Problem kozy a piłka w puszce

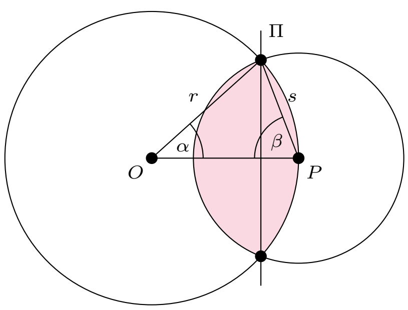
*Michał MIŚKIEWICZ**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

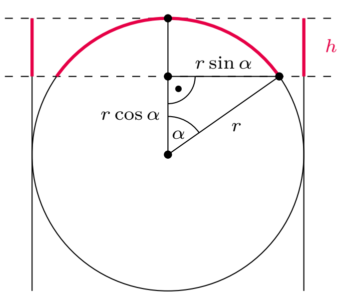
W popularnym dowcipie kury na pewnej farmie przestały składać jajka, więc poproszono o pomoc fizyka teoretycznego. Ten po tygodniu wrócił z rozwiązaniem problemu – zastrzegł jednak, że jego rozwiązanie działa jedynie dla sferycznych kur w próżni.

Nieco podobnie jest z geometrycznym problemem kozy, o którym w Δ^6_{23} pisał Jerzy Pryga. Wyjściowe zadanie dotyczyło kozy na okrągłym pastwisku, ale matematycy zauważyli, że analogiczne zagadnienie w trzech wymiarach jest łatwiejsze, więc postanowili zająć się właśnie nim. Żeby nadać problemowi namiastkę realności, podmieńmy kozę na kanarka i pastwisko na klatkę. Brzmi on wtedy następująco: wewnątrz sferycznej klatki zamknięty jest kanarek, dodatkowo przywiązany za nóżkę sznurkiem do pewnego punktu klatki (zob. rys. 1). Jaki powinien być stosunek długości sznurka do promienia klatki, by kanarek miał dostęp dokładnie do połowy objętości klatki?

Jak za chwilę się przekonamy, znalezienie właściwej długości sznurka nie wymaga zaawansowanej matematyki.



Rys. 1. Oznaczenia:
O, r – środek i promień klatki;
P, s – punkt zaczepienia i długość sznurka;
Π – płaszczyzna przecięcia sfer $S(O, r)$ i $S(P, s)$



Rys. 2. Piłka w puszce: czasza sfery ma to samo pole co odpowiadający jej fragment walca

Piłka w puszce. W artykule *Piłka w puszce* (Δ^4_{14}) Marek Kordos pokazał – idąc śladami Archimedesa – że jeśli kulę o promieniu r włożymy do pionowego walca o tym samym promieniu, a następnie przetniemy ją dwiema poziomymi płaszczyznami odległymi o $h > 0$, to powstałe plasterki kuli i walca będą miały taką samą powierzchnię boczną: $2\pi r \cdot h$. W szczególności, gdy jedno z cięć przebiega stycznie do kuli, otrzymujemy wzór na pole powstałej na sferze czaszy (zob. rys. 2).

W sytuacji jak na rysunku, gdy czasza jest wyznaczona przez kąt α, łatwo jest odczytać równość $h = r - r\cos\alpha$, a więc pole czaszy wynosi $2\pi r^2(1-\cos\alpha)$. Ten wzór można zapisać w równoważny, dobrze zapadający w pamięć sposób:

Zadanie. Jeśli w pewnym punkcie sfery oprzemy igłę cyrkla, a jego rysikiem zaznaczymy na sferze okrąg, to pole czaszy ograniczonej tym okręgiem jest dane wzorem πR^2, gdzie R jest odległością między igłą a rysikiem. *Uwaga:* promień sfery nie gra tu roli!

Możemy też na tej podstawie obliczyć objętość wycinka kuli wyznaczonego przez czaszę – objętość ta jest proporcjonalna do pola czaszy, a więc wynosi:

$$\frac{\text{pole czaszy}}{\text{pole sfery}} \cdot \text{objętość kuli} = \frac{2\pi r^2(1-\cos\alpha)}{4\pi r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\alpha).$$

Równanie długości sznurka. Wróćmy do problemu kanarka. Obszar, do którego ma on dostęp, jest przedzielony płaszczyzną Π na dwie części (zob. rys. 1); wyznaczmy najpierw objętość tej po prawej stronie Π. Można ją przedstawić jako różnicę objętości wycinka kuli oraz stożka o wierzchołku w O. Objętość wycinka obliczyliśmy już powyżej (jest to $\frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\alpha)$), a stożek ma wysokość $r\cos\alpha$ i promień podstawy $r\sin\alpha$, więc jego objętość to $\frac{1}{3}\cdot r\cos\alpha\cdot\pi(r\sin\alpha)^2$. Analogicznie wyznaczamy objętość lewej części obszaru. W efekcie, po skorzystaniu z „jedynki trygonometrycznej", interesujące nas równanie to:

$$\tfrac{1}{3}\pi r^3(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 2) + \tfrac{1}{3}\pi s^3(\cos^3\beta - 3\cos\beta + 2) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Można je jednak znacząco uprościć, korzystając z zależności $s = 2r\cos\beta$ i $\alpha = \pi - 2\beta$ (które wynikają z równoramienności trójkąta zaznaczonego na rys. 1). Po zastosowaniu pierwszego z nich s znika z pola widzenia, r zresztą również, gdyż r^3 się skraca. Drugie daje nam $\cos\alpha = 1 - 2\cos^2\beta$, i w rezultacie pozostaje równanie na $\cos\beta$: $8\cos^3\beta - 6\cos^4\beta = 1$. Interesujący nas stosunek długości sznurka do promienia klatki, $x := \frac{s}{r}$, to nic innego jak $2\cos\beta$, więc spełnia on równanie:

$$8x^3 - 3x^4 = 8.$$

W interesującym nas przedziale $(0, 2)$ jest tylko jedno rozwiązanie: $x \approx 1{,}23$. A gdybyśmy z jakiegoś powodu uparli się, że rozwiązanie chcemy zobaczyć w postaci *jawnej*, to i na to jest rada – dla równań czwartego stopnia dostępne są wzory Cardano–Ferrari, które w naszym przypadku dają:

$$x = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{16}{3} - a + \frac{128}{27\sqrt{a}}}\right), \text{ gdzie } a = \frac{16}{9} + \frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{8}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{8}}\right).$$

Czytelnika zainteresowanego zgłębianiem tajemnic kóz i kanarków odsyłam do oryginalnego artykułu na ten temat: Graham Jameson, Nicholas Jameson, *Goats and birds*, „The Mathematical Gazette", 2017.