# Łańcuchy Markowa – część 2

*Bartłomiej BZDĘGA* Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Tym razem spojrzymy na łańcuchy Markowa pod nieco innym kątem – będziemy analizować ich średni czas dojścia do określonego stanu, mierzony liczbą kroków. Jako przykład rozwiążemy następujące zadanie, które pojawiło się na Obozie Naukowym Olimpiady Matematycznej w Zwardoniu w 2001 roku.

*Pewnego wieczora Fredek opowiada dowcipy, przy czym wybiera je losowo (z jednakowym prawdopodobieństwem) z 3-elementowego zbioru znanych sobie dowcipów. Paula śmieszy tylko jeden dowcip Fredka i śmieje się zawsze, kiedy Fredek go opowiada. Andrzej śmieje się z każdego dowcipu, którego nie pamięta, a pamięta zawsze dwa poprzednie. Maniek zaś śmieje się wtedy, gdy Fredek opowiada ten sam dowcip, co przed chwilą. Kiedy* ***po raz drugi z rzędu*** *nikt nie śmieje się z opowiadanego dowcipu, Fredek obrażony idzie spać. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby dowcipów, które Fredek opowie tego wieczora.*

*Rozwiązanie.* Niech $A$, $B$, $C$ będą dowcipami Fredka, przy czym dowcipem bawiącym Paula jest $C$. Fredek zakończy opowiadanie dowcipów po wystąpieniu ciągu $ABAB$ lub $BABA$. Możemy rozważyć następujące stany, zależnie od tego, jak kończy się ciąg opowiadanych dowcipów.

$S_C$ – stan początkowy lub ciąg zakończony na $C$,
$S_A$ – ciąg zakończony na $A$, ale nie na $BA$,
$S_B$ – ciąg zakończony na $B$, ale nie na $AB$,
$S_{AB}$ – ciąg zakończony na $AB$, ale nie na $BAB$,
$S_{BA}$ – ciąg zakończony na $BA$, ale nie na $ABA$,
$S_{ABA}$ – ciąg zakończony na $ABA$, ale nie na $BABA$,
$S_{BAB}$ – ciąg zakończony na $BAB$, ale nie na $ABAB$,
$S_{\text{koniec}}$ – ciąg zakończony na $ABAB$ lub $BABA$.

Niech $E_i$ oznacza wartość oczekiwaną liczby opowiedzianych dowcipów *pod warunkiem* rozpoczęcia od stanu $S_i$. Oczywiście $E_{\text{koniec}} = 0$, a poszukujemy $E_C$. Dla przykładu, w stanie $S_{AB}$ mamy możliwe trzy przejścia: dowcip $A$ przeniesie nas do stanu $S_{ABA}$, dowcip $B$ do stanu $S_B$, a dowcip $C$ do stanu $S_C$. Wynika z tego, że $E_{AB} = 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_B + \frac{1}{3}E_{ABA}$. Analogicznie dla pozostałych sześciu stanów:

$$E_C = 1 + \tfrac{1}{3}E_C + \tfrac{1}{3}E_A + \tfrac{1}{3}E_B, \qquad E_A = 1 + \tfrac{1}{3}E_C + \tfrac{1}{3}E_A + \tfrac{1}{3}E_{AB},$$
$$E_B = 1 + \tfrac{1}{3}E_C + \tfrac{1}{3}E_B + \tfrac{1}{3}E_{BA}, \qquad E_{BA} = 1 + \tfrac{1}{3}E_C + \tfrac{1}{3}E_A + \tfrac{1}{3}E_{BAB},$$
$$E_{ABA} = 1 + \tfrac{1}{3}E_C + \tfrac{1}{3}E_A, \qquad E_{BAB} = 1 + \tfrac{1}{3}E_C + \tfrac{1}{3}E_B.$$

Możemy ułatwić sobie obliczenia, gdyż ze względu na symetrię zachodzą równości $E_A = E_B$, $E_{AB} = E_{BA}$, $E_{ABA} = E_{BAB}$. Bezpośredni rachunek prowadzi do $E_C = 60$, więc zanosi się na długi, męczący wieczór.

**Zadania**

1. Robaczek wdrapuje się na drzewo do swojej dziupli, która znajduje się na wysokości 40 cm. W każdej minucie z prawdopodobieństwem $p$ wchodzi 10 cm wyżej lub (z prawdopodobieństwem $1-p$) ześlizguje się 10 cm w dół (z wyjątkiem sytuacji, w której jest u podnóża drzewa – stamtąd zawsze idzie w górę). W zależności od $p$ wyznaczyć wartość oczekiwaną czasu potrzebnego robaczkowi na dotarcie do dziupli z podnóża drzewa.
2. W urnie $A$ znajduje się 8 kul białych, a w urnie $B$ 8 kul czarnych. Losujemy po jednej kuli z każdej urny, następnie kulę z urny $A$ wkładamy do urny $B$, a kulę z urny $B$ do urny $A$. Jaka jest wartość oczekiwana liczby losowań, po której liczby kul białych i czarnych w obu urnach będą równe?
3. Rzucamy sześcienną kostką do gry i badamy iloczyn wszystkich liczb wyrzuconych oczek (powtarzające się mnożymy tyle razy, ile się powtarzają). Kończymy zabawę, gdy iloczyn będzie miał dwie ostatnie cyfry równe 0. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.
4. Na centralnym polu szachownicy $3 \times 5$ stoi skoczek i porusza się zgodnie z szachowymi regułami, za każdym razem losując ruch ze wszystkich dostępnych (z jednakowym prawdopodobieństwem). Skoczek kończy zabawę, gdy wróci na centralne pole. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby ruchów skoczka.

**Wskazówki do zadań**

1. Mamy tu pięć stanów: $S_i$ oznacza wysokość robaczka równą $10i$ cm, dla $i = 0, 1, 2, 3, 4$.
2. Stan $S_i$ może oznaczać liczbę $i$ kul czarnych w urnie $A$ – wtedy stan $S_0$ jest początkowy, a stan $S_4$ – pochłaniający. Dla $i = 1, 2, 3$ mamy tu $p_{i,i-1} = \frac{i^2}{64}$, $p_{i,i} = \frac{i(8-i)}{32}$ oraz $p_{i,i+1} = \frac{(8-i)^2}{64}$.
3. Niech $x_n$ będzie iloczynem wszystkich wyrzuconych liczb oczek po $n$ rzutach. Wystarczy analizować liczbę NWD$(x_n, 100)$, więc mamy możliwe następujące stany: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.
4. Ze względu na symetrię jest tu tylko 6 niewiadomych.