Kto z kim przystaje...

Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Rozważmy trójkąt ABC, w którym

$$|BC| = a, \qquad |CA| = b, \qquad |AB| = c,$$
$$|\sphericalangle CAB| = \alpha, \quad |\sphericalangle ABC| = \beta, \quad |\sphericalangle BCA| = \gamma.$$

Niech $A'B'C'$ będzie trójkątem z analogicznie przyjętymi oznaczeniami a', b', c', α', β', γ'.

Trójkąty ABC i $A'B'C'$ nazywamy *przystającymi*, jeśli $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Piszemy wówczas $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Dobrze jest w tym zapisie zwracać uwagę na kolejność wierzchołków – tutaj A i A' wymienione są jako pierwsze, bo $a = a'$ i $\alpha = \alpha'$; z analogicznego powodu B i B' są jako drugie, a C i C' jako trzecie. Zapis $\triangle ABC \equiv \triangle B'C'A'$ nie jest błędny, ale trudniej odczytywać z niego informacje o tym, które boki są równej długości i które kąty są równej miary.

Twierdzenie. Jeżeli zachodzi choćby jeden z poniższych warunków:

(bbb) $a = a'$, $\quad b = b'$, $\quad c = c'$,
(bkb) $a = a'$, $\quad \beta = \beta'$, $\quad c = c'$ (lub jeden z dwóch analogicznych),
(kbk) $\alpha = \alpha'$, $\quad b = b'$, $\quad \gamma = \gamma'$ (lub jeden z dwóch analogicznych),

to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające.

Intuicja jest następująca. Aby móc jednoznacznie skonstruować trójkąt (na przykład za pomocą cyrkla i liniału), wystarczą jego trzy boki (bbb) lub dwa boki i kąt między nimi (bkb), lub bok i dwa kąty (kbk).

Cechy przystawania trójkątów to narzędzie, dzięki któremu z *niepełnej* informacji (trzy równości) otrzymujemy informację *pełną* (sześć równości), co pozwala uczynić postęp w rozwiązywaniu zadania.

Zadania

1. Punkty A, B, C leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym $|AB| < |BC|$. Czworokąt $ABDE$ jest kwadratem. Okrąg o średnicy AC przecina prostą DE w punktach P i Q, przy czym punkt P należy do odcinka DE. Proste AQ i BD przecinają się w punkcie R. Udowodnić, że $|DP| = |DR|$. *(LII Olimpiada Matematyczna)*
2. W czworokącie $ABCD$ zachodzi równość $|AB| = |CD|$. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Symetralne odcinków BC i DA przecinają się w punkcie Q. Wykazać, że punkty B, C, P, Q leżą na jednym okręgu. *(X Olimpiada Matematyczna Juniorów, zmodyfikowane)*
3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 60°$. Na trójkącie tym opisano okrąg ω. Punkt X jest środkiem tego łuku BC okręgu ω, który nie zawiera punktu A. Punkt Y jest środkiem tego łuku CA okręgu ω, który nie zawiera punktu B. Udowodnić, że prosta XY jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC. *(XI Olimpiada Matematyczna Juniorów)*
4. Dany jest kwadrat $ABCD$. Przez punkt A przechodzą proste ℓ_1 i ℓ_2, które przecinają odcinki, odpowiednio, BC i CD. Punkty B_1, B_2, D_1, D_2 są rzutami punktów B i D na proste, odpowiednio, ℓ_1 i ℓ_2. Dowieść, że $|B_1B_2| = |D_1D_2|$.
5. Punkty P i Q leżą, odpowiednio, na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym spełniona jest równość $|BP| = |CQ|$. Odcinki BQ i CP przecinają się w punkcie R. Okręgi opisane na trójkątach BPR i CQR przecinają się ponownie w punkcie $S \neq R$. Udowodnić, że punkt S leży na dwusiecznej kąta BAC. *(LXVII Olimpiada Matematyczna)*
6. Punkt C leży na odcinku AB. Prosta ℓ przechodzi przez punkt C oraz przecina okręgi o średnicach AC i BC w punktach, odpowiednio, K i L (różnych od C). Ta sama prosta przecina okrąg o średnicy AB w punktach M i N, przy czym punkty M, K, L, N leżą na niej w tej kolejności. Wykazać, że $|KM| = |LN|$.

Wskazówki do zadań

1. Wystarczy wykazać, że trójkąty AEP i ABR są przystające (kbk). Pomoże w tym fakt, że prosta AE jest styczna do okręgu występującego w zadaniu.
2. Trójkąty AQB i DQC są przystające (bbb). Z tego można wywnioskować, że $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BQC|$.
3. Zachodzi równość $|AB| = |XY|$, gdyż łuk $\widehat{XCY}$ to połowa łuku $\widehat{ACB}$, więc oparty na nim kąt ma miarę $60°$. Środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC – nazwijmy go I – leży na przecięciu odcinków AX i BY. Wystarczy udowodnić, że $\triangle ABI \equiv \triangle YXI$, i wywnioskować tezę z tego, że wysokości tych trójkątów opuszczone z wierzchołka I mają jednakową długość.
4. Zacząć od wykazania, że $\triangle ADD_1 \equiv \triangle BAB_1$ oraz $\triangle ADD_2 \equiv \triangle BAB_2$. Kropkę nad ı stawia przystawanie $\triangle D_1DD_2 \equiv \triangle B_1AB_2$.
5. Dzięki własnościom kątów w okręgu można wykazać, że trójkąty BPS i QCS mają odpowiednie kąty tej samej miary, co w połączeniu z równością $|BP| = |CQ|$ dowodzi ich przystawania. W takim razie odległości punktu S od prostych BP i QC są równe.
6. Niech O, O_1, O_2 będą środkami okręgów o średnicach, odpowiednio, AB, AC, BC. Wystarczy udowodnić, że $|OK| = |OL|$ (dlaczego?), a to wynika z przystawania trójkątów KO_1O i OO_2L.