# Co łączy żarłoczną kozę i całki zespolone?

Jerzy PRYGA*

* Doktorant, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Aby odpowiedzieć na pytanie zawarte w tytule, należy zacząć od wyobrażenia sobie kozy wewnątrz okrągłego, ogrodzonego pastwiska. Zwierzę jest bardzo głodne i zje każde źdźbło trawy, do którego dosięgnie. My nie chcemy jednak, żeby kózka zbytnio się przejadła ani aby całkowicie ogołociła nasz trawnik, dlatego przywiązujemy ją sznurkiem do płotu w taki sposób, aby mogła paść się jedynie na pewnej części pastwiska. Pojawia się pytanie: jak dobrać długość sznurka, aby część ta stanowiła dokładnie połowę powierzchni działki? Pytanie z pozoru proste, a jednak do niedawna nie istniała na nie dokładna, według matematycznych standardów, odpowiedź.

## Narodziny legendy

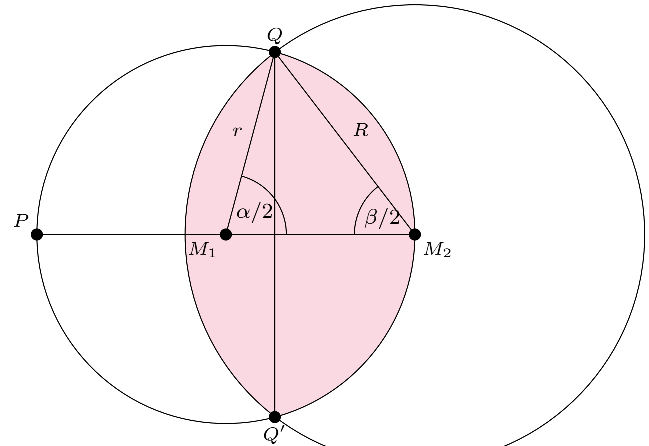
Problem ten określany jest najczęściej *zadaniem z kozą* bądź *geometrycznym problemem kozy*, ale występuje również pod innymi podobnymi nazwami. Obejmuje on zazwyczaj różne warianty tego zagadnienia, które można podzielić na dwie główne kategorie: problem zewnętrzny – zwierzę znajduje się poza pastwiskiem, i problem wewnętrzny – ze zwierzęciem wewnątrz pastwiska. Za początek tej niezwykłej historii w dziejach matematyki uznawane jest ukazanie się w 1748 roku w czasopiśmie *The Ladies' Diary: Or, Woman's Almanack* pytania o pole, na jakim będzie mógł paść się koń uwiązany od zewnętrznej strony okręgu [4]. Przypadek ze zwierzęciem w środku, jednocześnie trudniejszy i ciekawszy (zob. [6]), pojawił się dopiero w 1894 roku w pierwszym wydaniu *American Mathematical Monthly*. Mimo że obecnie najbardziej znanym zwierzęciem występującym w tym problemie jest koza, jako kanon przyjęła się ona dopiero w latach 60. XX wieku. Zawitała też na łamy *Delty* w artykule *Atraktor i koza*, $\Delta^7_{82}$. Powody przewagi popularności kozy nad innymi zwierzętami gospodarskimi są nadal niejasne.

Pomimo swej długiej historii rozwiązanie tego problemu jawnym wzorem ukazało się dopiero w 2020 roku w artykule Ingo Ullischa [5], obecnie pracującego na uniwersytecie w chińskim mieście Chongqing. Rozwiązanie to jest na tyle ciekawe i zaskakująco sprytne, a zarazem proste, że warto mu się bliżej przyjrzeć.

## Problem długości sznurka

Naszą poszukiwaną wielkością jest długość postronka, którym przywiązujemy kozę do płotu. Klasyczne i najbardziej intuicyjne podejścia do tego problemu prowadzą do równań przestępnych, czyli niebędących równaniami liniowymi, kwadratowymi czy ogólnie wielomianowymi. Niestety zazwyczaj nie pozwalają one uzyskać jawnych rozwiązań, i odpowiedzi otrzymuje się wtedy w sposób numeryczny, czyli przybliżony. Spędza to sen z powiek matematycznym purystom. W tym przypadku da się jednak tę trudność w zaskakujący sposób obejść. Zanim do tego dojdziemy, należy wiedzieć, z jakim równaniem przestępnym mamy do czynienia.

Zacznijmy od schematu przedstawionego na rysunku.




Okrąg o środku w punkcie $M_1$ i promieniu $r$ to pastwisko, a punkt $M_2$ to miejsce przywiązania do płotu postronka długości $R$.

Na rysunku widać, że szukane pole jest równe sumie pól dwóch odcinków kół o promieniach kolejno $r$ i $R$. Pierwszy z tych odcinków to obszar na prawo od cięciwy $QQ'$, a jego pole jest różnicą między polem wycinka koła $M_1QQ'$ ($\frac{1}{2}\alpha r^2$) a polem trójkąta $\triangle M_1QQ'$ ($\frac{1}{2}r^2\sin\alpha$). Analogicznie wyraża się pole odcinka po lewej stronie cięciwy $QQ'$, więc przyrównanie do połowy pola koła ($\frac{1}{2}\pi r^2$) prowadzi nas do równania:

$$\frac{1}{2}r^2(\alpha-\sin\alpha)+\frac{1}{2}R^2(\beta-\sin\beta)=\frac{1}{2}\pi r^2. \tag{1}$$

Aby uprościć to równanie, zauważmy, że trójkąt $\triangle M_1M_2Q$ jest równoramienny, a trójkąt $\triangle PM_2Q$ jest prostokątny jako oparty na średnicy. Z tych dwóch faktów wynikają następujące równości:

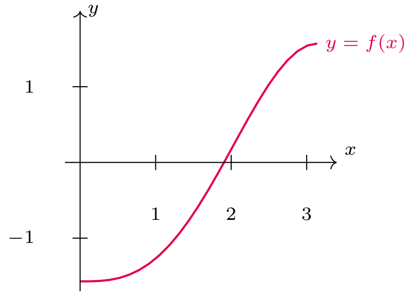
$$\frac{\alpha}{2}+2\cdot\frac{\beta}{2}=\pi,\qquad \cos\frac{\beta}{2}=\frac{R}{2r}. \tag{2}$$

Pierwsza z nich pozwala wyrugować z (1) kąt $\alpha$, a druga promień $R$. Po skorzystaniu ze wzorów na $\sin(2\beta)$ i $\cos(\beta/2)$ równanie (1) upraszcza się do:

$$\sin\beta-\beta\cos\beta-\frac{\pi}{2}=0. \tag{3}$$

Powyższe równanie może nie wyglądać przerażająco, jednak wciąż jest to równanie przestępne. W przeszłości podejmowano wiele mniej lub bardziej udanych prób znajdowania ścisłych rozwiązań takich równań ze względu na ich praktyczne zastosowanie; pojawiały się one mianowicie w wielu problemach inżynieryjnych czy nawet w mechanice kwantowej [1].

Naturalnym odruchem jest spojrzenie na wykres funkcji $f(x) = \sin x - x\cos x - \frac{\pi}{2}$ dla $x \in [0, \pi]$.




Widać, że ma ona miejsce zerowe dla $x \approx 1{,}9$. Możemy się nawet przekonać, że $f(0) = -\frac{\pi}{2} < 0$, $f(\pi) = \frac{\pi}{2} > 0$, a pochodna $f'(x) = x \sin x$ jest dodatnia na przedziale $x \in (0, \pi)$, co uzasadnia, że rzeczywiście istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x_0$. Wartość $x_0$ można przybliżać choćby metodą prób i błędów – na przykład wyznaczenie wartości $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$ mówi nam, że $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Ale jak wyznaczyć $x_0$ jawnym wzorem? Ponieważ konwencjonalne metody zawodzą, w tym momencie kończyła się przygoda większości śmiałków próbujących uporać się z potworną kozą. Do wygrania tego pojedynku potrzebne było wyjście poza schemat.

## Pastwiska część rzeczywista i urojona

Geometria kojarzy się nam jako jedna z bardziej praktycznych i związanych z rzeczywistością dziedzin matematyki. Prawdopodobnie z tego powodu nikomu przez ponad 100 lat nie przyszło do głowy, aby do rozwiązania problemu kozy skorzystać z dorobku analizy zespolonej. Występuje w niej przecież tak abstrakcyjne pojęcie jak liczby urojone, których to próżno szukać na linijce mierzącej długość sznurka. Odrzućmy zatem intuicję i spójrzmy jeszcze raz na równanie, jakie zostało nam do rozwiązania, ale tym razem zamieńmy kąt $\beta$ na bardziej ogólną zmienną zespoloną $z = x + iy$. Przypomnijmy, że $\mathrm{Re}(z) = x$ nazywamy częścią rzeczywistą, a $\mathrm{Im}(z) = y$ częścią urojoną, ponieważ stoi ona przy jednostce urojonej $i$ (spełniającej równość $i^2 = -1$). Teraz interesujące nas równanie można zapisać następująco:

$$f(z) := \sin z - z\cos z - \frac{\pi}{2} = 0. \tag{4}$$

Czytelników nieobeznanych z liczbami zespolonymi może zaniepokoić przyłożenie do nich funkcji trygonometrycznych. Nie wchodząc w szczegóły, ograniczmy się do stwierdzenia, że funkcje sinus i cosinus można rozszerzyć na zbiór liczb zespolonych w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \sin(x + iy) &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\ \cos(x + iy) &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ i $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ są tak zwanymi funkcjami hiperbolicznymi. Dodajmy, że skojarzenie ze wzorami na sinus i cosinus sumy kątów jest zdecydowanie trafione.

Poszukiwany przez nas kąt $\beta$ będzie pierwiastkiem równania (4), czyli taką wartością argumentu $z$, dla której zarówno część rzeczywista, jak i urojona $f$ są równe 0. Spróbujmy najpierw oszacować, w jakim przedziale $x$ i $y$ w ogóle go szukać.

Zdrowy rozsądek podpowiada nam, że rozwiązanie powinno leżeć w przedziale rzeczywistych kątów o wartościach od 0 do $\pi$, ponieważ koza ma ograniczenie w postaci płotu. I rzeczywiście, przekonaliśmy się już, że w tym przedziale istnieje pierwiastek $z_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Co więcej, pochodna zespolona $f'(z_0) = z_0 \sin z_0$ jest niezerowa; dlaczego jest to ważne, okaże się później.

Aby upewnić się, że przy rozszerzaniu dziedziny $f$ nie pojawiły się dodatkowe pierwiastki, ustalmy $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ i przekonajmy się, że część urojona $f(x + iy)$ zeruje się jedynie dla $y = 0$. Jeśli skorzystamy z formuł (5), otrzymamy:

$$\mathrm{Im}\, f(x + iy) = (\cos x + x \sin x) \sinh y - y \cos x \cosh y.$$

Teraz widać, że powyższe wyrażenie zeruje się dla $y = 0$. Aby udowodnić, że dzieje się tak jedynie dla tej wartości $y$, policzmy pochodną tego wyrażenia względem zmiennej $y$:

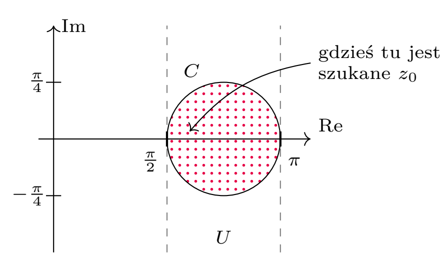
$$x \sin x \cdot \cosh y + (-\cos x) \cdot y \sinh y.$$

Zauważmy, że w interesującym nas przedziale każdy z wyrazów $x \sin x$, $\cosh y$, $-\cos x$, $y \sinh y$ jest nieujemny i pochodna ta jest dodatnia wszędzie poza przypadkiem $x = \pi$, $y = 0$. Wynika z tego, że dla $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ wartość $\mathrm{Im}\, f$ jest rosnąca względem $y$, a zatem zeruje się tylko i wyłącznie dla $y = 0$.

Do osiągnięcia naszego celu pozostało nam zastosować pewne twierdzenie analizy zespolonej.

**Twierdzenie.** Niech $U \subseteq \mathbb{C}$ będzie otwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej, a $g\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ funkcją ciągłą, holomorficzną w $U$. Wówczas dla dowolnej zamkniętej krzywej $C \subseteq \overline{U}$ całka zespolona $\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z$ jest równa zero.

Zanim je zastosujemy, wyjaśnijmy kilka terminów. Przykładem zbioru $U$ może być pas $\left\{x + iy : x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right\}$, i tak odtąd przyjmiemy. Za krzywą $C$ można wtedy przyjąć okrąg o środku w punkcie $\frac{3\pi}{4} \in \mathbb{C}$ i promieniu $\frac{\pi}{4}$.




Pojęcie całki zespolonej wymagałoby dłuższego wprowadzenia, pozostańmy więc przy stwierdzeniu, że jest to wielkość zależna jedynie od wartości $g$ w obcięciu do $C$, a w przypadku wspomnianego okręgu jest to dokładnie

$$\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} g\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}e^{it}\right)\frac{\pi}{4} i\, e^{it}\,\mathrm{d}t.$$

Słowo *holomorficzna* oznacza, że funkcja $g$ jest różniczkowalna w sposób zespolony, czyli dla każdego $z \in U$ istnieje granica $\frac{g(z+h)-g(z)}{h}$ przy $h \to 0$ ($h$ może przy tym przyjmować wartości zespolone, niekoniecznie rzeczywiste). Twierdzenie to zastosujemy w następującej postaci:

**Wniosek.** Niech $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą, holomorficzną w $U$. Załóżmy przy tym, że $f$ ma w $\overline{U}$ dokładnie jeden pierwiastek $z_0$ oraz $f'(z_0) \neq 0$. Wówczas

$$z_0 = \frac{\oint_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{f(z)}}{\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{f(z)}}.$$

Dowód wniosku sprowadza się do zastosowania twierdzenia dla funkcji $g(z) = \frac{z-z_0}{f(z)}$ – założenie o zerowaniu się $f$ służy właśnie temu, by funkcja $g$ była dobrze określona. Całka $\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z$ jest wtedy różnicą całek $\oint_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{f(z)}$ i $\oint_C \frac{z_0\,\mathrm{d}z}{f(z)}$, co po wyjęciu stałej przed całkę pozwala wyznaczyć $z_0$. Pozostaje zauważyć, że nasza funkcja $f$ jest ciągła i holomorficzna, a pozostałe założenia wniosku już zweryfikowaliśmy. Otrzymujemy więc następujące wyrażenie na poszukiwany kąt:

$$\beta = z_0 = \frac{\oint_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{\sin z - z\cos z - \frac{\pi}{2}}}{\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\sin z - z\cos z - \frac{\pi}{2}}}.$$

Skoro $R = 2r\cos(\beta/2)$, zgodnie z równaniem (2), można więc w końcu odpowiedzieć na pytanie zadane na początku artykułu. Proszę Czytelnika o wyobrażenie sobie werbli w tle, ponieważ nadeszła podniosła chwila. Ogłaszam, że długość uwięzi, na której musi znaleźć się koza, wynosi dokładnie:

$$R = 2r\cos\left(\frac{1}{2}\frac{\oint_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{\sin z - z\cos z - \frac{\pi}{2}}}{\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\sin z - z\cos z - \frac{\pi}{2}}}\right).$$

Najprawdopodobniej nikt, kto zadał sobie takie pytanie po raz pierwszy, nie wyobrażał sobie podobnej odpowiedzi. Trzeba przyznać, że nie jest ona najprostsza. Niemniej jednak jest ona jawna, tak jak tego chcieliśmy, i, moim zdaniem, takie rozwiązanie jest dużo ciekawsze i bardziej satysfakcjonujące.

## Co dalej z kozą?

Po tym, co zaprezentowaliśmy wyżej, można by sądzić, że matematycy w końcu okiełznali żarłoczną kozę, która dręczyła ich od ponad wieku. Należy jednak pamiętać, że wyobraźnia ludzka produkuje pytania w dużo szybszym tempie niż odpowiedzi na nie. Pod koniec zeszłego wieku modnym było uogólnianie przypadku zewnętrznego na dowolne krzywe (zamknięte i otwarte) [2]. Kilka lat temu natomiast matematycy zamienili kozę na ptaka, a pastwisko na klatkę, dodając trzeci wymiar do problemu. Okazało się zresztą, że wbrew intuicji uprościło to całe zagadnienie [3]. Spoglądając zatem na przeszłość legendarnej kozy, można śmiało powiedzieć, że ma ona przed sobą jeszcze ciekawą przyszłość.

**Literatura**


[1] John P Boyd. *Solving transcendental equations: the Chebyshev polynomial proxy and other numerical rootfinders, perturbation series, and oracles.* SIAM, 2014.

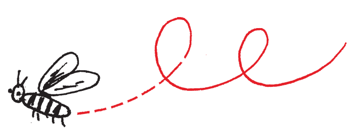
[2] Michael E Hoffman. *The bull and the silo: An application of curvature. The American Mathematical Monthly*, 105(1):55–58, 1998.

[3] Graham Jameson and Nicholas Jameson. *Goats and birds. The Mathematical Gazette*, 101(551):296–300, 2017.

[4] Steve Nadis. *After Centuries, a Seemingly Simple Math Problem Gets an Exact Solution.* quantamagazine.org, 2020. [online; accessed 09.12.2020].

[5] Ingo Ullisch. *A closed-form solution to the geometric goat problem. The Mathematical Intelligencer*, pages 1–5, 2020.

[6] Eric W. Weisstein. *Goat Problem. MathWorld – A Wolfram Web Resource. mathworld.wolfram.com.* [online; accessed 27.02.2023].

# Niebo w czerwcu

W czerwcu Słońce zmienia swoje położenie na niebie o zaledwie 1,5°, gdyż przez cały miesiąc przebywa na północ od równoleżnika +22° deklinacji. I tak 21 czerwca Słońce osiągnie najbardziej na północ wysunięty punkt ekliptyki, a tym samym na naszej półkuli Ziemi rozpocznie się astronomiczne lato. 17 czerwca nastąpi najwcześniejszy wschód Słońca, 25 czerwca zaś najpóźniejszy zachód.

Nasza Gwiazda Dzienna przechodzi płytko pod widnokręgiem, i na przeważającym obszarze kraju da się zauważyć brak nocy astronomicznej, czyli rozświetloną północną część nieboskłonu przez całą noc. Nad samym Bałtykiem Słońce zanurza się pod horyzont mniej niż 12°, i nie zapada tam nawet tzw. zmierzch żeglarski.

Stąd też czerwiec odznacza się największą szansą na możliwość obserwacji tzw. obłoków srebrzystych. Są to wysoko zawieszone chmury typu cirrus oświetlone światłem słonecznym, mimo nocnej pory. Nie należy również zapominać o kolejnym zjawisku związanym z cirrusami, czyli o łuku okołohoryzontalnym (więcej o nim na angielskiej stronie: `www.atoptics.co.uk/cha2.htm`). W przeciwieństwie do obłoków srebrzystych największa szansa na jego dostrzeżenie jest w górach, gdzie Słońce dłużej zajmuje odpowiednią wysokość nad widnokręgiem, umożliwiającą wystąpienie tego zjawiska.

Początek miesiąca także upłynie w jasnym blasku Księżyca, który 4 czerwca nad ranem naszego czasu przejdzie przez pełnię, a jego tarcza pokaże się mniej