Po przeniesieniu logarytmu na lewą stronę i przejściu z n do granicy ($n \to \infty$) otrzymujemy

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{2j}}{2j} + R_\infty(f, m). \tag{4}$$

Nie poprzestańmy jednak na tym i odejmijmy stronami ostatnie dwie równości:

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln n - \frac{1}{2n} + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{2j}}{2j} \frac{1}{n^{2j}} + (R_\infty(f, m) - R_n(f, m)). \tag{5}$$

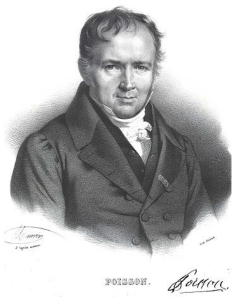
Kładąc w równaniu powyżej $m = 7$ oraz $n = 10$, ignorując resztę $R_\infty(f, m) - R_n(f, m)$ i biorąc pod uwagę tylko skończoną sumę

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6} + \ldots + \frac{1}{12n^{14}},$$

otrzymujemy przybliżenie γ z dokładnością do szesnastego miejsca po przecinku: $\gamma \approx 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,5$. Obliczenie to podał sam Euler.

Naturalne jest pytanie, dlaczego Euler dla uzyskania przybliżenia swojej stałej skorzystał z formuły (5), a nie z prostszej formuły (4). Możemy tu tylko podać kluczowy argument, zawarty w prostym twierdzeniu mówiącym, że *jeżeli* $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + R_m$ *dla każdej liczby naturalnej* m*, a ciąg reszt* R_m *jest ciągiem naprzemiennym, to* $|R_m| \leqslant |a_{m+1}|$.

Dla obliczenia sumy S z żądaną dokładnością należy zatem dobrać stosowny wyraz szeregu $a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \ldots$, na którym kończymy sumowanie. Co nie musi być trywialne, gdy szereg jest *rozbieżny*, a jego wyrazy od pewnego miejsca szybko rosną, tak jak ma to miejsce w przypadku szeregu w formule (5). Widać, że rzecz polega tu na zbalansowaniu wartości B_{2m} szybko rosnącego ciągu liczb Bernoulliego i liczby n^{2m} tak, aby pierwszy odrzucony wyraz szeregu był dostatecznie mały. Okazuje się, że reszta w formule (5) spełnia założenia przytoczonego powyżej twierdzenia. Szczegóły są bardziej złożone [1, 2, 5], z czego Euler zdawał sobie sprawę, ale pierwszym, który bliżej zbadał resztę we wzorze sumacyjnym Eulera – w 1823 roku – był Siméon Poisson.



Siméon Poisson (1781–1841)

Bibliografia

[1] Ernst Hairer, *Analysis by Its History*, Springer, 1996.
[2] Godfrey H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford University Press, 1949.
[3] Julian Havil, *Gamma. Exploring Euler's constant*, Princeton University Press, 2003.
[4] David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics*, Dover Publications, 2012.
[5] David J. Pengelley, *Dances between continuous and discrete: Euler's summation formula*, in *Euler at 300: An Appreciation*, Mathematical Association of America, 2007, pp. 169-190, `https://arxiv.org/abs/1912.03527`
[6] Augusta Ada Lovelace, Note G in `https://www.fourmilab.ch/babbage/sketch.html`
[7] Raymond Flood, *Charles Babbage and Ada Lovelace*, `https://youtu.be/1TprEGyo9ts`
[8] Burkard Polster (Mathologer), *Power sum MASTER CLASS: How to sum quadrillions of powers... by hand! (Euler-Maclaurin formula)*, `https://youtu.be/fw1kRz83Fj0`

Nie ma problemu!

*Paweł Rafał BIELIŃSKI**

* Nauczyciel matematyki, Warszawa

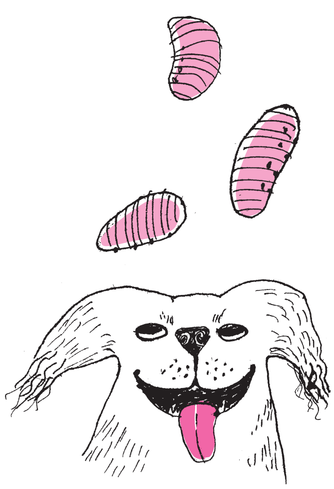
W tym artykule zajmiemy się trzema zadaniami na poziomie starszych klas szkoły podstawowej. Dotyczą one zupełnie różnej tematyki, a jednak – jak się przekonamy – mają znacznie więcej wspólnego, niż się na pierwszy rzut oka wydaje. Zachęcamy Czytelnika do zmierzenia się z nimi przed przeczytaniem zaproponowanych rozwiązań i dalszej analizy.

Zadania

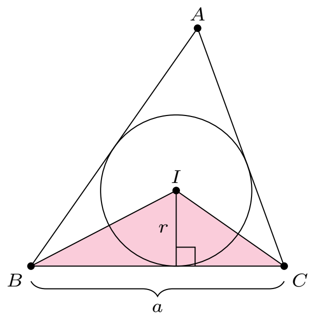
1. Kule w urnie. W urnie znajduje się pewna liczba kul, z których każda jest albo zielona, albo czerwona, albo niebieska. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia z urny kuli zielonej wynosi 0,55, a czerwonej 0,35. Natomiast kul niebieskich jest dokładnie 5. Ile kul znajduje się w urnie?

2. Pole, obwód, okrąg. Jaki jest promień okręgu wpisanego w trójkąt, którego pole wynosi $100\sqrt{3}$, a obwód $30\sqrt{3}$?

3. Siódemka. Na wyjątkowo szerokiej tablicy zapisano pewną listę. W pierwszej linijce zapisano liczbę 7^{2022} w postaci dziesiętnej. W drugiej linijce zapisano sumę jej cyfr; w trzeciej sumę cyfr liczby zapisanej w drugiej linijce i tak dalej. Pisano tak długo, aż w pewnej linijce pojawiła się liczba dziesięciocyfrowa. Czy jest możliwe, że w jej zapisie pojawiają się wszystkie cyfry?



Rozwiązania



Znane twierdzenie mówi, że promień poprowadzony ze środka okręgu wpisanego I do punktu styczności z prostą BC jest do tej prostej prostopadły, a więc stanowi wysokość trójkąta BCI. Dlatego pole trójkąta BCI wynosi $P_{BCI} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot a$; analogicznie dla CAI oraz BAI.

1. Kule zielone i czerwone stanowią łącznie $55\% + 35\% = 90\%$ wszystkich kul w urnie. Zatem kule niebieskie stanowią pozostałe 10%, a stąd wynika, że wszystkich kul jest $5 : 10\% = 50$.

2. Przyjmijmy w badanym trójkącie standardowe oznaczenia: jego wierzchołkami będą punkty A, B, C, a środkiem okręgu wpisanego punkt I. Dalej, niech $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ i niech r będzie długością promienia okręgu wpisanego. Pole trójkąta ABC wyznaczamy jako sumę pól trzech mniejszych trójkątów (zob. wyjaśnienie pod rysunkiem):

$$P_{ABC} = P_{BCI} + P_{CAI} + P_{ABI} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2}.$$

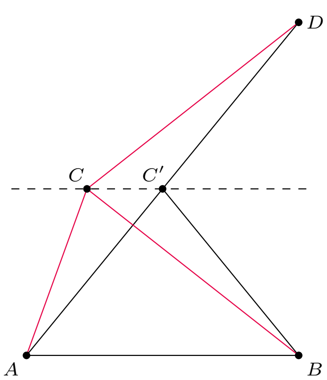
Oznaczając literą p połowę obwodu, to jest wielkość $\frac{a+b+c}{2}$, otrzymujemy związek określany żartobliwie *wzorem woźnicy*: $P = pr$. Teraz pozostaje nam obliczyć $r = \frac{P_{ABC}}{p} = \frac{100\sqrt{3}}{15\sqrt{3}} = \frac{20}{3}$.

3. Wykażemy, że jest to niemożliwe. Znana cecha podzielności przez 3 orzeka, że liczba naturalna jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3. Ponieważ 3 jest liczbą pierwszą, a 7 nie jest przez nią podzielne, więc 7^{2022} także nie dzieli się przez 3. Wynika stąd, że żadna z liczb na omawianej liście nie jest podzielna przez 3. Wystarczy teraz zauważyć, że jeśli w zapisie liczby dziesięciocyfrowej występuje każda cyfra, to każda musi wystąpić dokładnie raz. Suma cyfr takiej liczby wynosi więc $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 = 3 \cdot 15$. Wykazaliśmy jednak, że liczba podzielna przez 3 nie może pojawić się na omawianej liście. W takim razie zapis badanej liczby nie może używać każdej cyfry.

Czy na pewno?

Przyjrzyjmy się otrzymanym wynikom raz jeszcze, w sposób nieco bardziej krytyczny.

1. Jeżeli w urnie znajdowało się 50 kul, to kul zielonych jest $0{,}55 \cdot 50 = 27{,}5$, a czerwonych $0{,}35 \cdot 50 = 17{,}5$. To jest jednak niemożliwe.



Załóżmy, że D jest odbiciem B względem pewnej prostej l równoległej do AB i przechodzącej przez punkt C. Niech C' będzie punktem przecięcia odcinka AD z prostą l. Wówczas z równości $BC' = C'D$, $BC = CD$ oraz z nierówności trójkąta dla ACD wnioskujemy, że $AC + BC \geqslant AD = AC' + BC'$. Nietrudne obliczenia na kątach dowodzą zaś, że trójkąt ABC' jest równoramienny.

2. Wykażemy, że taki trójkąt nie istnieje, ponieważ w dowolnym trójkącie jego obwód l i pole P spełniają nierówność $l^2 \geqslant 16P$, która nie jest spełniona dla $P = 100\sqrt{3}$ i $l = 30\sqrt{3}$.

Szkic dowodu. Ustalmy pole P oraz długość podstawy $AB = 2s$. Ze wzoru na pole trójkąta wynika, że C leży na prostej równoległej do AB i odległej od niej o $h = P/s$. Klasyczny argument z symetrią (wyjaśnienie na marginesie) pokazuje, że wśród punktów C leżących na tej prostej sumę $AC + BC$ minimalizuje taki, dla którego $AC = BC$. W takim przypadku z użyciem twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć kwadrat obwodu danego trójkąta, a następnie oszacować go z dołu. Otrzymujemy

$$l^2 = \left(2s + 2\sqrt{s^2 + (P/s)^2}\right)^2 \geqslant 4 \cdot 2s \cdot 2\sqrt{s^2 + (P/s)^2} = 16\sqrt{s^4 + P^2} \geqslant 16P,$$

korzystając najpierw z nierówności $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, a następnie z monotoniczności pierwiastka.

Z użyciem komputera można się przekonać, że liczba 7^{2022} ma około 1700 cyfr, a ich suma to w przybliżeniu 7600.

3. Początkowa liczba, 7^{2022}, jest ogromna. Zastanówmy się jednak, jak ogromna. Jasne jest, że $7 \cdot 7 = 49 > 10$, a zatem $7^{2022} > 10^{1011}$, a więc już pierwsza liczba na naszej liście ma więcej niż 1000 cyfr.

Z drugiej strony jasne jest, że $7 < 10$, a stąd $7^{2022} < 10^{2022}$. Ta druga liczba jest najmniejszą liczbą 2023-cyfrową, zatem 7^{2022} ma co najwyżej 2022 cyfry. Ale to oznacza, że suma jej cyfr wynosi nie więcej niż $9 \cdot 2022 = 18\,198$, w szczególności sama ma nie więcej niż 5 cyfr. Łącząc powyższe uwagi, wnioskujemy, że na opisanej w zadaniu liście nie pojawia się żadna liczba dziesięciocyfrowa.

Jak interpretować te wnioski? W przypadku zadania **1** wniosek jest jasny: tak postawiony problem nie ma rozwiązania, tzn. żadna liczba nie spełnia wszystkich postawionych warunków. W szczególności należy skonkludować, że pierwsze przedstawione rozwiązanie jest niepoprawne, a przynajmniej niekompletne. Wywnioskowaliśmy w nim jedynie, że żadna liczba inna niż 50 nie spełnia warunków zadania. Wkrótce okazało się, że nawet ona ich nie spełnia. Głębsze rozterki budzą zadania **2** i **3** Czy jest sens rozważać własności obiektów, które nie istnieją? Wydaje się, że tak: wszak inaczej nie moglibyśmy chociażby stwierdzić, że te własności są sprzeczne. Problem nie leży więc w naszych rozważaniach, a gdzieś w treści zadania. Pytanie, nie będąc zdaniem logicznym, nie może być niepoprawne czy fałszywe. Co innego zawarte w treściach założenia: w zadaniu **2** to, że istnieje trójkąt o podanych parametrach; w zadaniu **3** to, że na opisanej liście występuje liczba dziesięciocyfrowa.

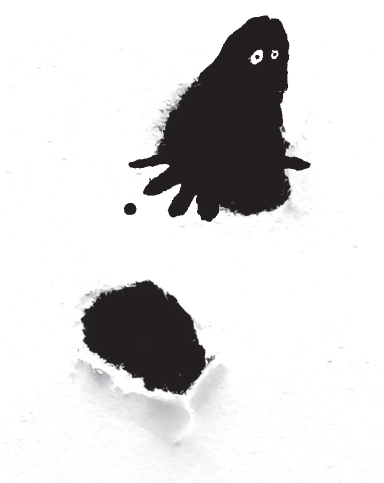
Zadania do samodzielnego rozwiązania

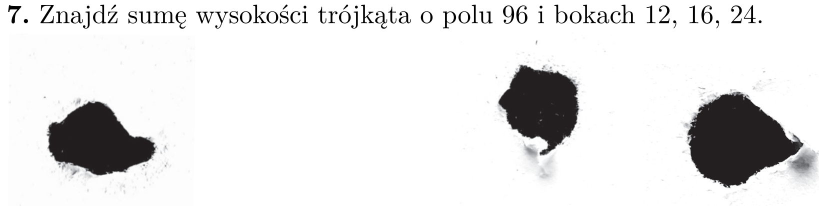
4. W zaczarowanym lesie mieszkają krasnoludki, a każdy z nich nosi czapkę w jednym z czterech kolorów: niebieskim, zielonym, czerwonym albo białym. Krasnali, których czapka nie jest niebieska, jest 14; tych, których czapka nie jest zielona, jest 16; tych, których czapka nie jest czerwona, jest 24; wreszcie czapki 12 krasnali nie są białe. Ile krasnoludków żyje w zaczarowanym lesie?

5. Na moim parapecie rosną różne rośliny, każda we własnej doniczce. Spośród wszystkich doniczek 1/3 zawiera storczyki, 1/4 – paprocie, a 1/6 – kaktusy. W pozostałych 4 doniczkach rosną bławatki. Ile doniczek mam na parapecie?

6. Jakie długości mogą mieć boki trójkąta równoramiennego, jeśli jego obwód ma długość 45 cm, a jeden z boków 23 cm?

7. Znajdź sumę wysokości trójkąta o polu 96 i bokach 12, 16, 24.





Dlaczego warto badać teorie wykraczające poza Ogólną Teorię Względności?

*Sreekanth HARIKUMAR**

* Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Ogólna Teoria Względności (którą w dalszej części artykułu będziemy nazywać po prostu OTW) opracowana przez Alberta Einsteina w roku 1915 jest obecnie obowiązującym opisem grawitacji we współczesnej fizyce. W ciągu ostatnich 100 lat doprowadziła nas do odkrycia wielu tajemnic Wszechświata. Jednak wśród fizyków teoretyków wciąż rośnie zainteresowanie poszukiwaniem alternatyw dla OTW. Motywacją dla tych poszukiwań są otwarte problemy fizyki, takie jak: próby wyjaśnienia natury ciemnej materii i ciemnej energii, niezgodność OTW z fizyką kwantową czy też istnienie tzw. osobliwości, o których będzie mowa w dalszej części tego artykułu.

Problem ciemnej materii

Badanie krzywych rotacji miało na celu „zważenie” galaktyki. Zgodnie z prawem ciążenia Newtona (które jest dobrym przybliżeniem OTW dla słabych pól grawitacyjnych i prędkości małych w porównaniu z prędkością światła), gdy gwiazda o masie m porusza się wokół centrum galaktyki po orbicie kołowej o promieniu r, siła ciążenia równoważy się z siłą odśrodkową: $\frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$. Stąd jej prędkość rotacji wynosi: $v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$, gdzie $M(r)$ oznacza całkowitą masę zawartą wewnątrz promienia r orbity. Masa ta rośnie oczywiście z promieniem, rośnie też prędkość rotacji, aż do promienia r_0, gdy możemy przyjąć, iż praktycznie cała masa galaktyki jest zawarta wewnątrz $M(r_0) \approx M_{\mathrm{tot}}$. Wówczas gwiazdy peryferyjne powinny poruszać się z prędkościami malejącymi jak $1/\sqrt{r}$, a prędkość maksymalna v_0 wyznaczy nam masę galaktyki. Taki był pomysł Very Rubin.

Zacznijmy od problemu ciemnej materii. Obserwacje prowadzone przez Verę Rubin pod koniec lat 60. ubiegłego wieku wykazały, że prędkości rotacji gwiazd (czyli prędkości, z jakimi obiegają one centrum Galaktyki) są niezgodne z tym, czego oczekujemy, biorąc pod uwagę oddziaływanie grawitacyjne materii świecącej. Gwiazdy na peryferiach Galaktyki poruszają się zbyt szybko. Przewidywaną przez teorię krzywą prędkości jest krzywa **A** zaznaczona na rysunku 1. Ilustruje ona sytuację, w której obiekty po osiągnięciu prędkości maksymalnej v_0 w pewnej odległości r_0 od środka galaktyki zaczynają spowalniać wraz z odległością od środka układu. Jednak to, co zaobserwowała Vera Rubin, to stała wartość prędkości v dla odległości większych od r_0. Obserwacje badaczki ilustruje płaska krzywa prędkości **B** zaznaczona na