Średnie

Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

W arsenale każdego szanującego się olimpijczyka powinny znajdować się następujące nierówności, prawdziwe dla liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \overset{(1)}{\geqslant} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \overset{(2)}{\geqslant}$$

$$\overset{(2)}{\geqslant} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \overset{(3)}{\geqslant} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Wartości wyrażeń nazywamy kolejno (od lewej do prawej) średnią: kwadratową, arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną. Będziemy je krótko oznaczać odpowiednio: K, A, G, H, o ile wiadomo, których liczb średnią mamy na myśli.

Aby wykazać powyższe nierówności, posłużymy się twierdzeniami z poprzedniego kącika (*Wszystko w porządku*, Δ^3_{23}): nierównością Czebyszowa oraz twierdzeniem o ciągach przeciwnie uporządkowanych.

(1) Ciąg (x) jest zgodny monotonicznie z samym sobą, więc z nierówności Czebyszowa otrzymujemy $\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2$, co po obustronnym spierwiastkowaniu daje $K \geqslant A$.

(2) Najpierw wykażemy, że jeśli iloczyn n liczb dodatnich jest równy 1, to ich suma wynosi co najmniej n. Możemy oznaczyć te liczby przez $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_n}{a_1}$ dla pewnych $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)$ są uporządkowane przeciwnie, więc

$$n = a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{a_n} \leqslant$$

$$\leqslant a_1 \cdot \frac{1}{a_2} + a_2 \cdot \frac{1}{a_3} + \ \ldots + a_n \cdot \frac{1}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}.$$

Możemy już przejść do dowodu nierówności $A \geqslant G$. Dla liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mamy $\frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{G} = 1$, więc $\frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \ldots + \frac{x_n}{G} \geqslant n$, co po obustronnym pomnożeniu przez $\frac{G}{n}$ kończy dowód.

(3) Gdy w nierówności $A \geqslant G$ zastąpimy wszystkie liczby ich odwrotnościami, to otrzymamy $\frac{1}{H} \geqslant \frac{1}{G}$, czyli $G \geqslant H$.

Zadania

1. Udowodnić, że $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$ dla $a, b, c > 0$.
2. Wykazać, że $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} > 1$ dla n całkowitych dodatnich.
3. Wykazać, że $(a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a})(a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b}) \geqslant 9abc$ dla $a, b, c > 0$.
4. Dowieść, że dla n całkowitych dodatnich oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$ zachodzi nierówność $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} + \sqrt[n]{y_1 y_2 \ldots y_n} \leqslant \sqrt[n]{(x_1+y_1)(x_2+y_2)\ldots(x_n+y_n)}$ (nierówność Mahlera).
5. Wykazać, że $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3$ dla a, b, c będących długościami boków trójkąta.
6. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Udowodnić, że $\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leqslant 2$.
7. Niech $a, b, c > 0$ oraz $a + b + c = 1$. Dowieść, że $\sqrt{a-bc} + \sqrt{b-ca} + \sqrt{c-ab} \leqslant \sqrt{2}$, o ile liczby pod pierwiastkami są nieujemne.
8. Dowieść, że $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$ dla naturalnych $n \geqslant 2$.
9. Wykazać, że $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ dla naturalnych n oraz rzeczywistych $x > -\frac{1}{n}$ (nierówność Bernoulliego).

Wskazówki do zadań

1. $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$.
2. Zastosować nierówność $H \leqslant A$ dla liczb $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{3n}$.
3. Każdy z nawiasów można oszacować od dołu przez $3\sqrt{abc}$ dzięki nierówności $A \geqslant G$.
4. Podzielić obustronnie nierówność przez całą prawą stronę, a następnie dwukrotnie skorzystać z nierówności $G \leqslant A$.
5. Podstawienie $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ znacznie ułatwia zadanie.

Ciekawostka. Liczby $a, b, c > 0$ są długościami boków trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby dodatnie x, y, z, że $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Dowód ($\Leftarrow$) jest natychmiastowy, a dowód ($\Rightarrow$) można przeprowadzić geometrycznie. Niech D, E, F będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC odpowiednio do boków BC, CA, AB (o długościach a, b, c). Wtedy $|AE| = |AF|$, $|BF| = |BD|$ i $|CD| = |CE|$ są poszukiwanymi x, y, z.

6. $a + bc = a(a+b+c) + bc = (a+b)(a+c)$.
7. Zastosować nierówność $A \leqslant K$ dla każdej pary składników sumy z lewej strony. Pomocna może okazać się równość $a - bc + b - ca = (1-c)^2$ i dwie analogiczne.
8. Zastosować nierówność $G \leqslant A$ dla liczb $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}$.
9. Wykorzystać nierówność $A \geqslant G$ dla liczb $1 + nx, 1, 1, \ldots, 1$ (jedynek jest $n - 1$).

Ciekawostka. Nierówność Bernoulliego prawdziwa jest dla wszystkich $x > -1$. Lukę pomiędzy -1 i $-\frac{1}{n}$ uzupełnić jest nietrudno: w tym przypadku mamy $(1+x)^n > 0 \geqslant 1 + nx$.