którym

$$(1) \quad s_0 = 0; \quad |s_i - s_{i+1}| = 1 \quad \text{dla } i = 1, \dots, n$$

jednoznacznie definiuje słowo  $x_1 \dots x_n$ . Własność sprecyzowana w treści zadania łatwo tłumaczy się na równoważny warunek dla sum  $s_k$ :

$$(2) \quad |s_k - s_j| \leq 2 \quad \text{dla } 0 \leq j < k \leq n.$$

Zadanie sprowadza się do zliczenia ciągów  $(s_0, \dots, s_n)$  spełniających warunki (1) i (2).

Warunek (2) mówi, że średnica zbioru  $\{s_0, \dots, s_n\}$  wynosi co najwyżej 2. Skoro  $s_0 = 0$ , możliwe są przypadki:

$$(3) \quad \text{wszystkie } s_k \in \{-1, 0, 1\};$$

$$(4) \quad \text{wszystkie } s_k \in \{0, 1, 2\} \quad \text{lub} \quad \text{wszystkie } s_k \in \{-2, -1, 0\}.$$

Weźmy na warsztat przypadek (3). Z warunku (1) widać, że  $s_k$  ma taką samą parzystość jak  $k$ , więc

$$s_2 = s_4 = \dots = 0, \quad s_1, s_3, \dots \in \{1, -1\}.$$

Swobodę wyboru mamy na pozycjach o numerach nieparzystych. W zbiorze  $\{1, \dots, n\}$  jest  $\lceil n/2 \rceil$  liczb nieparzystych. Zatem liczba ciągów  $(s_k)$  spełniających warunki (1), (2), (3) wynosi  $2^{\lceil n/2 \rceil}$ .

Przypadek (4) rozpada się na dwa równoliczne podprzypadki ( $s_k \geq 0, s_k \leq 0$ ). Weźmy podprzypadek  $s_k \in \{0, 1, 2\}$ . Teraz mamy

$$s_1 = s_3 = \dots = 1, \quad s_2, s_4, \dots \in \{0, 2\}.$$

Tym razem swobodę wyboru mamy na pozycjach o numerach parzystych, których jest  $\lfloor n/2 \rfloor$ . Podprzypadek  $s_k \in \{0, -1, -2\}$  jest symetryczny. Liczba ciągów  $(s_k)$  spełniających warunki (1), (2), (4) wynosi zatem  $2 \cdot 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

Przypadki (3), (4) nie są jednak rozłączne. Dwukrotnie zliczone zostały dwa ciągi:  $(s_1, \dots, s_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$  oraz  $(-1, 0, -1, 0, \dots)$ , i tylko one. Stąd ostateczny wynik:  $W = 2^{\lceil n/2 \rceil} + 2^{1+\lfloor n/2 \rfloor} - 2$ ; lub w formie „klamerkowej”:

$$W = \begin{cases} 3 \cdot 2^m - 2 & \text{dla } n = 2m, \\ 2^{m+1} - 2 & \text{dla } n = 2m - 1. \end{cases}$$

**860.** Funkcja równa tożsamościowo zero spełnia równanie. Wykażemy, że każda inna funkcja  $f$ , która je spełnia, jest różnowartościowa. Niech więc  $f(c) \neq 0$  dla pewnego  $c$ . Oczywiście  $c \neq 0$ , bowiem  $f(0) = 0$  (z podstawienia  $x = y = 0$ ).

Weźmy liczby  $a, b$  takie, że  $f(a) = f(b) = : d$  i podstawmy w równaniu najpierw  $x = c, y = a$ , a następnie  $x = c, y = b$ :

$$f(cd) = cd + af(c), \quad f(cd) = cd + bf(c),$$

skąd (przez odjęcie stronami)  $(a - b)f(c) = 0$ , czyli  $a = b$ ; mamy różnowartościowość.

Przy zamianie zmiennych  $x, y$  wyrażenie po prawej stronie równania nie zmienia wartości, więc to po lewej stronie – też. Wobec różnowartościowości funkcji  $f$  znaczy to, że

$$yf(x) = xf(y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Biorąc  $y = c$ , dostajemy równość

$$f(x) = Ax \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

gdzie  $A = f(c)/c$ . Wracamy do równania w wyjściowej postaci, wstawiamy  $f(x) = Ax$ ; dostajemy  $A^2xy = 2Axy$  (dla wszystkich  $x, y$ ); stąd  $A = 2$ .

Odpowiedź: równanie jest spełnione przez dwie funkcje:  $f(x) \equiv 0$  oraz  $f(x) = 2x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .

### Skrót regulaminu

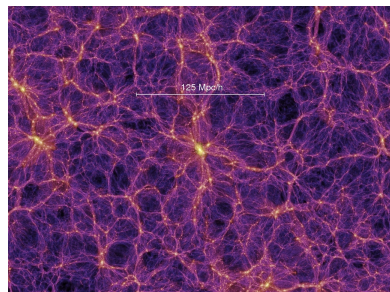
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Prosto z nieba: Najsamotniejsze galaktyki we Wszechświecie

Na przykład pobliska galaktyka Andromedy znajduje się w odległości 2,5 miliona lat świetlnych od nas. Droga Mleczna jest na kursie kolizyjnym z Andromedą i zderzy się z nią za około 4,5 miliarda lat.

O projekcie Galaxy Zoo pisał Louis Suelves w  $\Delta_{23}^2$ .



Wielkoskalowa struktura Wszechświata według symulacji Millenium. Źródło: Volker Springel/Max Planck Institute For Astrophysics via Wikimedia Commons

Artykuł powstał na podstawie publikacji "The Loneliest Galaxies in the Universe: A GAMA and GalaxyZoo Study on Void Galaxy Morphology", Lori E. Porter et al. 2023, arXiv:2304.05999.

Astronomowie od bardzo dawna próbują zrozumieć, jak otoczenie i środowisko galaktyk wpływają na ich rozwój. Udają trochę psychologów, zadając pytanie: czy galaktyki społeczne, żyjące w tłumie rozwijają się inaczej niż te preferujące samotność? Oczywiście astronomiczny „tłum” bardzo różni się od zwykłego rozumienia tego pojęcia. Szczególnie że, kiedy astronom mówi, że coś jest „w pobliżu” danej galaktyki, to ma na myśli odległości rzędu kilku tysięcy (lub milionów) lat świetlnych. Gdy spojrzymy na Wszechświat jako całość, to materia (zarówno ta zwykła, jak i ciemna) tworzy skomplikowaną sieć gęstych obszarów (tzw. filamentów) poprzątkanych prawie zupełnie pustymi regionami przestrzeni, zwanymi pustkami (rys. 1).

Okazuje się, że zdecydowana większość galaktyk jest ekstrawertyczna i lubi gromadzić się w gęstych obszarach kosmicznej sieci. Jednak niektóre galaktyki istnieją w pustkach. Można śmiało powiedzieć, że są one jednymi z najbardziej odizolowanych obiektów we Wszechświecie. Ich samotna egzystencja mogła nadać im odrębne właściwości, a nawet wpłynąć na ich kształt. A przynajmniej taka jest hipoteza.

Grupa astronomów skupiona wokół projektu Galaxy and Mass Assembly (GAMA) sprawdziła, czy rzeczywiście tak jest, porównując właściwości galaktyk w pustkach i ich odpowiedników w gęstych filamentach kosmicznej sieci. W badaniach pomogli im internauci w ramach obywatelskiego projektu naukowego GAMA-KiDS Galaxy Zoo, którzy sklasyfikowali galaktyki na podstawie ich cech fizycznych.

Badacze wykorzystali zależność pomiędzy rozmiarem a masą galaktyk, aby sprawdzić, jak bardzo są one rozwinięte w gęstych ośrodkach i w pustkach. Idea jest taka, że galaktyki o większych rozmiarach mają jednocześnie większą masę, ze względu na wcześniejsze zderzenia z innymi galaktykami, a tym samym dłuższy czas życia (im starsza galaktyka, tym więcej czasu miała na zderzenia). Taką rosnącą zależność obserwujemy dla galaktyk w gęstym środowisku filamentów. Co ciekawe, zależność wygląda identycznie dla ich samotnych odpowiedników. Czyżby więc zderzenia galaktyk, które przecież są rzadsze w pustkach, nie miały tak dużego wpływu na ewolucję galaktyk?

A co z kształtem odizolowanych galaktyk? I tutaj pojawia się kilka niespodzianek. Wydaje się, że galaktyki w pustkach są przeważnie spiralne, z bardzo dobrze widocznym centralnym zgrubieniem. Wybrzuszenia te składają się głównie ze starszych gwiazd, ponieważ nie ma w nich pyłu i gazu, z którego mogłyby powstać nowe gwiazdy. Dla odmiany galaktyki w gęstszych obszarach wykazują dużo większą różnorodność kształtów, a zgrubienie centralne występuje znacznie rzadziej.

Wszystkie te podobieństwa i różnice są jednak bardzo subtelne. Autorzy badań ostrzegają przed wyciąganiem kategorycznych wniosków, biorąc pod uwagę niewielki rozmiar próbki galaktyk. Mimo to wyniki badań wskazują, że odizolowane galaktyki mogą ewoluować inaczej niż ich odpowiedniki w gęstszych regionach Wszechświata. Przy większym rozmiarze próbki galaktyk różnice mogą stać się bardziej wyraźne. Tymczasem jednak galaktyki w pustkach wydają się mieć dobrze – mimo swojej izolacji. Wielu introwertyków pewnie się z nimi zgodzi.

*Anna DURKALEC*

Departament Badań Podstawowych (BP4),  
Zakład Astrofizyki, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

## Niebo w sierpniu

Ósmy miesiąc roku jest pierwszym z czterech z szybko ubywającym dniem i wydłużającą się nocą. Od 1 sierpnia do 1 grudnia Słońce obniży wysokość górowania o  $40^\circ$ , a czas jego przebywania nad widnokregiem skróci się o ponad 7 godzin. W samym sierpniu natomiast deklinacja Słońca zmniejsza się o niecałe  $10^\circ$ , a dzień skraca się do 14 godzin. Cały kraj obejmuje już noc astronomiczna, i nie ma szans na tzw. obłoki srebrzyste.

Podobnie jak na łuk okołohoryzontalny, ponieważ Słońce góruje i dołuje zbyt nisko.

W pierwszej połowie miesiąca ozdobą porannego nieba stanie się Księżyc, który 1 sierpnia przejdzie przez pełnię na tle gwiazdozbioru Koziorożca i w kolejnych dniach podąży ku nowiu. Ze względu na korzystnie nachyloną rano ekliptykę Srebrny Glob pozostanie widoczny prawie

do samego spotkania ze Słońcem 16 sierpnia. Do tego czasu odwiedzi wszystkie widoczne rano planety Układu Słonecznego.

Zacznie od **Saturna**, którego minie w dniach 2 i 3 sierpnia, zbliżając się za każdym razem na około  $7^\circ$  i prezentując przy tym tarczę w fazie, odpowiednio, 97% i 93%. Planeta Saturn 27 sierpnia znajdzie się w opozycji do Słońca, sierpień i wrzesień są zatem najlepszymi miesiącami do obserwacji Saturna w tym sezonie. Planeta świeci przez całą noc, górując około godziny 2 na wysokości ponad  $25^\circ$  nad widnokregiem. W sierpniu Saturn zwiększy jasność do  $+0,4^m$  i średnicę tarczy do  $19''$ .

Kolejną noc Księżyc spędzi, przechodząc  $2,5^\circ$  od świecącego z jasnością obserwowaną  $+7,8^m$  **Neptuna**. Ostatnia planeta Układu Słonecznego przejdzie przez opozycję trzy tygodnie po Saturnie i wciąż zbliża się do bardzo ułatwiającej jej odszukanie gwiazdy 5. wielkości 20 Psc. Do końca miesiąca odległość między oboma ciałami niebieskimi spadnie poniżej  $20'$ . Oczywiście jasny blask Księżyca w praktyce uniemożliwi odszukanie planety, warto jednak zapamiętać jej pozycję względem okolicznych gwiazd i wrócić doń w drugiej połowie miesiąca przy ciemnym niebie. Na koniec nocy Srebrny Glob zakryje gwiazdę 5. wielkości 27 Psc. Zjawisko zacznie się około godziny 3 i skończy już na jaśniejącym niebie nieco ponad godzinę później.

8 sierpnia Księżyc w ostatniej kwadrze odwiedzi **Jowisza**, a dobę później – **Urana**. Obie planety powoli zbliżają się do listopadowych opozycji i są już widoczne całkiem dobrze. Pod koniec nocy astronomicznej wznoszą się na wysokość powyżej  $30^\circ$ . Jowisz w sierpniu przekroczy jasność  $-2,5^m$ , a tarcza zwiększy średnicę do  $44''$ . Uran świeci z jasnością  $+5,8^m$ , kreśląc swoją pętlę jakieś  $9^\circ$  na północny wschód od Jowisza. Księżyc zbliży się do Jowisza na  $4^\circ$ , do Urana zaś na  $2^\circ$ . 29 sierpnia Uran zmieni kierunek swojego ruchu na wsteczny, co oznacza, że planeta w sierpniu pokona na niebie zaledwie  $20'$ , a na przełomie sierpnia i września prawie nie porusza się względem tła gwiazd.

Do nowiu Księżyc nie spotka się już z jasnym ciałem Układu Słonecznego, lecz bardzo ładnie zaprezentuje swoją tarczę w fazie cienkiego sierpa, ze świetnie widocznym tzw. światłem popielatym. 10 sierpnia tarcza Księżyca w fazie 33% pokaże się  $9^\circ$  na północ od Aldebarana w Byku, 11 sierpnia zaś, przy fazie zmniejszonej do 24%, zbliży się na  $3^\circ$  do El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy tej konstelacji. 14 sierpnia, prezentując sierp w fazie zaledwie 5%, Srebrny Glob wzejdzie niecałe  $4^\circ$  od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt. Kolejnej nocy natomiast, na jakieś 30 godzin przed nowiem, o świcie Księżyc zdąży się wznieść na około  $5^\circ$  z bardzo cienkim sierpem, w fazie mniejszej od 2%. W lornetkach  $1,5^\circ$  na prawo od niego ukaże się gwiazda Asellus Borealis, stanowiąca północno-wschodni róg trapezu gwiazd otaczającego gromadę otwartą M44.

Sierpniowy nów Księżyca bardzo dobrze zbiega się z aktywnością corocznego roju meteorów Perseidów. Meteory z tego roju pojawiają się od 17 lipca do 24 sierpnia, z maksimum w okolicach 12 sierpnia. Są to szybkie meteory, ich prędkość zderzenia z naszą atmosferą wynosi  $59\text{ km/s}$ , a ich radiant znajduje się na pograniczu

gwiazdozbiorów Perseusza i Kasjopei, wznosząc się pod koniec nocy astronomicznej na wysokość ponad  $60^\circ$ .

A zatem przy słabo świecącym Księżycu w drugiej dekadzie miesiąca można liczyć nawet na ponad 100 zjawisk na godzinę. Perseidy często pozostawiają po sobie smugi rozwiewającego się dymu, efektownie prezentując się na serii kilkudziesięciu wykonanych po sobie zdjęć.

Po nowiu Księżyc przeniesie się na niebo wieczorne, gdzie przy nisko położonej ekliptyce jest widoczny bardzo słabo, wznosząc się po zmierzchu co najwyżej na małe kilkanaście stopni ponad widnokrąg. 21 sierpnia Srebrny Glob w fazie 24% pokaże się  $3^\circ$  od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny. 24 dnia miesiąca natomiast Księżyc w I kwadrze odwiedzi gwiazdozbiór Skorpiona, zajmując wieczorem pozycję prawie w połowie drogi między Antaresem, czyli najjaśniejszą gwiazdą konstelacji, a charakterystycznym łukiem gwiazd z północno-zachodniej części Skorpiona.

W sierpniu zaczyna się trwający 5 lat sezon zakryć Antaresa przez Księżyc. W tym czasie dojdzie do 68 takich zjawisk. Niestety Europa ma pecha i żadnego z nich nie da się dobrze obserwować z terenu Polski. Jedynie zakrycie 18 października 2023 roku zajdzie w całości nad horyzontem u nas, lecz jest to zakrycie dzienne, do zaobserwowania przez większe teleskopy. 12 kwietnia 2028 roku pas zakrycia przejdzie m.in. nad południowo-wschodnią Europą (w Polsce wschodzący po północy Księżyc odkryje Antaresa bardzo nisko nad horyzontem), a 4 lipca 2028 roku zjawisko zajdzie m.in. nad Półwyspem Iberyjskim (w Polsce Księżyc zajdzie przed początkiem zakrycia, przejdzie za to bardzo blisko gromady kulistej M4, której sezon zakryć zaczyna się w styczniu przyszłego roku). Pasy widoczności pozostałych 65 zakryć przebiegają daleko od Europy.

Do końca miesiąca Srebrny Glob zwiększy swoją fazę do pełni, przez którą przejdzie 31 sierpnia o godzinie 3:36. W tym czasie odwiedzi gwiazdozbiory Strzelca, Koziorożca i Wodnika, wędrując przy tym głęboko pod ekliptyką. Z ciekawszych spotkań z jaśniejszymi obiektami nieba warto wymienić zbliżenie 26 sierpnia w fazie 75% na około  $2^\circ$  do gwiazd 3. wielkości Anas (γ Sgr) i Kaus Meridianalis (δ Sgr) w Strzelcu oraz zbliżenie do jaśniejszej o  $1^m$  gwiazdy Nunki (σ Sgr) dobę później (w fazie 84%) i ponowne spotkanie z Saturnem 30 dnia miesiąca, kilka godzin przed pełnią. W związku z niedawną opozycją podczas tego spotkania tarcza Saturna świeci o  $0,2^m$  jaśniej niż podczas koniunkcji z początku sierpnia. I powinno dać się to zauważyć.

Planeta **Wenus** 13 sierpnia przejdzie przez koniunkcję dolną ze Słońcem i przeniesie się na niebo poranne. Niestety Wenus przeżywa teraz maksymalnie na południe od ekliptyki, dlatego mimo korzystnego jej nachylenia rano planeta zacznie wylaniać się z zorzy porannej dopiero pod koniec miesiąca. Szybko jednak nabierze wysokości, stając się ozdobą porannego nieba jesienią i zimą. W tych pierwszych dniach widoczności średnica tarczy planety przekracza  $50''$ , a faza jest mniejsza niż 10%. Jasność natomiast przekracza  $-4^m$ . Jest zatem atrakcyjnym celem dla posiadaczy nawet niedużych lornetek.

Ariel MAJCHER



## Najgorszy sort odkrycia naukowego

W astronomii radiowej szybki błysk radiowy (*Fast Radio Burst*, FRB) to krótkotrwały impuls radiowy o długości od ułamka milisekundy do 3 sekund. Źródło FRB pozostaje nieznane, można jednak szacować, że podczas jednego milisekundowego błysku uwalniane jest tyle energii, ile Słońce emituje przez trzy dni. Mimo że FRB są niezwykle energetyczne w miejscu powstania, natężenie dochodzących

do nas fal elektromagnetycznych jest niewielkie – typowo odpowiada mierzonemu na Ziemi sygnałowi, jaki emitowałby telefon komórkowy umieszczony na powierzchni Księżyca. Pierwszy FRB został odkryty przez Duncana Lorimera i Davida Narkevica w 2007 roku, gdy badacze przeglądali archiwalne dane z badań pulsarów. Za tym pierwszym odkryciem szybko posypały się następne.

W związku z zakrojonym na szeroką skalę poszukiwaniem FRB takie ciekawe sygnały wykryto także w danych zebranych od 2001 roku przez radioteleskop w Obserwatorium Parkes w Australii. Różniły się jednak one nieco od zjawisk widzianych przez innych badaczy, gdyż częstotliwość rejestrowanej fali elektromagnetycznej wyraźnie malała w czasie. Prowadząca te badania Sarah Burke-Spolaor miała dodatkowe wątpliwości, czy znalezione błyski były na pewno pochodzenia kosmicznego. Pokrywały bowiem całe pole widzenia radioteleskopu i nie wydawały się pochodzić z żadnego konkretnego kierunku. Burke-Spolaor, podejrzewając, że mogą być nawet dziełem człowieka, nadała im pieszczotliwe miano perytonów, od fikcyjnych stworów pokroju jelenia ze skrzydłami rzucającego ludzki cień. I szukała dalej.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Peryton\\_\(astronomy\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Peryton_(astronomy))

Przeszukiwanie danych zebranych w Parkes w latach 1998–2015 pozwoliło znaleźć w sumie 46 perytonów, ale aż 16 z nich zostało zaobserwowanych 23 czerwca 1998 roku w czasie zaledwie 7 minut! I na dodatek wszystkie pochodziły z tego samego kierunku!

Do 2015 roku 25 perytonów było już bohaterami publikacji naukowych. Chociaż w tym momencie astronomowie podejrzewali ich ziemskie pochodzenie, nie byli jednak zgodni, co tak naprawdę je powoduje. Pomysłów na wyjaśnienie było wiele – uczeni zaproponowali m.in., że perytony mogłyby być błyskami emitowanymi w jonosferze, efektami wyładowań atmosferycznych, rozbłyskami słonecznymi lub składowymi jakichś ziemskich błysków gamma.

Nieoczekiwanie z pomocą przyszedł wówczas gwałtowny rozwój telefonii komórkowej i Internetu. Ponieważ aktywność takich usług cyfrowych zanieczyszcza falami elektromagnetycznymi zakres czułości radioteleskopów, w Obserwatorium w Parkes zainstalowano w 2014 roku czujniki promieniowania elektromagnetycznego. Bardzo szybko okazało się wtedy, że każdemu nowo odkrytemu perytonowi towarzyszy emisja mikrofal o częstotliwości 2,5 gigaherca spoza pola widzenia radioteleskopu. Odtąd wypadki potoczyły się szybko, a nieskomplikowana demonstracja pozwoliła zrozumieć do końca naturę perytonów.

Pokaz ten miał miejsce 17 marca 2015 roku. Wtedy to do starej, 27-letniej kuchenki mikrofalowej znajdującej się w kuchni Obserwatorium włożono kubek wypełniony wodą i podczas podgrzewania naczynia zniecała otworzono drzwi kuchenki. Mechanizmy zabezpieczające wyłączyły wówczas magnetron kuchenki, ale nie dość szybko, aby zapobiec mikrosekundowemu „wyciekowi” promieniowania z wnętrza urządzenia. Te zabawy z kuchenką dały początek kolejnym trzem perytonom, co dosyć jednoznacznie zidentyfikowało ich naturę i pochodzenie.

Dzisiaj ta historia może wydawać się przede wszystkim zabawna. Trzeba jednak pamiętać o tym, na czym polegają naprawdę badania naukowe. Dobrze oddaje to apokryficzny cytat z Einsteina, który (nie) powiedział, że gdybyśmy wiedzieli, czym jest to, co robimy, nie nazywałoby się to nauką. Niekiedy można sobie przemyśleć i przygotować drogę do odkryć, często jednak badaczom udaje się zobaczyć zjawiska nowe i niezrozumiałe, które dopiero domagają się jakiegokolwiek wyjaśnienia. To właśnie niespodzianki sprawiają, że nauka jest tak pasjonująca. I czasem wiedzie na manowce.

Krzysztof TURZYŃSKI



## Łańcuchy Markowa – część 2

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Tym razem spojrzymy na łańcuchy Markowa pod nieco innym kątem – będziemy analizować ich średni czas dojścia do określonego stanu, mierzony liczbą kroków. Jako przykład rozwiążemy następujące zadanie, które pojawiło się na Obozie Naukowym Olimpiady Matematycznej w Zwardoniu w 2001 roku.

*Pewnego wieczora Fredrek opowiada dowcipy, przy czym wybiera je losowo (z jednakowym prawdopodobieństwem) z 3-elementowego zbioru znanych sobie dowcipów. Paula śmieje tylko jeden dowcip Fredka i śmieje się zawsze, kiedy Fredek go opowiada. Andrzej śmieje się z każdego dowcipu, którego nie pamięta, a pamięta zawsze dwa poprzednie. Maniek zaś śmieje się wtedy, gdy Fredrek opowiada ten sam dowcip, co przed chwilą. Kiedy **po raz drugi z rzędu nikt nie śmieje się z opowiadanego dowcipu**, Fredrek obrażony idzie spać. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby dowcipów, które Fredrek opowie tego wieczora.*

*Rozwiązanie.* Niech  $A, B, C$  będą dowcipami Fredka, przy czym dowcipem bawiącym Paula jest  $C$ . Fredrek zakończy opowiadanie dowcipów po wystąpieniu ciągu  $ABAB$  lub  $BABA$ . Możemy rozważyć następujące stany, zależnie od tego, jak kończy się ciąg opowiadanych dowcipów.



- $S_C$  – stan początkowy lub ciąg zakończony na  $C$ ,
- $S_A$  – ciąg zakończony na  $A$ , ale nie na  $BA$ ,
- $S_B$  – ciąg zakończony na  $B$ , ale nie na  $AB$ ,
- $S_{AB}$  – ciąg zakończony na  $AB$ , ale nie na  $BAB$ ,
- $S_{BA}$  – ciąg zakończony na  $BA$ , ale nie na  $ABA$ ,
- $S_{ABA}$  – ciąg zakończony na  $ABA$ , ale nie na  $BABA$ ,
- $S_{BAB}$  – ciąg zakończony na  $BAB$ , ale nie na  $ABAB$ ,
- $S_{koniec}$  – ciąg zakończony na  $ABAB$  lub  $BABA$ .

Niech  $E_i$  oznacza wartość oczekiwaną liczby opowiedzianych dowcipów *pod warunkiem* rozpoczęcia od stanu  $S_i$ . Oczywiście  $E_{koniec} = 0$ , a poszukujemy  $E_C$ . Dla przykładu, w stanie  $S_{AB}$  mamy możliwe trzy przejścia: dowcip  $A$  przeniesie nas do stanu  $S_{ABA}$ , dowcip  $B$  do stanu  $S_B$ , a dowcip  $C$  do stanu  $S_C$ . Wynika z tego, że  $E_{AB} = 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_B + \frac{1}{3}E_{ABA}$ . Analogicznie dla pozostałych sześciu stanów:

$$\begin{aligned} E_C &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_A + \frac{1}{3}E_B, & E_A &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_A + \frac{1}{3}E_{AB}, \\ E_B &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_B + \frac{1}{3}E_{BA}, & E_{BA} &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_A + \frac{1}{3}E_{BAB}, \\ E_{ABA} &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_A, & E_{BAB} &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_B. \end{aligned}$$

Możemy ułatwić sobie obliczenia, gdyż ze względu na symetrię zachodzą równości  $E_A = E_B$ ,  $E_{AB} = E_{BA}$ ,  $E_{ABA} = E_{BAB}$ . Bezpośredni rachunek prowadzi do  $E_C = 60$ , więc zanosi się na długi, męczący wieczór.

### Zadania

1. Robaczek wdrapuje się na drzewo do swojej dziupli, która znajduje się na wysokości 40 cm. W każdej minucie z prawdopodobieństwem  $p$  wchodzi 10 cm wyżej lub (z prawdopodobieństwem  $1 - p$ ) ześlizguje się 10 cm w dół (z wyjątkiem sytuacji, w której jest u podnóża drzewa – stamtąd zawsze idzie w górę). W zależności od  $p$  wyznaczyć wartość oczekiwaną czasu potrzebnego robaczce do dotarcia do dziupli z podnóża drzewa.
2. W urnie  $A$  znajduje się 8 kul białych, a w urnie  $B$  8 kul czarnych. Losujemy po jednej kuli z każdej urny, następnie kulę z urny  $A$  wkładamy do urny  $B$ , a kulę z urny  $B$  do urny  $A$ . Jaka jest wartość oczekiwana liczby losowań, po której liczby kul białych i czarnych w obu urnach będą równe?
3. Rzucamy sześcienną kostką do gry i badamy iloczyn wszystkich liczb wyrzucanych oczek (powtarzające się mnożymy tyle razy, ile się powtarzają). Kończymy zabawę, gdy iloczyn będzie miał dwie ostatnie cyfry równe 0. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczbę rzutów.
4. Na centralnym polu szachownicy  $3 \times 5$  stoi skoczek i porusza się zgodnie z szachowymi regułami, za każdym razem losując ruch ze wszystkich dostępnych (z jednakowym prawdopodobieństwem). Skoczek kończy zabawę, gdy wróci na centralne pole. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczbę ruchów skoczka.

**Wskazówki do zadań**

1. Mamy tu pięć stanów:  $S_0$  oznacza wysokość robaczki równą 10 cm, dla  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ .
2. Stan  $S_i$  może oznaczać liczbę  $i$  kul czarnych w urnie  $A$  – wtedy stan  $S_0$  jest początkowy, a stan  $S_4$  – pochłaniający.
3. Dla  $i = 1, 2, 3$  mamy tu  $p_{i,i-1} = \frac{2}{6}$ ,  $p_{i,i} = \frac{2}{6}$  oraz  $p_{i,i+1} = \frac{2}{6}$ .
3. Niech  $x_n$  będzie iloczynem wszystkich wyrzucanych liczb oczek po  $n$  rzutach. Wstawimy analizowane liczby  $(x_n, 100)$ , więc mamy możliwe następujące stany: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.
4. Ze względu na symetrię jest tu tylko 6 niewiadomych.



# KONKURS LITERACKI

POLSKIEJ FUNDACJI FANTASTYKI NAUKOWEJ

IV EDYCJA



## Czwarta edycja konkursu literackiego Polskiej Fundacji Fantastyki Naukowej

Polska Fundacja Fantastyki Naukowej (PFFN) ogłasza nabór opowiadań na coroczny konkurs, którego celem jest wyłonienie najlepszych tekstów utrzymanych w konwencji fantastyki naukowej, napisanych przez debiutantów. Tegoroczna edycja konkursu objęta została honorowymi patronatami Polskiego Towarzystwa Informatycznego i The Lem Estate oraz patronatami medialnymi miesięczników „Delta” i „Młody Technik”. Podobnie jak w przypadku wcześniejszych edycji, czwarta odsłona konkursu PFFN jest skierowana do autorek i autorów, którzy ukończyli 16 lat i nie opublikowali jeszcze żadnej książki lub wydali co najwyżej jedną książkę drogą self-publishingu.

Przyjmowane będą oryginalne, samodzielnie napisane opowiadania, nigdzie dotychczas niepublikowane. Ideą konkursu jest promocja polskich twórców – przy zachowaniu dbałości o rozwój fantastyki naukowej, zatem treść zgłoszonej pracy musi być w znaczącym stopniu oparta na fundamencie obowiązujących praw, teorii albo prognoz naukowych bądź na ich logicznym rozwinięciu zgodnym ze współczesną wiedzą naukową.

Prace konkursowe, liczące od 15 000 do 50 000 znaków (ze spacjami), należy wysyłać drogą elektroniczną na adres: [konkurs@pffn.org.pl](mailto:konkurs@pffn.org.pl). Opowiadania będą przyjmowane od 1 lipca do 30 września 2023 roku. Pełny regulamin oraz niezbędne formularze znaleźć można na stronie: [pffn.org.pl/konkurs/](http://pffn.org.pl/konkurs/)

Komitet Organizacyjny, przyjmujący prace i kwalifikujący je pod względem spełnienia wymogów formalnych oraz jakości warsztatu literackiego, tworzą:

- Grzegorz Czapski (komisarz)
- dr Aleksandra Janusz-Kamińska (recenzent)
- dr Paulina Klimentowska (recenzent)
- Łukasz Marek Fiema (recenzent)
- Adrian Szczerba (recenzent)

Zakwalifikowane prace konkursowe, celem określenia ich wartości oraz nadania punktacji, poddane zostaną ocenie Jury w składzie:

- dr Wiktor Jaźniewicz
- dr Łukasz Kucharczyk
- dr Elżbieta Kuligowska
- Hubert Kijek
- Magdalena Salik

Ogłoszenie wyników nastąpi do 31 marca 2024 roku.