Klub 44 F

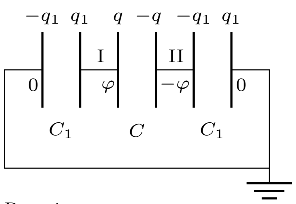
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2023

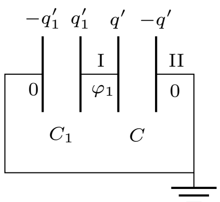
Przypominamy treść zadań:

754. Okładki kondensatora płaskiego o pojemności C naładowano do potencjałów φ i $(-\varphi)$ względem ziemi. Każda z okładek tworzy z ziemią kondensator o pojemności C_1. Znaleźć stosunek natężeń pola elektrycznego między okładkami kondensatora o pojemności C na początku i po uziemieniu jednej z okładek.

755. Zamknięte naczynie całkowicie wypełnione jest wodą. Tuż nad dnem naczynia znajduje się pęcherzyk powietrza. Jak zmieni się ciśnienie na poziomie dna, gdy pęcherzyk wypłynie?



Rys. 1



Rys. 2

754. Układ równoważny do opisanego w zadaniu przedstawia rysunek 1. Kondensator o pojemności C naładowany jest ładunkiem $q = 2\varphi C$, ładunki na okładkach kondensatorów o pojemnościach C_1 wynoszą $q_1 = \varphi C_1$. Całkowity ładunek na lewej płytce jest równy

$$Q = q + q_1 = (2C + C_1)\varphi. \tag{1}$$

Po uziemieniu prawej płytki równoważny układ przedstawia rysunek 2. Ładunek na okładkach kondensatora C wynosi $q' = \varphi_1 C$, przez φ_1 oznaczyliśmy potencjał nieuziemionej okładki. Ładunek kondensatora o pojemności C_1 wynosi $q_1' = \varphi_1 C_1$, a całkowity ładunek lewej płytki to

$$Q' = q' + q_1' = \varphi(C + C_1) = Q. \tag{2}$$

Uwzględniając (1), otrzymujemy

$$\varphi_1 = \frac{\varphi(2C + C_1)}{C + C_1}.$$

Natężenie pola elektrycznego między okładkami kondensatora jest ilorazem napięcia i odległości między nimi, zatem szukany stosunek tych natężeń wynosi

$$\frac{E}{E_1} = \frac{2\varphi}{\varphi_1} = \frac{2(C + C_1)}{2C + C_1}.$$

755. W stanie początkowym ciśnienie powietrza w pęcherzyku jest takie samo, jak ciśnienie wody nad dnem naczynia. Różnica ciśnień między dnem naczynia a górą wynosi $\Delta p = \varrho g h$, gdzie ϱ to gęstość wody, h – wysokość naczynia. Podczas wznoszenia się pęcherzyka jego objętość nie zmienia się, bo ciecz jest praktycznie nieściśliwa, nie zmienia się więc również ciśnienie powietrza w pęcherzyku. Gdy pęcherzyk znajduje się u góry naczynia, to ciśnienie wody pod pokrywą równe jest ciśnieniu na dnie w położeniu początkowym, zatem ciśnienie na dole wzrosło o wielkość Δp.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 752 ($WT = 2{,}03$), 753 (WT=2,73) z numeru 2/2023

Jan Zambrzycki	Białystok	4–44+3,03
Tomasz Rudny	Poznań	43,41
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2–38,81
Jacek Konieczny	Poznań	36,51
Tomasz Wietecha	Tarnów	16–23,66
Ryszard Baniewicz	Włocławek	1–20,97
Konrad Kapcia	Poznań	2–20,00
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–19,70

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: `https://deltami.edu.pl/delta/redakcja/regulamin_klubu_44/`

Klub 44 M

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2023

Przypominamy treść zadań:

857. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y, dla których liczby $x^2 - 4y$ oraz $y^2 - 4x$ są kwadratami liczb całkowitych.

858. W przestrzeni znajduje się trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 oraz odcinek DE długości 1, mający punkt wspólny z trójkątem ABC. Udowodnić, że pewien z punktów A, B, C, D, E jest w odległości nie większej niż 1 od czterech pozostałych.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 851 ($WT = 2{,}97$) i 852 ($WT = 1{,}17$) z numeru 12/2022

Norbert Porwol	Essen	40,25
Paweł Najman	Kraków	39,93
Radosław Kujawa	Wrocław	39,13
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olsztyn	30,62

857. Szukamy rozwiązań układu równań

$$x^2 = a^2 + 4y, \qquad y^2 = b^2 + 4x \tag{1}$$

w liczbach całkowitych $x, y \geqslant 1$, $a, b \geqslant 0$. Widać, że liczby x, a muszą mieć jednakową parzystość (tak samo liczby y, b).

Z uwagi na symetrię wystarczy rozważyć sytuację, gdy $x \geqslant y$. Wówczas $x^2 = a^2 + 4y \leqslant a^2 + 4x$, czyli

$$x^2 - 4x - a^2 \leqslant 0. \tag{2}$$

Pierwsze równanie (1) pokazuje, że $x^2 \geqslant a^2 + 4$, co w połączeniu z nierównością kwadratową (2) daje dwustronne oszacowanie:

$$\sqrt{a^2+4} \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{a^2+4}. \tag{3}$$

Nietrudno sprawdzić, że liczba $a + 2$ leży w przedziale $\left[\sqrt{a^2+4},\ 2 + \sqrt{a^2+4}\right]$ (długości 2). Gdy $a \geqslant 1$, jest to jedyna w tym przedziale liczba całkowita tej samej parzystości co a; zatem $x = a + 2$. Układ równań (1) wymusza równości

$$y = a + 1 \text{ oraz } (a+1)^2 = b^2 + 4(a+2).$$

Tę ostatnią przepisujemy w postaci $(a-1)^2 = b^2 + 8$, czyli

$$(a - 1 - b)(a - 1 + b) = 8,$$

z jedynym rozwiązaniem (w liczbach naturalnych)

$a = 4$, $b = 1$. Stąd $x = 6$, $y = 5$. Czwórka $(a, b, x, y) = (4, 1, 6, 5)$ spełnia wyjściowy układ (1).

Gdy natomiast $a = 0$, nierówność podwójna (3) jest spełniona przez dwie liczby parzyste: $x = 2$ i $x = 4$. Po wstawieniu do równań (1) pierwsza z tych wartości daje sprzeczność, zaś druga szybko prowadzi do rozwiązania: $(a, b, x, y) = (0, 0, 4, 4)$.

Uwzględniając symetrię (czyli odrzucając założenie $x \geqslant y$), dostajemy odpowiedź: szukane pary (x, y) to $(4, 4)$, $(6, 5)$, $(5, 6)$.

858. Tworzymy macierz zerojedynkową:

$$\begin{bmatrix} i(A,D) & i(B,D) & i(C,D) \\ i(A,E) & i(B,E) & i(C,E) \end{bmatrix}$$

gdzie

$$i(X,Y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } XY \leqslant 1 \\ 1 & \text{gdy } XY > 1 \end{cases}$$

(XY oznacza długość odcinka o końcach X, Y).

Ponieważ $AB = AC = BC = DE = 1$, zadanie sprowadza się do wykazania, że w tej macierzy któryś wiersz lub któraś kolumna składa się z samych zer. Przypuśćmy więc, że tak nie jest. Wówczas – po ewentualnej permutacji symboli A, B, C i/lub D, E (co nie wpływa na warunki zadania) – pojawia się w macierzy układ jedynek $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right]$; w terminach geometrycznych (przy oznaczeniach przyjętych wcześniej):

$$AD > 1, \quad BD > 1, \quad CE > 1;$$

czyli

$$AD > AC, \quad BD > BC, \quad CE > DE.$$

Niech π będzie płaszczyzną symetralną odcinka CD. Uzyskane nierówności oznaczają, że punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π co punkt C; zaś punkt E leży po tej stronie π co punkt D (i żaden z nich nie leży na niej). Tak więc płaszczyzna π oddziela trójkąt ABC od odcinka DE – wbrew założeniu, że te figury mają punkt wspólny. Sprzeczność dowodzi tezy zadania.

Czy tu jest równomiernie? ...czyli o metodzie $V/V_{\max}$

*Radosław POLESKI**

*Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Warszawskiego (rpoleski@astrouw.edu.pl)

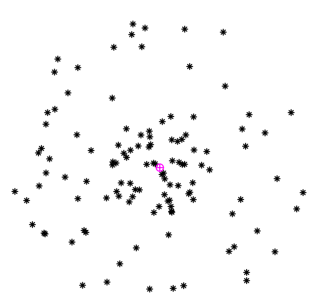
W XXI wieku astronomowie pozyskują *ogromne* ilości danych obserwacyjnych o różnym stopniu szczegółowości. Oczywiście wyekstrahowanie wiedzy z takiego *kosmosu* danych wymaga analizy statystycznej. Te analizy mogą być bardzo różnego rodzaju: od przetwarzania pikseli ze zdjęcia nieba na pomiary jasności i pozycji obiektów, przez analizę wielu obserwacji w celu znalezienia okresu, z jakim zachodzi jakieś zjawisko (np. zaćmienia w układzie podwójnym gwiazd), po analizę danych z różnych źródeł w celu określenia parametrów wybranego obiektu (np. jaka jest odległość do centrum Galaktyki lub jaką część masy we Wszechświecie stanowi materia barionowa).

Warto tutaj zwrócić uwagę na pewną istotną różnicę w pozyskiwaniu danych między astronomią a fizyką. Otóż ta pierwsza bazuje w znacznej mierze na obserwacjach zjawisk, w które nie ingerujemy, natomiast ta druga opiera się przede wszystkim na wynikach kontrolowanych doświadczeń. Typowo obserwacyjny charakter badań astronomicznych może stanowić istotną trudność – zwiększenie próbki badanych obiektów może być bardzo kosztowne, jak również może wymagać czasu dłuższego niż przewidywany czas życia badacza. Z reguły mamy zatem do czynienia z próbką dalece niekompletną (choć bardzo chcielibyśmy, by było inaczej). Są jeszcze inne przeszkody, jak na przykład to, że informacje o badanych obiektach mogą pochodzić z obserwacji wykonywanych w różnych warunkach i w różnym czasie itp. Uwzględnienie w analizie statystycznej tych subtelności nie jest łatwe, ale konieczne.

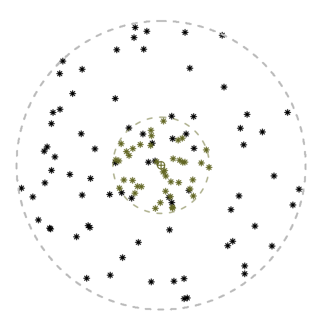
W niniejszym artykule chciałbym przedstawić pewną typowo astronomiczną metodę o egzotycznej nazwie „$V/V_{\max}$". Została ona wymyślona pod koniec lat 60., by rozwiązać następujący problem: mamy do dyspozycji katalog kwazarów o znanych jasnościach oraz przesunięciach ku czerwieni i chcemy sprawdzić, czy kwazary te są rozmieszczone równomiernie w przestrzeni.

Kwazar (z ang. *quasi-stellar object*) jest to rodzaj galaktyki aktywnej, która emituje niezwykle jasne promieniowanie.

Zwróćmy uwagę, że dla kwazarów emitujących najwięcej światła nasza próbka może być traktowana jako kompletna dla dużych odległości, jednak dla kwazarów emitujących mniej światła próbka jest kompletna jedynie dla małych odległości. Wynika stąd, że choć na pierwszy rzut oka może wydawać się, że koncentracja kwazarów spada wraz ze wzrostem ich odległości od Ziemi, to może to być artefakt zależności, że im bliżej Ziemi jesteśmy, tym więcej kwazarów jesteśmy w stanie zaobserwować (por. rys. 1 i 2).



Rys. 1. Rozmieszczenie 150 kwazarów zaobserwowanych przez pewnego dwuwymiarowego astronoma w dwuwymiarowym Wszechświecie. Kwazary wykazują pozorną koncentrację wokół Ziemi (oznaczonej symbolem ⊕)



Rys. 2. Rozmieszczenie kwazarów identyczne z tym z rysunku 1, z zaznaczeniem, do której z dwóch grup o ustalonych jasności absolutnych należy każdy obiekt. W ramach każdej grupy kwazary są rozłożone równomiernie w całym obszarze, w jakim można je zaobserwować