Janek matematyk

*Mariusz SKAŁBA**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wiem, że polski i matematyka to najważniejsze przedmioty w szkole, ale ja wolę matematykę, bo nie ma w niej żadnych takich ę, ą.

(z wywiadu z Jankiem, kandydatem na stypendystę Funduszu na Rzecz Dzieci)

Drogi Czytelniku, mając 7 lat mogłeś już wiedzieć, że są liczby parzyste i nieparzyste. Każda liczba naturalna m (czyli całkowita dodatnia) jest jednej z rzeczonych postaci:

$$m = 2k \text{ albo } m = 2k+1\ , \text{ gdzie } k = 0, 1, 2\ldots$$

Jeśli podobnie jak cytowany wyżej Janek lubiłeś dodawać małe liczby, to szybko odkryłeś, że obowiązują następujące reguły:
– *parzysta plus parzysta równa się parzysta,*
– *parzysta plus nieparzysta równa się nieparzysta,*
– *nieparzysta plus nieparzysta równa się parzysta.*
Reguły te można krótko zakodować tak: $p+p=p,\ p+n=n,\ n+n=p$.

Dorastając, poznałeś z pewnością reguły mnożenia liczb dodatnich i ujemnych:
– *dodatnia razy dodatnia równa się dodatnia,*
– *dodatnia razy ujemna równa się ujemna,*
– *ujemna razy ujemna równa się dodatnia.*

Skrótowo i symbolicznie: $d \cdot d = d,\ d \cdot u = u,\ u \cdot u = d$. To praktycznie tak samo jak poprzednio, tylko zamiast p jest d, a zamiast n jest u.

Wyobrażam sobie, że gdy już wszystkie wiatry dzieciństwa przewiały Twoją niezdecydowaną głowę i wyjaśniło się, że muzykantem raczej nie zostaniesz, to zapisałeś się na Międzykierunkowe Studia Ekonomiczno-Matematyczne. Tam, na przedmiocie Algebra II, dotarliście do teorii grup. A po sesji na imprezie studenckiej zastanawialiście się, dlaczego złożenie wszystkich sześciu izometrii własnych trójkąta równobocznego w dowolnej kolejności nie może być nigdy identycznością? Rozstrzygnęła to odosobniona trzeźwa uwaga: *są trzy permutacje parzyste i trzy nieparzyste, a więc iloczyn wszystkich permutacji musi być permutacją nieparzystą!* Zadziałała naturalna ekstrapolacja wcześniejszej reguły mnemotechnicznej.

Te dość uniwersalne zasady pobudzały też do rozmyślań arytmetycznych młodocianego Karolka (Gaussa), gdy przygotowywał ostatni, najbardziej skomplikowany rachunkowo, rozdział swojej genialnej książki *Disquisitiones Arithmeticae*. A oto próbka jego kompozycji binarnych form kwadratowych.

Niech p oznacza dowolną liczbę naturalną, która daje się przedstawić jako

$$p = x^2 + 6y^2, \text{ przy pewnych całkowitych } x, y;$$

natomiast n niech oznacza liczbę postaci:

$$n = 2x^2 + 3y^2, \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Uzasadnimy teraz, że żadna liczba naturalna nie jest równocześnie postaci x^2+6y^2 oraz $2z^2+3t^2$ przy pewnych całkowitych x, y, z, t. Istotnie, przypuśćmy, że mamy „kontrprzykład”: $x^2+6y^2 = 2z^2+3t^2$. Wówczas x^2 oraz $2z^2$ dają tę samą resztę z dzielenia przez 3. Ponieważ kwadrat liczby całkowitej może dawać z dzielenia przez 3 wyłącznie reszty 0 i 1, więc obie liczby x^2 i $2z^2$ muszą być podzielne przez 3. Dlatego $x = 3x_1$ oraz $z = 3z_1$ dla pewnych liczb całkowitych x_1, z_1. Wstawiając te zależności do wyjściowej równości, uzyskujemy $9x_1^2 + 6y^2 = 18z_1^2 + 3t^2$, czyli $3x_1^2 + 2y^2 = 6z_1^2 + t^2$. Wygląda znajomo? Dostaliśmy kolejny „kontrprzykład”; zamiast czwórki liczb (x, y, z, t) jest (t, z_1, y, x_1). Ta druga czwórka jest jednak „mniejsza” (np. w sensie sumy kwadratów). Ale nie możemy zmniejszać tych kontrprzykładów w nieskończoność, co kończy nasze uzasadnienie.

Mamy ponadto następujące trzy cudowne wzory:

$$(x^2+6y^2)(z^2+6t^2) = (xz-6yt)^2 + 6(xt+yz)^2,$$
$$(x^2+6y^2)(2z^2+3t^2) = 2(xz+3yt)^2 + 3(xt-2yz)^2,$$
$$(2x^2+3y^2)(2z^2+3t^2) = (2xz+3yt)^2 + 6(xt-yz)^2,$$

więc znowu działają te same zasady.

Rozwiązanie zadania F 1077.
(a) Według prawa Newtona przyspieszenie spadku swobodnego na powierzchni Ziemi o masie M i promieniu R wynosi:

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Do tego wzoru podstawmy masę M obliczoną przy założeniu, że Ziemia jest kulą o jednorodnej gęstości, $\rho_0 = 2{,}7\ \mathrm{g/cm^3}$:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0.$$

Otrzymujemy oszacowanie:

$$G = \frac{3g}{4\pi R \rho_0}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy $G \approx 1{,}38 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.
(b) Przyjmijmy model, w którym gęstość masy zmienia się liniowo z odległością r od środka Ziemi:

$$\rho(r) = \rho_c - (\rho_c - \rho_0)\frac{r}{R},$$

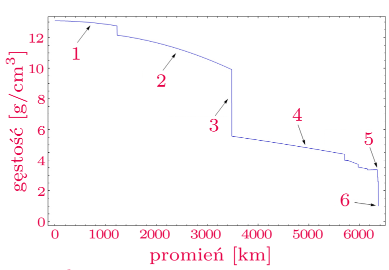
$\rho_0 = 2{,}7\ \mathrm{g/cm^3}$ jest gęstością na powierzchni Ziemi ($r = R$), a ρ_c to poszukiwana gęstość w jej środku ($r = 0$). Obliczmy całkowitą masę Ziemi:

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r)dr = 4\pi R^3 \left(\frac{\rho_c}{12} + \frac{\rho_0}{4}\right).$$

Otrzymujemy:

$$\rho_c = \frac{3M}{4\pi R^3} - 3\rho_0.$$

Po podstawieniu danych liczbowych $\rho_c \approx 13{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$. Geofizycy przyjmują $\rho_c \approx 13{,}1\ \mathrm{g/cm^3}$.



1 – jądro wewnętrzne,
2 – jądro zewnętrzne,
3 – CMB,
4 – płaszcz,
5 – nieciągłość Moho,
6 – ocean

Rysunek przedstawia współcześnie przyjmowany model rozkładu gęstości wewnątrz Ziemi; widoczna na nim linia prosta to „nasz” model z części (b) rozwiązania. Wykres na podstawie A. M. Dziewonski and Don L. Anderson, *Physics of Earth and Planetary Interiors*, **25**, 297 (1981).

W powyższej opowiastce zilustrowaliśmy rolę *grupy cyklicznej dwuelementowej*. To zaledwie początek wspaniałej niekończącej się historii... a Janek pragnie w niej uczestniczyć i dlatego wnosi o stypendium. W jego liście można przeczytać również:

Co prawda nie lubię ę i ą, ale też pragnę, aby świat był dobry i piękny. Bo nie jest tak, że nie możemy zastosować naszej ukochanej matematyki do jakichkolwiek wyższych celów. Pokażę od razu zastosowanie do celów najwyższych – do etyki. Niech zatem będzie n cnót głównych. Powiemy, że osoba jest rozwiązła, wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada żadnych cnót. Mówimy wreszcie, że dwie grupy osób są ekwimoralne, gdy mają ten sam zestaw cnót. Wykażę następujące

Twierdzenie etyczne. W każdej grupie więcej niż n „nierozwiązłych" osób istnieją dwie rozłączne podgrupy ekwimoralne.

A oto mój dowód. Niech m będzie liczbą osób w grupie. Osobie numer k przyporządkujmy wektor cnót

$$\gamma_k = (c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots, c_{k,n}) \in \mathbb{R}^n \quad \textit{dla } k = 1, 2, \ldots, m,$$

przy czym

$$c_{k,j} = \begin{cases} 1 & \textit{gdy} \quad k\textit{-ta osoba ma cnotę } j, \\ 0 & \textit{gdy} \quad k\textit{-ta osoba nie ma cnoty } j. \end{cases}$$

Ponieważ $m > n$, to z algebry liniowej wiemy, że istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, nie wszystkie równe 0, takie, że

$$(\spadesuit) \qquad a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots + a_m\gamma_m = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Jako zbiór numerów pierwszej grupy przyjmujemy $K = \{k \leqslant n\colon a_k > 0\}$; jako zbiór numerów drugiej grupy $L = \{l \leqslant n\colon a_l < 0\}$. Równość ($\spadesuit$) na j-tej współrzędnej zapisuje się wtedy jako

$$(\heartsuit) \qquad \sum_{k\in K} a_k c_{k,j} = \sum_{l\in L} (-a_l) c_{l,j}.$$

Wszystkie składniki występujące po obu stronach równości ($\heartsuit$) są nieujemne. Jeśli zatem j-ta cecha występuje wśród osób ze zbioru K (tzn. $c_{k,j} = 1$ dla pewnego $k \in K$), to musi występować również wśród osób ze zbioru L (inaczej lewa strona ($\heartsuit$) byłaby dodatnia, a prawa zerowa). Analogiczny argument dowodzi, że jeśli j-ta cecha występuje wśród osób ze zbioru L, to musi również występować wśród zbioru K. Czy podoba się Państwu mój dowód?

Tak... i to bardzo. Chociaż przedstawione przez Ciebie twierdzenie nie jest nowe, to podoba mi się zaproponowana nazwa i sposób, w jaki o nim opowiedziałeś. À propos oryginalnego nazewnictwa: pewne znane twierdzenie Halla z kombinatoryki nazywane jest *twierdzeniem o kojarzeniu małżeństw*. Wróćmy jednak do Twojego podania: doceniając Twój wysiłek, zaangażowanie i entuzjazm, przyznajemy Ci rzeczone stypendium.

I w ten oto sposób historia Janka Matematyka zaczęła się szczęśliwie, czyli dramatycznie inaczej niż się skończyła słynna historia Janka Muzykanta.

* * *

Jakże piękne jest Pole Mokotowskie – zagaił Zygmunt – *I jak dobrze jest tu przyjść po sesji do pubu.*

Czy widzieliście ostatnio Janka ...? – zapytał nerwowo Tomasz – *Gdzieś zniknął, jakby go w ogóle nie było!* – dodał niepewnie.

Może pomylił się w swoim roztargnieniu i poszedł do pubu Lolek? – snuła roztropne wyjaśnienia Katarzyna.

A może po prostu on woli matematykę i nudzi się w naszym wytwornym ę-ą-towarzystwie? – zniuansował Zygmunt.

Ptaki, które uwiły swoje gniazda na koronach drzew otaczających puby, kwiliły na nutkę:... *oj, mądry Jaś, oj mądry...* – przed Jankiem otwierała się wielka kariera naukowa...

Rozwiązanie zadania F 1078.
Jeśli w czasie t zarejestrowano M cząstek, to w sumie w ciągu czasu $M\tau$ licznik nie rejestrował docierających do niego cząstek. Oznaczmy jako N rzeczywistą liczbę cząstek. Na podstawie założenia, że liczba cząstek w jednostce czasu jest stała, mamy:

$$\frac{N}{t} = \frac{M}{t - M\tau}.$$

(a) Jako oszacowanie rzeczywistej liczby cząstek otrzymujemy:

$$N = \frac{Mt}{t - M\tau}.$$

(b) Do wyznaczenia martwego czasu licznika potrzebna jest znajomość różnicy liczby zliczeń w sytuacjach różniących się jedynie wpływem czasu martwego. Możemy to osiągnąć, porównując liczby impulsów w pomiarach: M_1 – tylko pierwsze źródło, M_2 – tylko drugie, M_3 – oba jednocześnie. Należy pamiętać, że w każdym z pomiarów rejestrowane są także cząstki „tła" niezależnego od naszych źródeł – w czasie t każdorazowo ich liczba wynosi B_0. Dla $\tau = 0$ mielibyśmy: $N_3 = N_1 + N_2 - B_0$, bo dla zliczeń, gdy $\tau = 0$, jest $N_i = N_{i0} + B_0$. Dla $\tau > 0$ do związku $N_3 = N_1 + N_2 - B_0$ podstawmy oszacowania na podstawie zarejestrowanych wartości M_1, M_2, M_3 oraz B – oddzielnie zmierzonej wartości tła:

$$\frac{M_1 t}{t - M_1\tau} + \frac{M_2 t}{t - M_2\tau} = \frac{M_3 t}{t - M_1\tau} + \frac{Bt}{t - B\tau}.$$

Wartość τ otrzymamy jako rozwązanie wynikającego stąd równania kwadratowego. Ponieważ jednak zakładamy, że $M_i\tau \ll t$ oraz $B\tau \ll t$, to możemy posłużyć się liniowymi przybliżeniami każdego z wyrazów:

$$\frac{M_i t}{t - M_1\tau} \approx M_i\left(1 + M_i\frac{\tau}{t}\right);$$

$$\frac{Bt}{t - B\tau} \approx B(1 + B\frac{\tau}{t}).$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\tau \approx \frac{(M_1 + M_2 - M_3 - B)t}{M_3^2 + B^2 - M_1^2 - M_2^2}.$$

Rozwiązanie zadania M 1754.
Zachodzi nierówność $1 - x^3 \leqslant \frac{3}{2}(1 - x^2)$, gdyż po przekształceniach sprowadza się do nierówności $(x-1)^2(2x+1) \geqslant 0$, która jest prawdziwa dla $x \geqslant 0$. Podstawiając dla wygody $x_1 = x$, $x_2 = y$ i $x_3 = z$, dostajemy zatem:

$$0 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{2}{1 + x_i^3} - 1\right) = \sum_{i=1}^{3}\frac{1 - x_i^3}{1 + x_i^3} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{1 - x_i^2}{1 + x_i^3} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{1 - x_i}{1 - x_i + x_i^2}.$$