Klub 44 M

$\sqrt[\otimes]{\oint !} = 44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2023

Zadania z matematyki nr 863, 864

Redaguje Marcin E. KUCZMA

863. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze $p > 2$ takie, że każda z liczb $p + 4k^2$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, p-1$, także jest liczbą pierwszą.

864. Znaleźć liczbę $C > 0$ o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ oraz dla każdego układu liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ spełniającego warunki $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ oraz $x_1 + \ldots + x_n = 0$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \geqslant Cn \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Im większa stała C, tym lepsze rozwiązanie.

Zadanie 864 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 849 ($WT = 2{,}53$) i 850 ($WT = 2{,}92$) z numeru 11/2022

Mikołaj Pater	Opole	47,04
Janusz Olszewski	Warszawa	46,90
Paweł Najman	Kraków	39,93
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Norbert Porwol	Essen	38,01
Radosław Kujawa	Wrocław	37,96
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Szymon Tur		34,18
Piotr Kumor	Olsztyn	30,62

Pan Mikołaj Pater – trzeci raz 44 p. – więc już Weteran. A pan Janusz Olszewski, niestrudzony, po raz kolejny (który to już?) mija magiczną linię 44.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2023

Przypominamy treść zadań:

855. Rozważamy funkcje $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ spełniające warunki: $f(1) = 1$ oraz

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y), \qquad \text{gdy} \quad x, y, x+y \in [0,1].$$

Wyznaczyć najmniejszą liczbę $C > 0$ o tej własności, że dla każdej rozważanej funkcji f ma miejsce oszacowanie: $f(x) \leqslant Cx$ (dla $x \in [0,1]$).

856. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg nieskończony $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ o wyrazach całkowitych dodatnich taki, że każda dodatnia liczba całkowita występuje dokładnie raz w każdym z ciągów $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ oraz $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$, gdzie $d_i = |a_i - a_{i+1}|$.

855. Każda z rozważanych funkcji f jest niemalejąca, bowiem jeśli $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, to

$$f(b) = f(a + b - a) \geqslant f(a) + f(b-a) \geqslant f(a).$$

Skoro więc $f(1) = 1$, to $f(x) \leqslant 1$ dla wszystkich $x \in [0,1]$. Ponadto (biorąc w założeniu $x = y$) widzimy, że $f(2x) \geqslant 2f(x)$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Ustalmy liczbę $x \in (0, \frac{1}{2}]$ i niech n będzie największą liczbą naturalną, dla której $2^n x \leqslant 1$. Wówczas $f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(2x) \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n f(2^n x) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. A ponieważ $2^{n+1}x > 1$, czyli $2x > \left(\frac{1}{2}\right)^n$, dostajemy oszacowanie $f(x) < 2x$ dla $x \in (0, \frac{1}{2}]$. To samo oszacowanie jest słuszne także dla $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ (bo wtedy $f(x) \leqslant 1 < 2x$); zaś dla $x = 0$ mamy $f(0) \geqslant 2f(0)$, skąd $f(0) = 0$. Tak więc

$$f(x) \leqslant 2x \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in [0,1].$$

To znaczy, że stała $C = 2$ ma żądaną własność. Nie można jej zmniejszyć, co pokazuje przykład funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{dla } x \in (\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

dla niej $f(x)/x \to 2$ przy $x \to \frac{1}{2}+$. Zatem $C = 2$ jest najmniejszą liczbą, o którą pyta zadanie.

856. Jest wiele takich ciągów. Przykładowa konstrukcja: $(a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 2)$; więc $(d_1, d_2) = (2, 1)$. Będziemy ciąg przedłużać indukcyjnie, dołączając po trzy elementy. Ustalmy $n \geqslant 1$ i załóżmy, że zostały już określone wyrazy a_i o numerach $i \leqslant 3n$ tak, że (przy określeniu $d_i = |a_i - a_{i+1}|$):

(1) ciągi $(a_1, \ldots, a_{3n})$ oraz $(d_1, \ldots, d_{3n-1})$ są różnowartościowe.

Przyjmijmy dodatkowo, że

(2) każda liczba mniejsza od a_{3n} jest obecna w ciągu $(a_1, \ldots, a_{3n})$

(*liczba* w tym zadaniu znaczy stale: liczba całkowita dodatnia); dla $n = 1$ warunek (2) jest spełniony.

Niech α będzie najmniejszą liczbą różną od $a_1, \ldots, a_{3n}$ i niech δ będzie najmniejszą liczbą różną od $d_1, \ldots, d_{3n-1}$. Z założenia (2) wynika, że $\alpha > a_{3n}$. Wprowadzamy ponadto parametr x (któremu wartość zostanie nadana później). Definiujemy:

(3) $\qquad a_{3n+1} = x, \quad a_{3n+2} = x - \delta, \quad a_{3n+3} = \alpha.$

Aby ciągi $(a_1, \ldots, a_{3n+3})$ i $(d_1, \ldots, d_{3n+2})$ były różnowartościowe, potrzeba i wystarcza, by spełnione były następujące warunki:

$$x \neq a_i, \quad x - \delta \neq a_i \quad (\text{dla } i \leqslant 3n), \quad x \neq \alpha, \quad x - \delta \neq \alpha;$$
$$|a_{3n} - x| \neq d_j, \quad |x - \delta - \alpha| \neq d_j \quad (\text{dla } j \leqslant 3n-1),$$
$$|a_{3n} - x| \neq \delta, \quad |x - \delta - \alpha| \neq \delta, \quad |a_{3n} - x| \neq |x - \delta - \alpha|.$$

Ostatni z wypisanych warunków wymaga w szczególności, by $x - a_{3n} \neq x - \delta - \alpha$; czyli by $a_{3n} \neq \alpha + \delta$; a tak jest, skoro $\alpha > a_{3n}$ (do tego było potrzebne założenie (2)). Każdy z pozostałych warunków eliminuje skończenie wiele możliwych wartości parametru x. Pozostaje nieskończenie wiele liczb (nie wyeliminowanych). Bierzemy jako x (na przykład) najmniejszą z nich. Wzory (3) określają kolejną trójkę wyrazów ciągu (a_i) (więc i ciągu (d_i)); a dzięki wypisanym warunkom zapewniają spełnienie własności (1) z n zastąpionym przez $n+1$. Również własność (2) przenosi się z n na $n+1$, bo $a_{3n+3} = \alpha$.

Przedstawiona procedura generuje nieskończone ciągi (a_i), (d_i). A ponieważ zarówno do jednego, jak i drugiego ciągu była na każdym kroku dołączana najmniejsza liczba nieobecna we wcześniej określonym odcinku ciągu (α oraz δ), gwarantuje to, że w każdym z tych ciągów znajdzie się każda liczba naturalna.