Właściwy punkt na właściwym miejscu

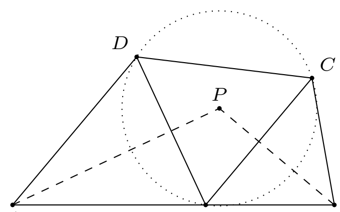
Bartłomiej BZDĘGA
Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Tym razem będzie o zadaniach, w których pojawia się motyw długości jednego odcinka jako sumy długości dwóch innych. Jeżeli mamy jako założenie równość $|AB| + |CD| = |EF|$, to zawsze warto spróbować zaznaczyć na odcinku EF taki punkt X, że $|EX| = |AB|$ – wtedy $|FX| = |CD|$. Inny wariant: jeśli należy wykazać, że $|AB| + |CD| = |EF|$, to po zaznaczeniu takiego punktu X jak wyżej pozostanie do udowodnienia, że $|FX| = |CD|$.

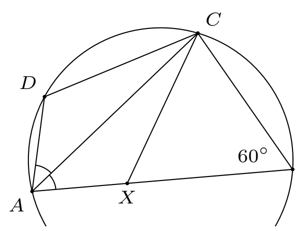
Zaprezentuję opisane powyżej postępowanie na dwóch przykładach. Pierwszy pochodzi z I Wielkopolskiej Ligi Matematycznej, a drugi z XII Olimpiady Matematycznej Juniorów.

Przykład 1. Czworokąt $ABCD$ spełnia warunek $|AB| = |BC| + |DA|$. Dwusieczne kątów ABC i DAB przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że $|CP| = |DP|$.

Rozwiązanie. Wybierzmy na odcinku AB punkt X spełniający warunek $|AX| = |AD|$. Zachodzi wtedy także równość $|BX| = |BC|$ (rys. 1). W tej sytuacji dwusieczne kątów ABC i DAB są jednocześnie symetralnymi odcinków CX i DX. Wnioskujemy zatem, że punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDX, a więc zachodzi równość $|CP| = |DP|$.



Rys. 1



Rys. 2

Przykład 2. Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg, przy czym $|\sphericalangle ABC| = 60°$ oraz $|BC| = |CD|$. Udowodnić, że $|AB| = |AD| + |CD|$.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB|$, ponieważ są to kąty wpisane, oparte na łukach równej długości. Wybierzmy taki punkt X na odcinku AB, że $|AX| = |AD|$ (rys. 2). Chcemy udowodnić, że $|BX| = |CD|$. Trójkąty CAD i CAX są przystające (bkb), więc $|CX| = |CD| = |BC|$. Trójkąt BCX jest równoramienny i ma kąt o mierze $60°$, więc jest równoboczny. Z tego wynika, że $|BX| = |CX| = |CD|$, i dowód jest zakończony.

Zadania

1. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD zachodzi równość $|AB| + |CD| = |AD|$. Udowodnić, że okrąg o średnicy BC ma co najmniej jeden punkt wspólny z odcinkiem AD.
2. W okrąg wpisano czworokąt $ABCD$, w którym $|AB| = |BD|$. Punkt M jest rzutem prostokątnym wierzchołka B na przekątną AC. Wykazać, że $|AM| = |DC| + |CM|$.
3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ wpisany w okrąg. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P, przy czym $|BP| = |AD| + |DC|$. Punkt X leży na odcinku BC, przy czym $|BX| = |AC|$. Dowieść, że $2|\sphericalangle BPX| = |\sphericalangle ADC|$. *(LXXIV Olimpiada Matematyczna)*
4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina bok BC w punkcie D. Dowieść, że $|AI| + |CD| = |AC|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\sphericalangle ABC| = 60° + \frac{1}{3}|\sphericalangle BCA|$. *(LII Olimpiada Matematyczna)*
5. W trójkącie ABC zachodzi nierówność $|AB| > |AC|$. Punkt D jest środkiem boku BC, punkt E leży na odcinku AC. Punkty P i Q są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów B i E na prostą AD. Dowieść, że jeśli $|BE| = |AE| + |AC|$, to $|AD| = |PQ|$. *(XLIX Olimpiada Matematyczna, zmodyfikowane)*

Wskazówki do zadań

1. Weźmy taki punkt X na odcinku AD, że $|AX| = |AB|$. Wtedy $|DX| = |CD|$. Wystarczy wykazać, że $|\sphericalangle BXC| = 90°$.
2. Niech X będzie takim punktem na odcinku AM, że $|MC| = |MX|$. Wtedy $|BC| = |BX|$, skąd można wykazać, że trójkąty CBD i XBA są przystające (bkb).
3. Na odcinku BP można wybrać taki punkt Y, że $|BY| = |AD|$ i $|PY| = |CD|$. Trójkąty XBY i CAD są przystające (bkb).
4. Niech punkt X leżący na odcinku AC spełnia równość $|AI| = |AX|$. Wówczas $|AI| + |CD| = |AC| \iff$ trójkąty DCI i XCI są przystające $\iff$ trójkąty AIX i ABD są podobne $\iff$ $|\sphericalangle ABC| = 60° + \frac{1}{3}|\sphericalangle BCA|$.
5. Wybierzmy taki punkt X na odcinku BE, by zachodziły równości $|AE| = |EX|$ i $|AC| = |BX|$. Niech dodatkowo punkt F będzie symetryczny do C względem A. Trójkąty równoramienne AXE i FBE są podobne, więc $AX \parallel BF$. Prosta AD jest linią środkową w trójkącie FBC, więc $BF \parallel AD$. Z obu równoległości wynika, że punkt X leży na odcinku AD. Teraz wystarczy skorzystać z tego, że przystające odcinki XB i AC są nachylone do prostej AD pod tym samym kątem.