Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2023

Regulamin Ligi znajduje się
na naszej stronie: deltami.edu.pl

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
744 ($WT = 2{,}7$), 745 ($WT = 3{,}85$)
z numeru 10/2022

Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	4–38,33
Jan Zambrzycki	Białystok	3–36,74
Jacek Konieczny	Poznań	33,42
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2–33,14

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
845 ($WT = 2{,}41$) i 846 ($WT = 1{,}17$)
z numeru 9/2022

Stanisław Bednarek	Łódź	43,77
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,81
Mikołaj Pater	Opole	41,88
Krzysztof Zygan	Lublin	41,84
Paweł Najman	Kraków	39,93
Janusz Olszewski	Warszawa	38,46
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Norbert Porwol	Essen	37,50
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Radosław Kujawa	Wrocław	35,83

Wielkie zagęszczenie tuż przed linią mety!

Zadania z matematyki nr 859, 860

Redaguje Marcin E. KUCZMA

859. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć liczbę słów długości n, tworzonych z symboli A, B i mających następującą własność: w każdym spójnym odcinku słowa liczba wystąpień symbolu A różni się od liczby wystąpień symbolu B co najwyżej o 2.

860. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(xf(y)) = xf(y) + yf(x) \qquad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 860 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2022

Przypominamy treść zadań:

851. Marcin urządza spotkanie towarzyskie. Zamierza zaprosić 50 gości z szerokiego grona osób, w którym niektórzy znają się wzajemnie, inni nie. Marcin uważa trójkę ludzi za atrakcyjną towarzysko, gdy jest w niej jakaś para znajomych, a także jakaś para nieznajomych. Ma chęć, by ten „warunek atrakcyjności” spełniało co najmniej 75% spośród wszystkich $\binom{50}{3}$ trójek gości. Jaka jest najmniejsza liczba par znajomych (w owej pięćdziesiątce), przy której to nietypowe życzenie daje się zrealizować?

852. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$ oraz liczba rzeczywista a, przy czym $a \neq n-1$. Niech $z_1, \ldots, z_n$ będą zespolonymi pierwiastkami wielomianu $z^n - nz + a$. Wykazać, że

$$\frac{1}{z_1 - 1} + \ldots + \frac{1}{z_n - 1} = 0.$$

851. To oczywiście graf prosty o wierzchołkach $1, \ldots, n$ (tu $n = 50$). Gdy z wierzchołka i wychodzi k_i krawędzi ($i = 1, \ldots, n$), łączna liczba krawędzi wynosi $q = \frac{1}{2}\sum k_i$; stąd:

(1) $$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \geqslant \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i\Big)^2 = \frac{4}{n}\,q^2$$

(średnia kwadratowa i arytmetyczna).

Przedmiotem dociekań są trójki wierzchołków, w których dokładnie jedna para jest połączona krawędzią lub są dokładnie dwie takie pary. Niech t będzie liczbą trójek o tej własności. Zadanie Marcina to wyznaczenie najmniejszej możliwej wartości q przy ograniczeniu:

(2) $$t \geqslant \frac{3}{4}\binom{n}{3}.$$

Każda taka trójka (nieuporządkowana) wyznacza *dokładnie dwie* uporządkowane trójki numerków (i, j, k) takie, że ij jest krawędzią grafu, zaś ik nie jest (to kluczowe spostrzeżenie). I na odwrót: każda uporządkowana trójka (i, j, k) o tych własnościach jest – po odrzuceniu uporządkowania – jedną z „trójek Marcina”. Dla ustalonego i liczba uporządkowanych par (j, k), pasujących do tego schematu, wynosi $k_i(n-1-k_i)$. To pozwala na zliczenie wszystkich takich (nieuporządkowanych) trójek:

(3) $$t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i(n-1-k_i) = (n-1)q - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i^2.$$

Zestawienie zależności (3), (1), (2) daje nierówność:

$$(n-1)q - \frac{2}{n}\,q^2 \geqslant \frac{3}{4}\binom{n}{3}.$$

Stąd:

(4) $$q^2 - \frac{n(n-1)}{2}\,q + \frac{n^2(n-1)(n-2)}{16} \leqslant 0.$$

Pierwiastkami tego trójmianu kwadratowego są liczby $\frac{n}{4}\big(n - 1 \pm \sqrt{n-1}\big)$. Zatem spełnienie warunku (2) (więc i (4)) pociąga dolne oszacowanie:

(5) $$q \geqslant \frac{n}{4}\big(n - 1 - \sqrt{n-1}\big).$$

Uzyskanie równości w (5) wymaga, by zachodziła równość w relacji (1), co ma miejsce, gdy $k_1 = \ldots = k_n$. Dla $n = 50$ oszacowanie (5) przybiera postać $q \geqslant 525$ i staje się równością, gdy wspólna wartość stopni k_i wynosi $2q_{\min}/50 = 21$. Tylko czy taki graf istnieje?

Przykładowa realizacja: w grafie o wierzchołkach $1, \ldots, 50$ przyjmijmy, że:

$$ij \text{ jest krawędzią} \iff \begin{bmatrix} i, j \leqslant 28 \\ i \not\equiv j \pmod 4 \end{bmatrix} \text{ lub } \big[i, j > 28\big].$$

Tu każdy wierzchołek o numerze $\leqslant 28$ łączy się z pozostałymi 27 wierzchołkami o numerach $\leqslant 28$, z wyjątkiem sześciu; zaś wierzchołki o numerach > 28 tworzą klikę liczności 22. Tak więc każdy wierzchołek ma stopień 21 (i $q = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 21 = 525$).

852. Oznaczmy: $w_j = 1/(z_j - 1)$ dla $j = 1, \ldots, n$. Ponieważ $a \neq n-1$, liczba 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu $P_n(z) = z^n - nz + a$, dzięki czemu liczby w_j są dobrze określone; należy wykazać, że ich suma jest równa zeru. Skoro $z_j = (w_j + 1)/w_j$, liczby $w_1, \ldots, w_n$ spełniają równanie $P_n((w+1)/w) = 0$, czyli (po pomnożeniu przez w^n) – równanie:

$$Q_n(w) = (w+1)^n - n(w+1)w^{n-1} + aw^n = 0.$$

Q_n jest wielomianem stopnia n, bowiem współczynnik przy w^n wynosi $1 - n + a \neq 0$. Liczby $w_1, \ldots, w_n$ są wszystkimi jego pierwiastkami. Ich suma, pomnożona przez $(1 - n + a)$, jest równa współczynnikowi przy w^{n-1} (w wielomianie Q_n); ten zaś współczynik jest równy zeru, co dowodzi tezy zadania.