

# Poszukiwanie porządku

Andrzej DĄBROWSKI\*

\* Wydział Matematyki i Informatyki,  
Uniwersytet Wrocławski

Pełna nazwa to *Seminarium z Matematyki Stosowanej Sekcji Ogólnej Wydziału Zastosowań Państwowego Instytutu Matematycznego* [1].

Czaszki z Ngandong są grupą skamieniałości ludzkich czaszek odkrytych w 1931 roku w dolinie rzeki Solo na Jawie w Indonezji. Czaszki te są datowane na około 100–200 tysięcy lat i są uważane za pozostałości hominidów z gatunku *Homo erectus*.

Jan Czekanowski (1882–1965) był antropologiem i etnografem. Studiował na Uniwersytecie w Zurychu antropologię, anatomię, etnografię i matematykę. Był uczestnikiem *Seminarium* we Wrocławiu (czterokrotnie, według kroniki *Seminarium*).

W roku 1950 jedno z jesiennych posiedzeń wrocławskiego *Seminarium z Matematyki Stosowanej* poświęcone było czaszkom z Ngandong. Antropolodzy oczekiwali od matematyków uporządkowania chronologicznego tych czaszek na podstawie tablic Czekanowskiego *przysłanych nam łaskawie przez prof. dra T. Henzla* (cytat z kroniki *Seminarium*).

Porządek, rozumiany jako liniowy, jest oczekiwany w wielu dziedzinach. Tworzy się różnego rodzaju rankingi (dotyczące szkół, uczelni, poparcia polityków). Trudno o widowiska sportowe bez rankingów – opartych na mierzonym czasie, dystansie czy punktach (pięciobój). Aby porównać często trudne do zestawienia obiekty, buduje się indeksy. W ekonomii stany giełdy ocenia się przez indeksy giełdowe (np. Dow Jones, WIG), a poziom cen – przez wskaźnik inflacji. Stan zdrowia populacji ocenia się przez oczekiwany średni czas życia czy wskaźnik śmiertelności niemowląt. Metody porównania oparte na rankingach i indeksach polegają na przypisaniu obiektom jakiejś liczby. A liczby, jak wiadomo, łatwo uporządkować.

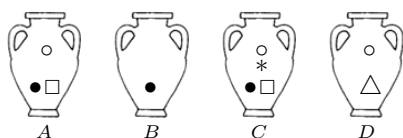
Gorzej, kiedy obiekt można opisać zespołem wielu liczb. Jeszcze gorzej, gdy trudno przypisać mu jakiegokolwiek liczby. Taki problem powstaje, gdy trzeba uporządkować znalezione na starożytnym śmietniku skorupy z różnymi motywami (jest to tzw. zagadnienie seriacji w archeologii). Z podobnym problemem – uporządkowania w czasie czaszek z Ngandong – zwrócili się antropolodzy do matematyków.

Tablice Czekanowskiego, którymi dysponował zespół profesora Steinhausa (Kazimierz Florek, Józef Łukaszewicz, Julian Perkal i Stefan Zubrzycki), zawierały informacje o stopniu zróżnicowania każdej pary czaszek. Stopień ten był wyrażony przez odległość euklidesową w siedmiowymiarowej przestrzeni parametrów reprezentujących długości charakterystycznych odcinków na czaszce.

Uogólniając, taką tablicę można potraktować jako *funkcję rozbieżności*. Jest to dowolna funkcja  $d(x, y)$  określona na parach elementów zadanego zbioru  $X$ , która spełnia warunki:

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ oraz } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Szczególnym przypadkiem funkcji rozbieżności są funkcje odległości – metryki. Metryka to funkcja rozbieżności, która spełnia dodatkowo nierówność trójkąta:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  dla każdych  $x, y, z$ .



Rys. 1

**Przykład 1. Wazy.** Odkryto 4 wazy z ozdobami. Każdą wazę traktujemy jako zbiór namalowanych na niej ornamentów. Funkcją rozbieżności może być tzw. rozbieżność Kulczyńskiego określona dla dwóch zbiorów ornamentów  $R$  i  $S$  wzorem

$$d(R, S) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{|R \cap S|}{|R|} + \frac{|R \cap S|}{|S|} \right).$$

Nietrudno sprawdzić, że taka funkcja faktycznie jest funkcją rozbieżności. Jest ona też dość intuicyjna, gdyż  $\frac{1}{2} \left( \frac{|R \cap S|}{|R|} + \frac{|R \cap S|}{|S|} \right)$  to średnia arytmetyczna frakcji wspólnych elementów  $R$  i  $S$ , zawartych w zbiorze  $R$  i zawartych w zbiorze  $S$ .

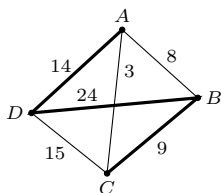
Wynikająca z tego wzoru macierz rozbieżności przedstawiona jest na marginesie. Zauważmy, że funkcja Kulczyńskiego nie jest metryką, gdyż  $d(B, D) = 1 > \frac{11}{12} = d(B, A) + d(A, D)$ .

**Funkcja rozbieżności a porządek liniowy.** Jak wprowadzić porządek wśród obiektów, na których mamy zadaną macierz rozbieżności? Rozważmy najpierw szczególny przypadek. Załóżmy, że obiekty to punkty rozmieszczone na prostej, a za funkcję rozbieżności przyjmujemy odległości między nimi. Czy z samej macierzy rozbieżności można odtworzyć uporządkowanie punktów na prostej? Można – wystarczy wybrać takie uporządkowanie, które minimalizuje sumę odległości między kolejnymi punktami.

Stanisław Kulczyński (1895–1975), zoolog, arachnolog, tatarnik. Rektor uniwersytetów we Lwowie i Wrocławiu.

	A	B	C	D
A	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{12}$
B	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{3}{8}$	1
C	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{5}{8}$
D	$\frac{7}{12}$	1	$\frac{5}{8}$	0

Macierz rozbieżności Kulczyńskiego

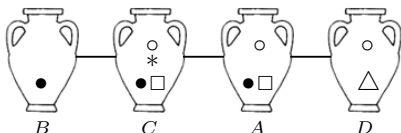


Rys. 2. Graf z rozbieżnościami Kulczyńskiego (pomnożonymi przez 24) ze ścieżką  $ADBC$  o długości 47

Dla wygody przyjmijmy, że obiekty  $O_1, O_2, \dots, O_n$  z rozbieżnościami  $d_{ij} = d(O_i, O_j)$  będziemy reprezentować przez nieskierowany graf pełny  $G$  o  $n$  wierzchołkach  $O_1, O_2, \dots, O_n$ , którego krawędź  $O_i O_j$  ma wagę  $d_{ij}$ . Długością ścieżki  $O_{i_1} O_{i_2} \dots O_{i_n}$  nazwiemy liczbę  $d_{i_1 i_2} + d_{i_2 i_3} + \dots + d_{i_{n-1} i_n}$ . Na rysunku 2 widać przykład takiego grafu dla 4 waz.

Wcześniejsza obserwacja sugeruje, aby porządek obiektów  $O_1, \dots, O_n$  wyznaczała ścieżka w grafie  $G$  o minimalnej długości, przechodząca przez wszystkie jego wierzchołki (ścieżka optymalna).

**Przykład 2. Pięć stolic.** Poniższa tablica przedstawia odległości drogowe (w kilometrach) między Amsterdamem, Berlinem, Paryżem, Rzymem i Warszawą.

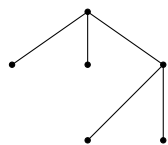


Rys. 3. Ścieżka optymalna  $BCAD$  w grafie z wazami

	A	B	P	R	W
A	0	650	510	1650	1140
B	650	0	1040	1460	570
P	510	1040	0	1430	1550
R	1650	1460	1430	0	1730
W	1140	570	1550	1730	0

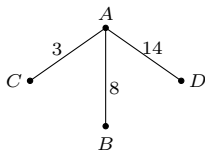
Spośród 60 możliwych ścieżek najkrótsza wiedzie z Warszawy przez Berlin, Amsterdam, Paryż aż do Rzymu i ma długość 3160 km.

**Dendryty.** Uporządkowanie liniowe jest często niewystarczające, a nawet nieadekwatne. Przytoczmy tu obserwację Juliana Perkala: *Jak zauważyłem [...] liniowe porządkowanie jest w wielu przypadkach nienaturalne, na przykład linia genealogiczna właśnie często się rozgałęzia.* [2]



Rys. 4

Strukturą, która umożliwia zbliżone do liniowego uporządkowanie wierzchołków grafu, jest dendryt, szerzej znany jako drzewo – z powodów historycznych będziemy tu używać pierwszego określenia. Dendryt to graf bez cykli, który jest spójny. Te dwa warunki razem oznaczają, że każde dwa wierzchołki są połączone jednoznacznie wyznaczoną ścieżką (rys. 4). Sama ścieżka też jest zresztą szczególnym przypadkiem dendrytu.

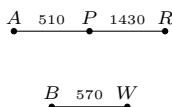


Rys. 5. Optymalny dendryt dla problemu 4 waz. Jego długość 25 jest mniejsza od długości optymalnej ścieżki  $BCAD$  o długości 26

Długość dendrytu określa suma wag jego krawędzi. Inspirowani wcześniejszymi rozważaniami przyjmijmy, że dendryt o minimalnej długości (dendryt optymalny) najlepiej odtworzy porządek  $n$  wierzchołków grafu (rys. 5).

**Taksonomia wrocławska.** W przykładzie z wazami nietrudno było wskazać optymalny dendryt. Wraz ze wzrostem liczby wierzchołków grafu powstaje pytanie o algorytmiczne jego wyznaczanie. W informatyce zagadnienie to jest klasyczne i znane pod nazwą poszukiwania *minimalnego drzewa rozpinającego*. Według [3] najwcześniejsze opublikowane rozwiązanie tego problemu (1926) pochodzi od czeskiego matematyka Otakara Borůvki, który zajmował się nim w kontekście opracowywania optymalnej sieci elektrycznej na Morawach. Znane zapewne uczestnikom olimpiad informatycznych algorytmy Kruskala i Prima zostały opublikowane w latach 1956 i 1957. Wydaje się, że matematycy wrocławscy jako pierwsi zaczęli zajmować się tym problemem w kontekście metod porządkowania i klasyfikowania (tzn. *taksonomii*) w antropologii, biologii czy językoznawstwie. Ich metoda, opublikowana w 1951 roku [4], jest co do zasady algorytmem Borůvki (z którego istnienia nie zdawali sobie sprawy), ale w polskiej literaturze statystycznej nosi nazwę *taksonomii wrocławskiej*.

W ramach tych prac pierwszy krok w kierunku ogólnej konstrukcji optymalnego dendrytu zrobił w roku 1949 Kazimierz Florek. Zwrócił on uwagę na fakt, że w optymalnym dendrycie powinny się znaleźć odcinki łączące najbliższe obiekty – to znaczy łączące pewien obiekt z jego najbliższym sąsiadem. Odcinki te nazwano *połączeniami rzędu I*.

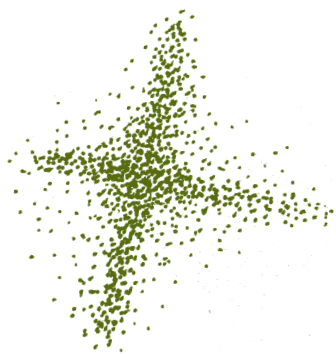


Rys. 6

W przykładzie z wazami takie postępowanie rozwiązuje sprawę – połączenia rzędu I tworzą dendryt. Nie zawsze tak jest. Połączenia rzędu I dla 5 stolic tworzą niespójny podgraf, przedstawiony na marginesie. Zauważmy jednak, że

w grafie połączeń rzędu I nie mogą występować cykle – taki graf nazywamy *lasem* i w naturalny sposób rozbija się on na dendryty.

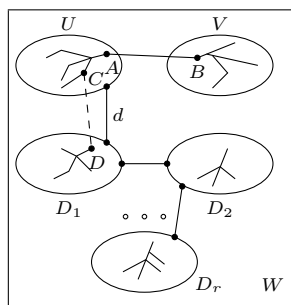
Twórcy taksonomii zaproponowali w 1950 roku konstrukcję optymalnego dendrytu, będącą iteracyjną wersją pomysłu Florka:



### Metoda W

1. Zbudować połączenia rzędu I dla grafu  $G$ . Jeśli tworzą dendryt, konstrukcja jest skończona. Jeśli nie, przechodzi się do punktu 2.
2. Utworzyć nowy graf  $G_1$ . Wierzchołkami grafu  $G_1$  są poddendryty utworzone z połączeń rzędu I grafu  $G$ . Rozbieżność między poddendrytami  $A$  i  $B$  jest rozbieżnością najbliższych sąsiadów:  $d(A, B) := \min\{d(P, Q) : P \in A, Q \in B\}$ . Utworzyć połączenia rzędu I dla grafu  $G_1$  (są to połączenia rzędu II dla  $G$ ). Jeśli tworzą dendryt, konstrukcja jest skończona. Jeśli nie, powtarza się postępowanie z punktu 2 dla grafu  $G_1$ .
3. W ten sposób utworzymy kolejno grafy  $G_1, G_2, G_3, \dots$  i dla każdego z nich połączenia kolejnego rzędu. Iteracje te muszą się skończyć, gdyż liczba wierzchołków w kolejnych grafach  $G_i$  maleje.
4. Konstrukcję ostatecznego dendrytu kończy się, łącząc dendryty kolejnych rzędów krawędziami między obiektami realizującymi rozbieżność najbliższego sąsiada.

Zobaczmy, jak działa metoda W dla przykładu 5 stolic. Połączenia I rzędu tworzą poddendryty  $O_1 = \{A, P, R\}$  i  $O_2 = \{B, W\}$ . Graf  $G_1$  ma wierzchołki  $O_1$  i  $O_2$ . Minimum odległości z  $B$  do zbioru punktów  $\{A, P, R\}$  wynosi 650 km, minimum z  $W$  do  $\{A, P, R\}$  – 1140 km, zatem rozbieżność najbliższego sąsiada między  $O_1$  i  $O_2$  jest równa 650 km, i jest odległością między Berlinem a Amsterdamem.  $G_1$  z połączeniem rzędu II między tymi stolicami jest już dendrytem. Kończy to konstrukcję, tworząc ostateczny optymalny dendryt, który okazał się ścieżką  $WBAPR$ .



Rys. 7

**Dowód optymalności metody W.** Bez straty ogólności można założyć, że wszystkie niezerowe rozbieżności w grafie  $G$  są różne. W razie potrzeby wystarczy bowiem zamienić rozbieżności  $d_{ij}$  na  $d'_{ij} = d_{ij} + \varepsilon_{ij}$  (dla  $i < j$ ),  $d'_{ji} = d'_{ij}$  i  $\varepsilon_{ij} > 0$  są to dowolnie wybrane różne liczby mniejsze niż  $\min d_{ij}$ . Po zakończeniu konstrukcji należy powrócić do rozbieżności  $d_{ij}$ .

Niech  $W$  będzie dendrytem sporządzonym metodą  $W$ . Przypuśćmy, że  $W$  nie jest dendrytem optymalnym, więc jest różny od pewnego dendrytu optymalnego  $M$ . W dendrycie  $W$  istnieje zatem krawędź, która nie występuje w dendrycie  $M$  – powiedzmy, że łączy wierzchołki  $A$  i  $B$ .

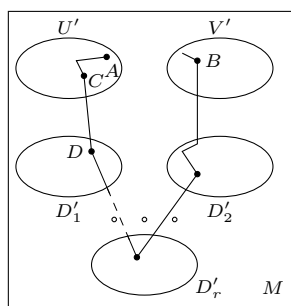
Przyjmijmy, że krawędź  $AB$  ma wagę  $a$  i rząd  $k$  w dendrycie  $W$ . Łączy ona dendryty  $U$  i  $V$  rzędu  $k - 1$  o zbiorach wierzchołków  $U'$  i  $V'$ . Pozostałe dendryty rzędu  $k - 1$ , które oznaczymy przez  $D_1, D_2, \dots, D_r$ , mają zbiory wierzchołków  $D'_1, D'_2, \dots, D'_r$ . Zgodnie z konstrukcją  $W$  zachodzi jeden z dwóch przypadków:

1.  $a$  jest mniejsze niż każda z rozbieżności  $U$  z  $D_1, \dots, D_r$ ,
2.  $a$  jest mniejsze niż każda z rozbieżności  $V$  z  $D_1, \dots, D_r$ .

Bez straty ogólności przyjmijmy, że zachodzi przypadek 1.

Wierzchołki  $A$  i  $B$  dendrytu  $M$  łączy ścieżka niezawierająca krawędzi  $AB$ , która musi zawierać krawędź  $CD$  taką, że  $C$  należy do  $U'$ , a  $D$  nie należy. Przyjmijmy, że  $D$  należy do  $D'_1$ . Waga krawędzi  $CD$  jest nie mniejsza niż odległość  $d$  między dendrytami  $U$  i  $D_1$  w dendrycie  $W$ . Z kolei  $a < d$ , bo zachodzi przypadek 1. Można więc stworzyć nowy dendryt  $M'$  zawierający wszystkie krawędzie  $M$  – z wyjątkiem  $CD$  zastąpionej przez krawędź  $AB$ . Długość  $M'$  jest mniejsza od długości  $M$ . Jest to sprzeczne z założeniem, że  $M$  jest dendrytem optymalnym.

**Podział na grupy.** Zbiór obiektów może być niejednorodny: skorupy znalezione na starożytnym śmietniku czy czaszki znalezione na badanym terytorium mogą pochodzić z kilku odrębnych okresów. Jak podzielić dane, tak aby dendryty odpowiadające podziałowi wskazały na istotne różnice w tych grupach?



Rys. 8

Rodzina  $k$  dendrytów  $D_1, D_2, \dots, D_k$  o zbiorach wierzchołków  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$  jest *podziałem* grafu pełnego  $G$  o wierzchołkach  $Z$ , gdy

$$Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_k \quad \text{oraz} \quad Z_i \cap Z_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j.$$

*Długość podziału* jest sumą długości  $l(D_i)$  składowych dendrytów. *Podział jest optymalny*, gdy długość podziału jest minimalna. Z definicji tej natychmiast wynika, że składowe podziału optymalnego muszą być optymalne, możemy więc przyjąć  $D_i = W(Z_i)$ .

Wróćmy do przykładu czterech waz. Można je podzielić na dwie grupy na siedem sposobów:

$Z_1$	$\{A, B\}$	$\{A, C\}$	$\{A, D\}$	$\{A, B, C\}$	$\{A, B, D\}$	$\{A, C, D\}$	$\{B, C, D\}$
$Z_2$	$\{C, D\}$	$\{B, D\}$	$\{B, C\}$	$\{D\}$	$\{C\}$	$\{B\}$	$\{A\}$
$W(Z_1)$	$A-B$	$A-C$	$A-D$	$B-A-C$	$B-A-D$	$C-A-D$	$B-C-D$
$W(Z_2)$	$C-D$	$B-D$	$B-C$	$D$	$C$	$B$	$A$
$l(W(Z_1)) + l(W(Z_2))$	23	27	23	11	22	17	24

Optymalny podział  $D_1 = C-A-B$ ,  $D_2 = D$  jest podgrafem dendrytu uzyskanego metodą  $W$  (rys. 5). Okazuje się, że tak jest zawsze.

**Twierdzenie.** *Jeżeli  $\{W(Z_1), W(Z_2), \dots, W(Z_k)\}$  jest optymalnym podziałem grafu  $G$  o wierzchołkach  $Z$ , to*

$$W(Z_1) \cup W(Z_2) \cup \dots \cup W(Z_k) \subset W(Z).$$

*Dowód.* Zakładamy, jak poprzednio, bez straty ogólności, że wszystkie niezerowe rozbieżności są różne. Przypuśćmy, że w  $W(Z_1) \cup W(Z_2) \cup \dots \cup W(Z_k)$  istnieje krawędź  $AB$  nienależąca do  $W(Z)$ . Istnieje w  $W(Z)$  ścieżka  $s_{AB}$  łącząca te punkty.

Z rozłączności  $Z_i$  wynika, że istnieje  $r$  takie, że krawędź  $AB$  należy do  $W(Z_r)$ . Elementy  $Z_r$  można podzielić na podzbiory  $U$  i  $V$  w następujący sposób:  $U$  składa się z wierzchołka  $A$  i wszystkich wierzchołków  $Z_r$ , które są połączone ścieżką w dendrycie  $W(Z_r)$  wychodzącą z  $A$  i niezawierającą krawędzi  $AB$ ;  $V$  składa się z wierzchołka  $B$  i wszystkich wierzchołków  $Z_r$ , które są połączone ścieżką w dendrycie  $W(Z_r)$  wychodzącą z  $B$  i niezawierającą krawędzi  $AB$ .

Ścieżka  $s_{AB}$  musi zawierać krawędź  $CD$  taką, że  $C \in U$ ,  $D \notin U$ . Niech  $d(A, B) = x$ ,  $d(C, D) = y$ . Zachodzi nierówność  $y < x$ , w przeciwnym przypadku, zamieniając  $CD$  z  $AB$  w dendrycie  $W(Z)$ , zmniejszylibyśmy jego długość, a to byłaby sprzeczność.

Zachodzą dwa przypadki:  $D \in V$  i  $D \in Z_s$  dla  $s \neq r$ .

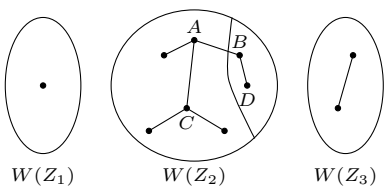
1.  $D \in V$  (rys. 9). Wtedy, zastępując  $AB$  przez  $CD$  w  $W(Z_r)$ , uzyskujemy, że dendryt  $W(Z_r)$  nie jest optymalny – sprzeczność.

2.  $D \in Z_s$  dla  $s \neq r$  (rys. 10). Zastępujemy dendryt  $W(Z_r)$  przez dendryt  $W(U) \cup CD \cup W(Z_s)$  o długości  $l(W(U)) + y + l(W(Z_s))$ , zaś dendryt  $W(Z_s)$  przez  $W(V)$  o długości  $l(W(V))$ . Suma długości  $k$  dendrytów po zmianie jest mniejsza niż suma ich długości przed zmianą, co przeczy założeniu, że podział jest optymalny. To kończy dowód.

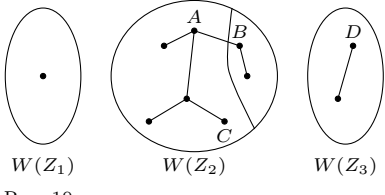
Z powyższego twierdzenia wynika użyteczny w kontekście szukania optymalnego grupowania

**Wniosek.** *Optymalny podział grafu  $G$  na  $k$  poddendrytów polega na usunięciu z dendrytu  $W(Z)$   $k - 1$  krawędzi o największej rozbieżności.*

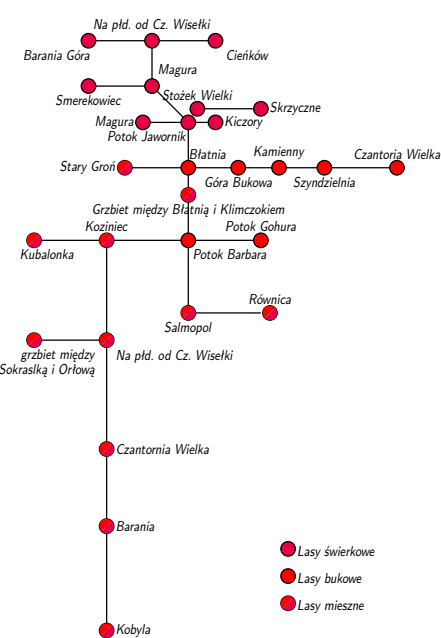
**O zastosowaniach parę słów.** *Seminarium z Matematyki Stosowanej* bardzo aktywnie propagowało pomysł taksonomii, stosując ją w różnych dziedzinach. W *Kalejdoskopie Matematycznym* Steinhausa można przeczytać o taksonomii wątrobowców (*Hepaticae*) w Beskidzie Śląskim. Dendryt odpowiadający częstości występowania różnych gatunków wątrobowców okazał się powiązany z typem lasu – co było ciekawym odkryciem (rys. 11).



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

## Literatura

- [1] Szczotka, W., *Fenomen Steinhausowskiego Seminarium Matematyki Stosowanej*, *Antiquitates Mathematicae*, (2018) vol. 12(1), 197–228, (2019) vol. 13(1), 177–233.
- [2] Perkal, J. (1953). *Taksonomia wrocławska*, *Przegląd Antropologiczny*.
- [3] Graham, R. L., Hell, P. (1985). *On the history of the minimum spanning tree problem*, *Annals of the History of Computing*, 7(1), 43–57.
- [4] Florek K., Łukaszewicz J., Perkal J., Steinhaus H., Zubrzycki S., *Sur la liaison et la division des points d'un ensemble fini*, *Colloquium Mathematicum* (1951), vol. 2, nr 3–4 str. 282–285.
- [5] Zubrzycki, F. (1953). *O łańcuszkach gwiazdnych*. *Applications Mathematicae*, 1(3), 197–205.

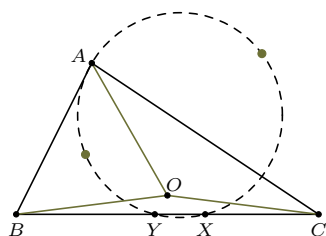
Charakterystycznym rysem pracy *Seminarium* było podejmowanie każdego, nawet najbardziej nietypowych problemów. Na posiedzeniu w styczniu 1952 roku Julian Perkal zakomunikował, że zrobił dendryt pieśni ludowych dla córki prof. Czekanowskiego (cytat ze starannie prowadzonej księgi protokołów *Seminarium*). Klasyfikacja pieśni ludowych metodą taksonomii wrocławskiej stała się jednym z ważnych narzędzi badawczych Anny Czekanowskiej-Kuklińskiej, profesorki Uniwersytetu Warszawskiego (zm. 2021) i kierowniczki stworzonego przez nią Zakładu Etnomuzykologii.

Stefan Zubrzycki opublikował w 1953 roku pracę [5] wykorzystującą taksonomię wrocławską, w której odpowiada na pytanie astronoma Włodzimierza Zonna, czy gwiazdy układają się w nieprzypadkowe konstelacje (zwane przez autorów *łańcuszkami*), czy też rozmieszczone są losowo na sferze niebieskiej. Wykazał, że układają się losowo, co potwierdza, że gwiazdozbiory są tylko mnemotechniczną metodą zapamiętania położenia gwiazd.

Julian Perkal kończy pracę o taksonomii (op. cit.) ostrzeżeniem: [...] można skonstruować maszynę do robienia dendrytów. Stwarza to niebezpieczeństwo mechanicznego podejścia do przedmiotów przyrodniczych i żyrowania metodami matematycznymi fałszywych niekiedy weksli przyrodniczych. Warto o tym pamiętać.



## Zadania



Przygotował Dominik BUREK

**M 1750.** Czy liczby od 1 do  $2023^2$  mogą zostać w taki sposób wpisane w pola kwadratowej planszy  $2023 \times 2023$ , by dla dowolnego wyboru pewnego wiersza i pewnej kolumny można było znaleźć na nich trzy liczby takie, że jedna z nich jest iloczynem dwóch pozostałych?

Rozwiązanie na str. 2

**M 1751.** Niech  $O$  będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ . Punkty  $X$  i  $Y$  leżą na boku  $BC$  i spełniają równości  $AX = BX$  oraz  $AY = CY$ . Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie  $AXY$  przechodzi przez środki okręgów opisanych na trójkątach  $AOB$  i  $AOC$ .

Rozwiązanie na str. 8

**M 1752.** Niech  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ . Udowodnić, że

$$(1 - x_1x_2 + x_1^2) \cdot (1 - x_2x_3 + x_2^2) \cdot \dots \cdot (1 - x_{n-1}x_n + x_{n-1}^2) \cdot (1 - x_nx_1 + x_n^2) \geq 1.$$

Rozwiązanie na str. 4

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1075.** Fizycznie podwójny, zaćmieniowy układ gwiazd o promieniach  $r_1$  i  $r_2$  obserwowany jest z Ziemi pod kątem  $\alpha$  do płaszczyzny orbity wzajemnego ruchu gwiazd. Jaki warunek wiąże kąt  $\alpha$ , promienie  $r_1$  i  $r_2$  oraz średnicę  $d$  orbity? Zakładamy, że orbita jest kołowa.

Rozwiązanie na str. 7

**F 1076.** Na jedną z okładek kondensatora płaskiego o pojemności  $C$  naniesiono ładunek  $Q_1$ , a na drugą ładunek  $Q_2$ . Ile wynosi różnica potencjałów między okładkami?

*Wskazówka:* Jak zwykle w zadaniach tego typu, zaniedbujemy efekty brzegowe.

Rozwiązanie na str. 7