

$a = 4, b = 1$. Stąd $x = 6, y = 5$. Czwórka $(a, b, x, y) = (4, 1, 6, 5)$ spełnia wyjściowy układ (1).

Gdy natomiast $a = 0$, nierówność podwójna (3) jest spełniona przez dwie liczby parzyste: $x = 2$ i $x = 4$. Po wstawieniu do równań (1) pierwsza z tych wartości daje sprzeczność, zaś druga szybko prowadzi do rozwiązania: $(a, b, x, y) = (0, 0, 4, 4)$.

Uwzględniając symetrię (czyli odrzucając założenie $x \geq y$), dostajemy odpowiedź: szukane pary (x, y) to $(4, 4), (6, 5), (5, 6)$.

858. Tworzymy macierz zerowejedynkową:

$$\begin{bmatrix} i(A, D) & i(B, D) & i(C, D) \\ i(A, E) & i(B, E) & i(C, E) \end{bmatrix}$$

gdzie

$$i(X, Y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } XY \leq 1 \\ 1 & \text{gdy } XY > 1 \end{cases}$$

(XY oznacza długość odcinka o końcach X, Y).

Ponieważ $AB = AC = BC = DE = 1$, zadanie sprowadza się do wykazania, że w tej macierzy któryś wiersz lub któraś kolumna składa się z samych zer. Przypuśćmy więc, że tak nie jest. Wówczas – po ewentualnej permutacji symboli A, B, C i/lub D, E (co nie wpływa na warunki zadania) – pojawia się w macierzy układ jedynek $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}$; w terminach geometrycznych (przy oznaczeniach przyjętych wcześniej):

$$AD > 1, \quad BD > 1, \quad CE > 1;$$

czyli

$$AD > AC, \quad BD > BC, \quad CE > DE.$$

Niech π będzie płaszczyzną symetralną odcinka CD . Uzyskane nierówności oznaczają, że punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π co punkt C ; zaś punkt E leży po tej stronie π co punkt D (i żaden z nich nie leży na niej). Tak więc płaszczyzna π oddziela trójkąt ABC od odcinka DE – wbrew założeniu, że te figury mają punkt wspólny. Sprzeczność dowodzi tezy zadania.

Czy tu jest równomiernie? ... czyli o metodzie V/V_{\max}

Radostaw POLESKI*

*Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Warszawskiego (rpoleski@astrouw.edu.pl)

W XXI wieku astronomowie pozyskują ogromne ilości danych obserwacyjnych o różnym stopniu szczegółowości. Oczywiście wyekstrahowanie wiedzy z takiego kosmosu danych wymaga analizy statystycznej. Te analizy mogą być bardzo różnego rodzaju: od przetwarzania pikseli ze zdjęcia nieba na pomiary jasności i pozycji obiektów, przez analizę wielu obserwacji w celu znalezienia okresu, z jakim zachodzi jakieś zjawisko (np. zaćmienia w układzie podwójnym gwiazd), po analizę danych z różnych źródeł w celu określenia parametrów wybranego obiektu (np. jaka jest odległość do centrum Galaktyki lub jaką część masy we Wszechświecie stanowi materia barionowa).

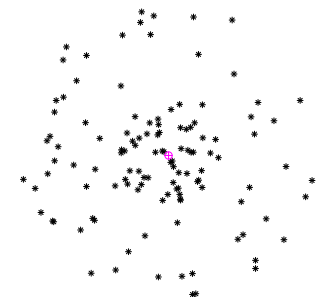
Warto tutaj zwrócić uwagę na pewną istotną różnicę w pozyskiwaniu danych między astronomią a fizyką. Otóż ta pierwsza bazuje w znacznej mierze na obserwacjach zjawisk, w które nie ingerujemy, natomiast ta druga opiera się przede wszystkim na wynikach kontrolowanych doświadczeń. Typowo obserwacyjny charakter badań astronomicznych może stanowić istotną trudność – zwiększenie próbki badanych obiektów może być bardzo kosztowne, jak również może wymagać czasu dłuższego niż przewidywany czas życia badacza. Z reguły mamy zatem do czynienia z próbką dalece niekompletną (choć bardzo chcielibyśmy, by było inaczej). Są jeszcze inne przeszkody, jak na przykład to, że informacje o badanych obiektach mogą pochodzić z obserwacji wykonywanych w różnych warunkach i w różnym czasie itp. Uwzględnienie w analizie statystycznej tych subtelności nie jest łatwe, ale konieczne.

W niniejszym artykule chciałbym przedstawić pewną typowo astronomiczną metodę o egzotycznej

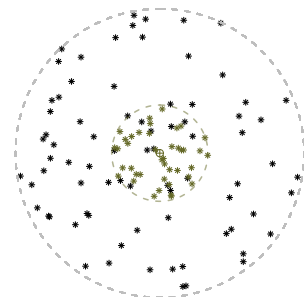
nazwie „ V/V_{\max} ”. Została ona wymyślona pod koniec lat 60., by rozwiązać następujący problem: mamy do dyspozycji katalog kwazarów o znanych jasnościach oraz przesunięciach ku czerwieni i chcemy sprawdzić, czy kwazary te są rozmieszczone równomiernie w przestrzeni.

Kwazar (z ang. quasi-stellar object) jest to rodzaj galaktyki aktywnej, która emituje niezwykle jasne promieniowanie.

Zwróćmy uwagę, że dla kwazarów emitujących najwięcej światła nasza próbka może być traktowana jako kompletna dla dużych odległości, jednak dla kwazarów emitujących mniej światła próbka jest kompletna jedynie dla małych odległości. Wynika stąd, że choć na pierwszy rzut oka może wydawać się, że koncentracja kwazarów spada wraz ze wzrostem ich odległości od Ziemi, to może to być artefakt zależności, że im bliżej Ziemi jesteśmy, tym więcej kwazarów jesteśmy w stanie zaobserwować (por. rys. 1 i 2).



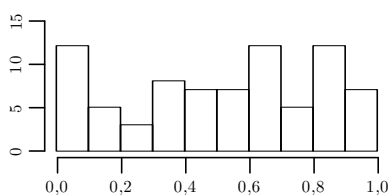
Rys. 1. Rozmieszczenie 150 kwazarów zaobserwowanych przez pewnego dwuwymiarowego astronoma w dwuwymiarowym Wszechświecie. Kwazary wykazują pozorną koncentrację wokół Ziemi (oznaczonej symbolem \oplus)



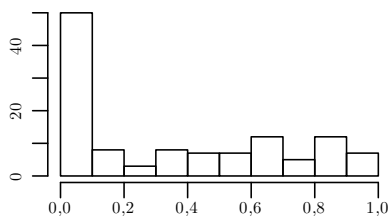
Rys. 2. Rozmieszczenie kwazarów identyczne z tym z rysunku 1, z zaznaczeniem, do której z dwóch grup o ustalonych jasności absolutnych należy każdy obiekt. W ramach każdej grupy kwazary są rozłożone równomiernie w całym obszarze, w jakim można je zaobserwować

Zacznijmy od pewnych prostych rozważań. Załóżmy, że wszystkie kwazary mają tę samą jasność absolutną (czyli taką, jaką badany obiekt miałby, gdyby był widziany z odległości 10 parseków). Gdyby wszystkie kwazary były równomiernie rozłożone w przestrzeni, to *obserwowane* kwazary byłyby równomiernie rozmieszczone w obszarze (kuli), w którym mamy szansę je zaobserwować (por. czarne kropki na rys. 2). Niech V_{\max} będzie objętością tej kuli. Dla każdego

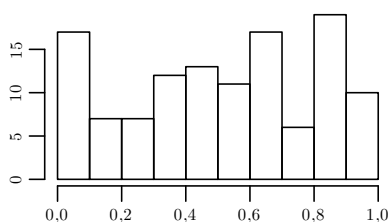
kwazara K wyznaczamy jego odległość od nas i obliczamy objętość kuli V_K o promieniu takim jak ta odległość. Jeśli założenie o równomiernym rozkładzie jest spełnione, to rozkład wartości V/V_{\max} powinien być jednostajny w przedziale $[0, 1]$ (rys. 3), zatem średnia wartość V/V_{\max} powinna być w przybliżeniu równa $1/2$. Jeśli rozkład V/V_{\max} nie posiada tej cechy, to hipotezę o równomiernym rozmieszczeniu kwazarów w przestrzeni należy raczej odrzucić.



Rys. 3. Histogram wartości V/V_{\max} dla „czarnych kwazarów” z rysunku 2, o stałej wartości V_{\max} . Wysokość słupka odpowiada liczbie kwazarów o wartości V/V_{\max} leżących w przedziale wyznaczonym przez podstawę słupka



Rys. 4. Histogram wartości V/V_{\max} dla wszystkich kwazarów z rysunku 2 z założeniem stałej wartości V_{\max}



Rys. 5. Histogram wartości V/V_{\max} dla wszystkich kwazarów z rysunku 2 z V_{\max} wyznaczoną oddzielnie dla każdego kwazara

A co, jeśli kwazary będą miały różne jasności absolutne (czyli tak jak w rzeczywistości)? Najpierw załóżmy (dla prostoty), że dla każdego kwazara jasność absolutna przyjmuje jedną z dwóch wartości (czyli tak jak na rys. 1 i 2). Jak już podkreśliliśmy, wpłynie to na próbkę obserwowanych kwazarów, bo te świecące jaśniej będą widoczne z odległości większych niż te świecące słabiej. Jeśli użyjemy takiej samej wartości V_{\max} dla każdego kwazara, to zobaczymy histogram taki jak na rysunku 4, czyli znacząco inny niż ten z rysunku 3. Musimy zmienić nasze obliczenia i wartość V_{\max} wyznaczać oddzielnie dla każdego kwazara, w zależności od jego jasności absolutnej (dla kwazara K oznaczmy ją teraz jako $V_{\max,K}$). Tym niemniej, jeśli wszystkie kwazary są rozmieszczone równomiernie w przestrzeni, to dla każdego kwazara wartość $V_K/V_{\max,K}$ możemy traktować jak jednostajnie wylosowaną z odcinka $[0, 1]$, niezależnie od pozostałych. Innymi słowy, rozkład wartości V/V_{\max} wciąż jest jednorodny na odcinku $[0, 1]$ (por. rys. 4 i 5), a jego średnia wartość jest bliska $1/2$. Te cechy mają zarówno wszystkie kwazary z rysunku 2, jak i tylko czarne lub tylko kolorowe.

Jesteśmy teraz gotowi na uogólnienie – każdy kwazar ma inną jasność absolutną. Dla każdego kwazara możemy obliczyć jego indywidualne wartości V_K i $V_{\max,K}$. Znowu oczekujemy, że dla równomiernego rozkładu kwazarów rozkład V/V_{\max} wciąż jest jednorodny na odcinku $[0, 1]$ i ma średnią bliską $1/2$. Jeśli mamy dane obserwacyjne, to wystarczy wyznaczyć V/V_{\max} , sprawdzić, czy wynik jest zgodny z oczekiwanym i... gotowe!

Metoda V/V_{\max} doczekała się różnych rozwinięć. Dla Ciekawskich Czytelników (i jednocześnie tych, którzy są odrobinę bardziej obeznani z tą tematyką) chciałbym szkicowo przedstawić jedno z nich, moim zdaniem najważniejsze. Jest to możliwość analizy, jak zmieniają się parametry badanej populacji w zależności od czasu. Wyobraźmy sobie Wszechświat w wieku odpowiadającym przesunięciu ku czerwieni z . Niech $\rho(z)$ będzie stosunkiem gęstości przestrzennej badanych obiektów wtedy i obecnie (tj. $z = 0$). Zamiast objętości V rozważamy uogólnioną objętość: $V'(z) = \int_0^z \rho(z') dV(z')$, gdzie $V(z)$ to objętość we współrzędnych współporuszających się, która jest wyliczana na podstawie założonego modelu kosmologicznego. Dla każdego kwazara znamy jego przesunięcie ku czerwieni z_K , więc możemy obliczyć odpowiednie $V'_K(z_K)$ i $V'_{\max,K}(z_K)$. Jeśli założymy, że kwazary są rozmieszczone równomiernie, i założymy funkcję $\rho(z)$ bliską prawdziwej, to rozkład V'/V'_{\max} powinien być... (chyba nie będę się powtarzał). Skąd mamy wiedzieć, jakiego $\rho(z)$ użyć? Najprościej jest spróbować wielu różnych możliwości, dla każdej z nich obliczyć V'/V'_{\max} , a na koniec wybrać zbiór tych, które dają oczekiwane wyniki.

Warto podkreślić, że metoda V/V_{\max} i jej warianty wciąż pojawiają się w publikacjach naukowych. Dla przykładu, kilka lat temu była zastosowana do zupełnie innego zagadnienia – badania częstości występowania planet pozasłonecznych $f(q)$ w zależności od stosunku masy planety do masy gwiazdy q dla bardzo małych wartości tych stosunków, tzn. tam, gdzie nasza wiedza jest dosyć uboga ([1], [2]). Problem polegał na tym, że uwzględniono planety znalezione w danych zbieranych w niejednorodny sposób. Zamiast $\rho(z)$ poszukiwana była funkcja $f(q)$, a zamiast $V(z)$ używane było prawdopodobieństwo znalezienia w danym układzie planety o innym stosunku mas. Dokładny opis tych badań, a także wyników, to jednak jest już temat na inną opowieść...

Literatura

- [1] Udalski i in. *OGLE-2017-BLG-1434Lb: Eighth $q < 1 \times 10^{-4}$ Mass-Ratio Microlens Planet Confirms Turnover in Planet Mass-Ratio Function*. Acta Astronomica 68.1 (2018): 1-42.
- [2] Jung i in. *KMT-2017-BLG-0165Lb: A Super-Neptune-mass Planet Orbiting a Sun-like Host Star*. The Astronomical Journal 157.2 (2019): 72.