Klub 44 F

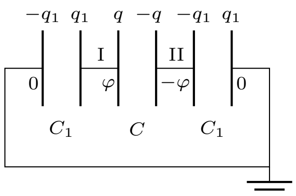
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2023

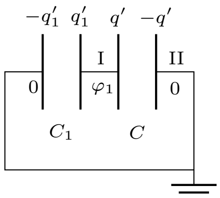
Przypominamy treść zadań:

754. Okładki kondensatora płaskiego o pojemności C naładowano do potencjałów φ i $(-\varphi)$ względem ziemi. Każda z okładek tworzy z ziemią kondensator o pojemności C_1. Znaleźć stosunek natężeń pola elektrycznego między okładkami kondensatora o pojemności C na początku i po uziemieniu jednej z okładek.

755. Zamknięte naczynie całkowicie wypełnione jest wodą. Tuż nad dnem naczynia znajduje się pęcherzyk powietrza. Jak zmieni się ciśnienie na poziomie dna, gdy pęcherzyk wypłynie?



Rys. 1



Rys. 2

754. Układ równoważny do opisanego w zadaniu przedstawia rysunek 1. Kondensator o pojemności C naładowany jest ładunkiem $q = 2\varphi C$, ładunki na okładkach kondensatorów o pojemnościach C_1 wynoszą $q_1 = \varphi C_1$. Całkowity ładunek na lewej płytce jest równy

$$Q = q + q_1 = (2C + C_1)\varphi. \tag{1}$$

Po uziemieniu prawej płytki równoważny układ przedstawia rysunek 2. Ładunek na okładkach kondensatora C wynosi $q' = \varphi_1 C$, przez φ_1 oznaczyliśmy potencjał nieuziemionej okładki. Ładunek kondensatora o pojemności C_1 wynosi $q_1' = \varphi_1 C_1$, a całkowity ładunek lewej płytki to

$$Q' = q' + q_1' = \varphi(C + C_1) = Q. \tag{2}$$

Uwzględniając (1), otrzymujemy

$$\varphi_1 = \frac{\varphi(2C + C_1)}{C + C_1}.$$

Natężenie pola elektrycznego między okładkami kondensatora jest ilorazem napięcia i odległości między nimi, zatem szukany stosunek tych natężeń wynosi

$$\frac{E}{E_1} = \frac{2\varphi}{\varphi_1} = \frac{2(C + C_1)}{2C + C_1}.$$

755. W stanie początkowym ciśnienie powietrza w pęcherzyku jest takie samo, jak ciśnienie wody nad dnem naczynia. Różnica ciśnień między dnem naczynia a górą wynosi $\Delta p = \varrho g h$, gdzie ϱ to gęstość wody, h – wysokość naczynia. Podczas wznoszenia się pęcherzyka jego objętość nie zmienia się, bo ciecz jest praktycznie nieściśliwa, nie zmienia się więc również ciśnienie powietrza w pęcherzyku. Gdy pęcherzyk znajduje się u góry naczynia, to ciśnienie wody pod pokrywą równe jest ciśnieniu na dnie w położeniu początkowym, zatem ciśnienie na dole wzrosło o wielkość Δp.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
752 ($WT = 2{,}03$), 753 (WT=2,73)
z numeru 2/2023

Jan Zambrzycki	Białystok	4–44+3,03
Tomasz Rudny	Poznań	43,41
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2–38,81
Jacek Konieczny	Poznań	36,51
Tomasz Wietecha	Tarnów	16–23,66
Ryszard Baniewicz	Włocławek	1–20,97
Konrad Kapcia	Poznań	2–20,00
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–19,70

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: `https://deltami.edu.pl/delta/redakcja/regulamin_klubu_44/`

Klub 44 M

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2023

Przypominamy treść zadań:

857. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y, dla których liczby $x^2 - 4y$ oraz $y^2 - 4x$ są kwadratami liczb całkowitych.

858. W przestrzeni znajduje się trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 oraz odcinek DE długości 1, mający punkt wspólny z trójkątem ABC. Udowodnić, że pewien z punktów A, B, C, D, E jest w odległości nie większej niż 1 od czterech pozostałych.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
851 ($WT = 2{,}97$) i 852 ($WT = 1{,}17$)
z numeru 12/2022

Norbert Porwol	Essen	40,25
Paweł Najman	Kraków	39,93
Radosław Kujawa	Wrocław	39,13
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olsztyn	30,62

857. Szukamy rozwiązań układu równań

$$x^2 = a^2 + 4y, \qquad y^2 = b^2 + 4x \tag{1}$$

w liczbach całkowitych $x, y \geqslant 1$, $a, b \geqslant 0$. Widać, że liczby x, a muszą mieć jednakową parzystość (tak samo liczby y, b).

Z uwagi na symetrię wystarczy rozważyć sytuację, gdy $x \geqslant y$. Wówczas $x^2 = a^2 + 4y \leqslant a^2 + 4x$, czyli

$$x^2 - 4x - a^2 \leqslant 0. \tag{2}$$

Pierwsze równanie (1) pokazuje, że $x^2 \geqslant a^2 + 4$, co w połączeniu z nierównością kwadratową (2) daje dwustronne oszacowanie:

$$\sqrt{a^2+4} \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{a^2+4}. \tag{3}$$

Nietrudno sprawdzić, że liczba $a + 2$ leży w przedziale $\left[\sqrt{a^2+4},\ 2 + \sqrt{a^2+4}\right]$ (długości 2). Gdy $a \geqslant 1$, jest to jedyna w tym przedziale liczba całkowita tej samej parzystości co a; zatem $x = a + 2$. Układ równań (1) wymusza równości

$$y = a + 1 \text{ oraz } (a+1)^2 = b^2 + 4(a+2).$$

Tę ostatnią przepisujemy w postaci $(a-1)^2 = b^2 + 8$, czyli

$$(a - 1 - b)(a - 1 + b) = 8,$$

z jedynym rozwiązaniem (w liczbach naturalnych)