Klub 44 M

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2023

Przypominamy treść zadań:

859. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć liczbę słów długości n, tworzonych z symboli A, B i mających następującą własność: w każdym spójnym odcinku słowa liczba wystąpień symbolu A różni się od liczby wystąpień symbolu B co najwyżej o 2.

860. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie
$$f(xf(y)) = xf(y) + yf(x) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 853 ($WT = 2{,}44$) i 854 ($WT = 1{,}56$) z numeru 1/2023

Norbert Porwol	Essen	41,83
Paweł Najman	Kraków	39,93
Radosław Kujawa	Wrocław	39,13
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olsztyn	33,06
Paweł Kubit	Kraków	31,35
Janusz Fiett	Warszawa	31,19
Michał Adamaszek	Kopenhaga	30,63

859. Przedmiotem rozważań są słowa $x_1 \ldots x_n$ o wyrazach $x_i \in \{-1, +1\}$, w których liczby $-1, +1$ zastępują (odpowiednio) symbole A, B. Niech
$$s_k = x_1 + \ldots + x_k \quad \text{dla } k = 1, \ldots, n; \quad s_0 = 0.$$
Każdy ciąg $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$, w którym
$$(1) \qquad s_0 = 0; \quad |s_i - s_{i+1}| = 1 \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n$$
jednoznacznie definiuje słowo $x_1 \ldots x_n$. Własność sprecyzowana w treści zadania łatwo tłumaczy się na równoważny warunek dla sum s_k:
$$(2) \qquad |s_k - s_j| \leqslant 2 \quad \text{dla } 0 \leqslant j < k \leqslant n.$$
Zadanie sprowadza się do zliczenia ciągów $(s_0, \ldots, s_n)$ spełniających warunki (1) i (2).

Warunek (2) mówi, że średnica zbioru $\{s_0, \ldots, s_n\}$ wynosi co najwyżej 2. Skoro $s_0 = 0$, możliwe są przypadki:
$$(3) \qquad \text{wszystkie } s_k \in \{-1, 0, 1\};$$
$$(4) \qquad \text{wszystkie } s_k \in \{0, 1, 2\} \quad \text{lub wszystkie } s_k \in \{-2, -1, 0\}.$$

Weźmy na warsztat przypadek (3). Z warunku (1) widać, że s_k ma taką samą parzystość jak k, więc
$$s_2 = s_4 = \ldots = 0, \qquad s_1, s_3, \ldots \in \{1, -1\}.$$
Swobodę wyboru mamy na pozycjach o numerach nieparzystych. W zbiorze $\{1, \ldots, n\}$ jest $\lceil n/2 \rceil$ liczb nieparzystych. Zatem liczba ciągów (s_k) spełniających warunki (1), (2), (3) wynosi $2^{\lceil n/2 \rceil}$.

Przypadek (4) rozpada się na dwa równoliczne podprzypadki ($s_k \geqslant 0$, $s_k \leqslant 0$). Weźmy podprzypadek $s_k \in \{0, 1, 2\}$. Teraz mamy
$$s_1 = s_3 = \ldots = 1, \qquad s_2, s_4, \ldots \in \{0, 2\}.$$
Tym razem swobodę wyboru mamy na pozycjach o numerach parzystych, których jest $\lfloor n/2 \rfloor$. Podprzypadek $s_k \in \{0, -1, -2\}$ jest symetryczny. Liczba ciągów (s_k) spełniających warunki (1), (2), (4) wynosi zatem $2 \cdot 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Przypadki (3), (4) nie są jednak rozłączne. Dwukrotnie zliczone zostały dwa ciągi: $(s_1, \ldots, s_n) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ oraz $(-1, 0, -1, 0, \ldots)$, i tylko one. Stąd ostateczny wynik: $W = 2^{\lceil n/2 \rceil} + 2^{1 + \lfloor n/2 \rfloor} - 2$; lub w formie „klamerkowej":
$$W = \begin{cases} 3 \cdot 2^m - 2 & \text{dla } n = 2m, \\ 2^{m+1} - 2 & \text{dla } n = 2m - 1. \end{cases}$$

860. Funkcja równa tożsamościowo zeru spełnia równanie. Wykażemy, że każda inna funkcja f, która je spełnia, jest różnowartościowa. Niech więc $f(c) \neq 0$ dla pewnego c. Oczywiście $c \neq 0$, bowiem $f(0) = 0$ (z podstawienia $x = y = 0$).

Weźmy liczby a, b takie, że $f(a) = f(b) =: d$ i podstawmy w równaniu najpierw $x = c$, $y = a$, a następnie $x = c$, $y = b$:
$$f(cd) = cd + af(c), \qquad f(cd) = cd + bf(c),$$
skąd (przez odjęcie stronami) $(a - b)f(c) = 0$, czyli $a = b$; mamy różnowartościowość.

Przy zamianie zmiennych x, y wyrażenie po prawej stronie równania nie zmienia wartości, więc to po lewej stronie – też. Wobec różnowartościowości funkcji f znaczy to, że
$$yf(x) = xf(y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$
Biorąc $y = c$, dostajemy równość
$$f(x) = Ax \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$
gdzie $A = f(c)/c$. Wracamy do równania w wyjściowej postaci, wstawiamy $f(x) = Ax$; dostajemy $A^2xy = 2Axy$ (dla wszystkich x, y); stąd $A = 2$.

Odpowiedź: równanie jest spełnione przez dwie funkcje: $f(x) \equiv 0$ oraz $f(x) = 2x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.