Leibniz i twierdzenie o wielościanach

*Grzegorz ŁUKASZEWICZ**

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

René Descartes (Kartezjusz), 1596–1650

Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716

Leonhard Euler, 1707–1783

> Mam nadzieję, że potomni życzliwie mnie osądzą, nie tylko co do tych rzeczy, które wyjaśniłem, ale i do tych, które celowo pominąłem, aby pozostawić innym przyjemność odkrywania.
>
> Kartezjusz, *Geometria*

Celem tego artykułu jest przedstawienie ciekawej historii twierdzenia Eulera o wielościanach, nazywanego też od pewnego czasu twierdzeniem Kartezjusza–Eulera o wielościanach. Właśnie, dlaczego Kartezjusza–Eulera? I co ma wspólnego z tym twierdzeniem tytułowy Leibniz?

Bohaterem artykułu jest następujące twierdzenie o wielościanach.

Jeżeli V, E i F oznaczają, odpowiednio, liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian danego wielościanu, to zachodzi następująca równość:

$$F + V - E = 2.$$

Oczywiście należy dokładnie określić, co rozumiemy przez wielościan, albowiem różne definicje wielościanu prowadzą do pojawienia się różnego rodzaju kontrprzykładów na prawdziwość twierdzenia, co zostało znakomicie opisane w głośnej pracy doktorskiej Imre Lakatosa z 1961 roku, opublikowanej nieco później pod tytułem *Proofs and refutations*, a w polskim tłumaczeniu jako *Dowody i refutacje* [4]. Szersze omówienie twierdzenia można znaleźć w [6]. Zgodnie z powiedzeniem *koń, jaki jest, każdy widzi*, my pozostaniemy przy zwykłych wyobrażeniach wielościanów jako brył wypukłych ograniczonych płaszczyznami. Rodzina taka zawiera m.in. wszystkie bryły platońskie, a powyższa formuła jest dla niej prawdziwa.

Kartezjusz badał wielościany, a rezultaty tych badań zawarł w nieopublikowanym manuskrypcie *De solidorum elementis*. Znajduje się tam twierdzenie bardzo bliskie powyższemu twierdzeniu. Zawartość manuskryptu dotarła do współczesności pośrednio, dzięki zachowanej kopii, która została na nowo odczytana i precyzyjnie zanalizowana dopiero w latach osiemdziesiątych dwudziestego wieku. Historia jest następująca.

Uważa się, że Kartezjusz napisał *De solidorum elementis* najprawdopodobniej w latach 1619–1623, a więc w młodości (choć podawane są też inne daty, 1630, a nawet 1639); praca ta pozostała jednak w jego prywatnych zbiorach aż do śmierci. Zmarł w Sztokholmie 11 lutego 1650 roku, dokąd przybył w październiku 1649 roku na zaproszenie królowej Krystyny, aby służyć jej jako osobisty nauczyciel filozofii.

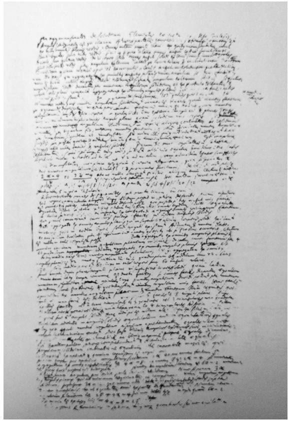
W roku 1653 Pierre Chanut (1601–1662) – ambasador Francji w Szwecji i zaufany Kartezjusza – wysłał manuskrypty Kartezjusza swojemu szwagrowi, Claude'owi Clerselierowi (1614–1684), do Paryża. Clerselier był przyjacielem Kartezjusza, a także wydawcą i tłumaczem jego prac. Dotarły one do niego po niemałych perypetiach. W Rouen kufer z manuskryptami został przeładowany ze statku na łódź, która miała dostarczyć go na miejsce. Pech chciał, że łódź zatonęła w Sekwanie już prawie u celu. Papiery namakały w wodzie przez trzy dni. Gdy w końcu je wyłowiono, zostały rozłożone i wysuszone, a posegregowanie ich, ponowne złożenie w całość i odczytanie wymagało od Clerseliera dużego nakładu pracy.

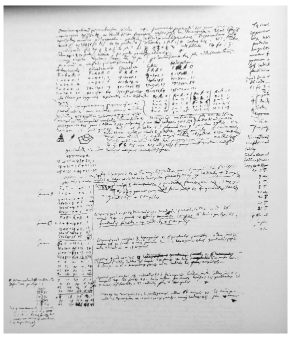
W 1672 roku w pewnej misji dyplomatycznej, a także aby pobierać dalsze nauki, do Paryża przybył 26-letni Leibniz. Pod opieką Christiaana Huygensa (1629–1695) zrobił niewiarygodnie szybkie postępy w matematyce, które wkrótce zaowocowały sformułowaniem rachunku różniczkowego i całkowego. Leibniz, podobnie jak wielu innych, był zafascynowany Kartezjuszem i zbierał jego wszystkie dostępne dzieła, poszukiwał również tych nieopublikowanych. Wówczas Huygens skierował go do Clerseliera.

Rozwiązanie zadania M 1742.
Liczby $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ i $(x-d)$ są całkowite i ich iloczyn jest równy 4. Wobec tego ich wartości bezwzględne są równe 1, 1, 1, 4 lub 1, 1, 2, 2 (w pewnej kolejności). Jednakże wśród dowolnych trzech liczb są dwie, które mają ten sam znak, stąd w pierwszym przypadku dwie liczby byłyby równe – oznaczałoby to, że dwie liczby spośród a, b, c i d są równe – sprzeczność.
Zatem moduły rozważanych liczb są równe 1, 1, 2, 2. Podobnie jak wyżej, uwzględniając, że a, b, c i d są parami różne, widzimy, że liczby $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ i $(x-d)$ są równe $+1, -1, +2, -2$ w pewnej kolejności. Jednakże wtedy

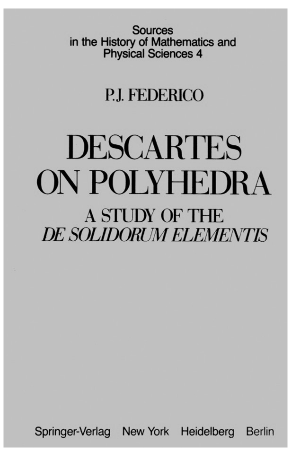
$$(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d) = \\ = (+1)+(-1)+(+2)+(-2) = 0,$$

skąd szybko dostajemy tezę.

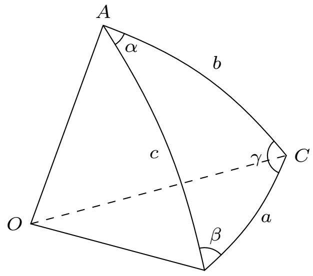




Facsimile pierwszych stron kopii *De solidorum elementis*



Okładka książki P.J. Federico



Kąt bryłowy $OABC$ i kąty płaskie, AOB, AOC, BOC, przy wierzchołku O

Ciekawy jest domniemany wątek osobisty zafascynowania Leibniza pracami Kartezjusza. Mogło tu chodzić o pewną zazdrość, gdyż obu interesowało wiele tych samych tematów, a wypowiadane były opinie, że Leibniz w swoich pracach z rachunku różniczkowego i całkowego nie dodał wiele do tego, co na ten temat napisał wcześniej Kartezjusz. Wrażliwy Leibniz mógł mieć zatem dodatkowy powód, aby poszukiwać wszystkiego, co wyszło spod pióra wielkiego Francuza.

W czerwcu 1676 roku Leibniz udał się do Clerseliera, który pozwolił mu zrobić odręczne kopie manuskryptów. W dniach 1–3 czerwca Leibniz przepisał w pośpiechu te najbardziej go interesujące, w tym *De solidorum elementis*. Sam oryginał tego manuskryptu zaginął jakiś czas potem i nigdy nie został odnaleziony. Uważa się jednak, że kopia Leibniza stanowi w zasadzie całość oryginalnego manuskryptu Kartezjusza, z niewielkimi tylko opuszczonymi fragmentami.

Po śmierci Leibniza, w 1716 roku, jego zapiski trafiły do archiwów Królewskiej Biblioteki w Hanowerze. Kopię manuskryptu *De solidorum elementis* odnalazł tam w roku 1860 hrabia Louis-Alexandre Foucher de Careil (1826–1891) wśród nieskatalogowanych papierów Leibniza, w jakimś zaułku, pokrytą wiekowym kurzem. Od tego czasu publikowano różne wersje kopii Leibniza, zarówno w oryginalnej wersji łacińskiej, jak i w tłumaczeniu na język francuski. Były one raczej mało zadowalające i niedostatecznie zredagowane. Tekst był bowiem trudny do odczytania i, jak to kopie robione w pośpiechu, zawierał skróty, niezrozumiałe uwagi, być może drobne przekłamania, mało czytelne szkice figur geometrycznych itp., a co najważniejsze, jego pełna matematyczna treść opierała się zrozumieniu wydawców. Nic dziwnego, gdyż oryginalny manuskrypt Kartezjusza nie był wersją do publikacji, a kopia Leibniza przypominała, przy pobieżnym spojrzeniu, zbiór rozmaitych niepowiązanych ze sobą obserwacji i pomysłów. Dopiero dogłębne jej przestudiowanie przez kompetentnego matematyka mogło pozwolić na wyróżnienie w niej pewnego logicznego wątku. Jednym słowem, kopia Leibniza wymagała rozszyfrowania. Tak to w wielkim skrócie wyglądało aż do naszych czasów.

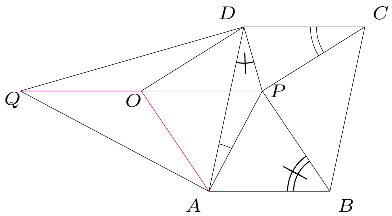
W 1982 roku ukazała się praca, w której Pasquale J. Federico (1902–1982) przedstawił własną wersję kopii *De solidorum elementis* wraz z jej przekładem na język angielski i szczegółowym komentarzem. Pięć lat później Pierre Costabel (1912–1989) – duchowny i historyk nauki badający spuściznę po Kartezjuszu, który poświęcił wiele czasu na odszyfrowanie kopii Leibniza – dokonał bardzo wnikliwej analizy tekstu łacińskiego, nadał mu zadowalającą formę i przełożył na język francuski; wersje te są omówione w [7]. Obecnie mamy więc dobry wgląd w to, jak rozumował Kartezjusz.

Manuskrypt Kartezjusza zawiera ważne twierdzenia, w tym pierwszy algebraiczny dowód, że może istnieć co najwyżej pięć foremnych wielościanów wypukłych; dowód wcześniejszy, geometryczny, znajduje się w księdze XIII *Elementów* Euklidesa (bez założenia wypukłości jest ich więcej [Zdzisław Pogoda, *Ile jest wielościanów foremnych?*, Δ^3_{16}]). Znajduje się w nim także rezultat, z którego przytoczone na początku artykułu twierdzenie Eulera o wielościanach może być otrzymane jako prosty wniosek. W swoim kombinatorycznym podejściu do wielościanu Kartezjusz operował pojęciem „kąta płaskiego" w miejsce „krawędzi wielościanu", otrzymując formułę

$$P = 2F + 2V - 4,$$

gdzie P oznacza liczbę kątów płaskich. Ponieważ w wielościanie liczba kątów płaskich jest dwa razy większa od liczby krawędzi wielościanu (o czym Kartezjusz dobrze wiedział), więc podstawiając $P = 2E$ w powyższym wzorze, otrzymujemy natychmiast formułę, którą Euler uzyskał w latach 1750–1751, a w 1758 roku opublikował w sprawozdaniach Akademii w Petersburgu pod tytułem *Elementa doctrinae solidorum*. Kartezjusz nie używał terminu „wielościan", pisał o „bryle sztywnej", pojęciu, które zawierało w sobie ważne założenie o wypukłości. Skądinąd założenie to zostało także milcząco przyjęte w pracy Eulera, gdy ten pisał: „w każdej bryle sztywnej…".

Rozwiązanie zadania M 1741.



Niech O będzie takim punktem, że $PO \parallel AB$, $PO = AB = CD$ oraz PO przecina odcinek AD. Wtedy czworokąty $ABPO$ oraz $CDOP$ są równoległobokami. Niech Q będzie takim punktem na prostej PO, że $OQ = OA$ oraz punkty P i Q leżą po przeciwnych stronach punktu O. Wtedy

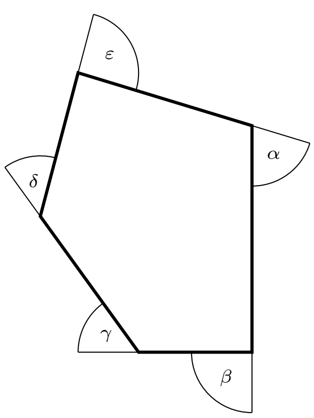
$$\sphericalangle OQA = \sphericalangle OAQ = \frac{\sphericalangle AOP}{2} = \\ = \frac{\sphericalangle ABP}{2} = \sphericalangle ADP,$$

więc punkty A, P, D i Q leżą na jednym okręgu Ω. Wobec tego

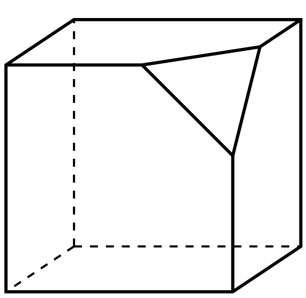
$$\sphericalangle ODQ = \sphericalangle DOP - \sphericalangle DQO = \\ = \sphericalangle DCP - \sphericalangle DAP = \\ = \sphericalangle DAP = \sphericalangle DQO,$$

skąd $OD = OQ = OA$, więc O jest środkiem okręgu Ω. Zatem

$$AB = OP = OA = OD = PB = PC.$$



Suma kątów zewnętrznych jest równa 2π



Wielościan sferyczny
$F + V - E = 7 + 10 - 15 = 2$

Różnica w sformułowaniu obu twierdzeń jest niewielka. Widać gołym okiem, że formuły Kartezjusza i Eulera są logicznie równoważne. Pewne kontrowersje związane z tym, komu przyznać pierwszeństwo odkrycia, skupiają się na rozważaniach o poziomie zrozumienia przez obu panów głębszego, topologicznego znaczenia wypracowanych przez nich formuł, tzn. na ile zdawali sobie sprawę z tego, co za nimi się kryje. W matematyce, ale nie tylko, zdarza się bowiem, że autor ważnego odkrycia nie wyciąga z niego, według późniejszych ocen, należytych – bywa, że rzeczywiście rewolucyjnych – wniosków. Zauważają je dopiero późniejsi uczeni i powstaje pytanie, komu przypisać odkrycie.

W interesującym nas przypadku opinie są podzielone. Wielu komentatorów uważa, że Euler był świadomy topologicznego znaczenia swojej formuły, natomiast Kartezjusz nie – zatem pierwszeństwo odkrycia należy się Eulerowi. Czy naprawdę było tak, że Kartezjusz znalazł diament, ale nie poznał się na jego wartości i odłożył go między inne zwykłe kamyki, natomiast Euler zdawał sobie sprawę z tego, co znalazł? Inna opinia jest taka, że twierdzenie Kartezjusza należy do topologii tak samo jak twierdzenie Eulera, gdyż pojęcie kąta płaskiego jest pojęciem topologicznym w tym samym stopniu co pojęcie krawędzi, jednak obaj panowie nie rozumieli w pełni topologicznej natury swoich twierdzeń, nie zdawali sobie sprawy z tego, że pojęcia wierzchołka, krawędzi i ściany mają sens na dowolnej powierzchni, że krawędzie nie muszą być proste, a ściany płaskie [8]. Bardziej szczegółowo opinie wybranych komentatorów są przedstawione w [3].

Dla Kartezjusza i Eulera rozważane wyżej formuły były wyrazem prób znalezienia „ogólnej teorii wielościanów”, w tym właściwych kryteriów ich klasyfikacji.

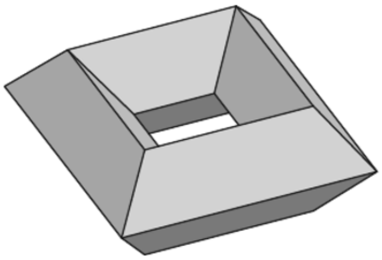
Rozważana formuła Kartezjusza jest kulminacją ciągu pięciu poprzedzających stwierdzeń, a metody jego rozumowania oparte są na analogii z wielobokami, a więc obiektami dwuwymiarowymi. Tymczasem Euler posłużył się metodą indukcji w zbiorze samych wielościanów, czyli obiektów trójwymiarowych (o metodach indukcji i analogii w matematyce można przeczytać w [5], gdzie rozdział III poświęcony jest metodzie indukcji w geometrii brył, z formułą Eulera jako koronnym przykładem).

Przybliżmy tu choć trochę metodę Kartezjusza. Wspomniany ciąg stwierdzeń, w którym Stwierdzenie 6 stanowi rozważaną formułę Kartezjusza, zaczyna się od kluczowego Stwierdzenia 1: *Suma zewnętrznych kątów bryłowych bryły jest równa ośmiu bryłowym kątom prostym (czyli* 4π*).* W manuskrypcie nie ma dowodu tego stwierdzenia. Możemy jednak zauważyć, że jest ono analogiczne do swego dwuwymiarowego odpowiednika, stwierdzającego, że *suma zewnętrznych kątów płaskich wieloboku jest równa czterem kątom prostym (czyli* 2π*).* Dowód stwierdzenia dla wymiaru 2 jest elementarny (patrz rysunek na marginesie), a dowód stwierdzenia dla wymiaru 3 jest analogiczny [8].

Doniosłość Stwierdzenia 1 (nazywanego twierdzeniem Kartezjusza) została zauważona już w roku 1860, tuż po pierwszej publikacji kopii Leibniza, także już wtedy zauważone zostały jego relacje z twierdzeniem Gaussa–Bonneta mówiącym o tym, że *Całka z krzywizny Gaussa po zamkniętej powierzchni genusu* 0 *(deformowalnej do sfery) jest równa* 4π ([8], [Witold Sadowski, *Wzór Eulera i balony*, Δ^{9}_{05}]).

Należąca dziś do topologii formuła $F + V - E = 2$ zajmuje jedno z czołowych miejsc w rankingach na najpiękniejszą formułę matematyczną. Na przełomie XVIII i XIX wieku pojawiły się nowe jej dowody. W 1794 roku Adrien-Marie Legendre podał prosty dowód jej prawdziwości dla wszystkich wielościanów, które dziś nazywamy sferycznymi (tzn. takich, których powierzchnia jest homeomorficzna ze sferą), a w 1810 roku Louis Poinsot (1777–1859) zauważył, że do tego zbioru należą także niektóre wielościany, które nie są wypukłe. W 1847 roku Karl G.Ch. von Staudt (1798–1867) podał prosty czysto topologiczny dowód formuły i wskazał topologiczny konieczny i wystarczający warunek, zapewniający jej prawdziwość. Dalsze badania wielościanów niewypukłych pokazały, że liczba $F + V - E$, zwana dziś charakterystyką

Eulera, nie musi być równa 2. Tak jest na przykład z wielościanami toroidalnymi, homeomorficznymi z torusem. Posypały się dalsze uogólnienia... [Michał Miśkiewicz, *Czy Ziemia jest płaska? A może jednak?*, Δ^{10}_{16}, oraz tekst na stronie 1].



Wielościan toroidalny
$F + V - E = 16 + 16 - 32 = 0$

I pomyśleć, że gdyby nie poszukiwania Leibniza, to nic nie wiedzielibyśmy o *De solidorum elementis*, ważnym dziele Kartezjusza o wielościanach, od którego to wszystko się zaczęło i w którym dojrzeć można zalążki przyszłej całej nowej dziedziny matematyki [zobacz też: Grzegorz Łukaszewicz, *Leonardo da Vinci i topologia*, Δ^4_{22}].

Czytelnikowi niniejszego artykułu proponujemy przeprowadzenie własnego dochodzenia i na jego podstawie zdecydowanie (choćby tylko na własny użytek), jak powinno się nazywać rozważane twierdzenie $F + V - E = 2$ – twierdzeniem Kartezjusza–Eulera czy twierdzeniem Eulera, a może twierdzeniem Kartezjusza?

Bibliografia:

[1] Amir D. Aczel, *Descartes' Secret Notebook*, New York, Broadway Books, 2005.
[2] René Descartes, *Exercices pour les éléments des solides: Progymnasmata de solidorum elementis – Essai en complément d'Euclid*, Edition critique avec introduction, traduction, notes et commentaires par Pierre Costabel, Paris, 1987.
[3] Pasquale J. Federico, *Descartes on Polyhedra: a study of the De Solidorum Elementis*, Springer-Verlag, 1982.
[4] Imre Lakatos, *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, Tikkun, 2005.
[5] George Polya, *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton University Press, 1954.
[6] David S. Richeson, *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press, 2012.
[7] Chikara Sasaki, *Descartes's Mathematical Thought*, Springer, 2003.
[8] John Stillwell, *Mathematics and Its History*, 2nd ed., Springer, 2002.

Jak pan Marek wybierał gospodarza

Oskar SKIBSKI *

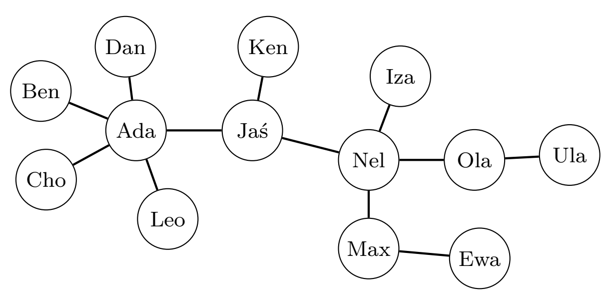
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Pan Marek, nauczyciel informatyki i wychowawca klasy 2B, leżał na kanapie w kantorku przy sali informatycznej i oddawał się swojej ulubionej rozrywce – czytał *Deltę*. Po tym, jak rok temu wybory na przewodniczącego klasy doprowadziły do sporej awantury, pan Marek postanowił, że w tym roku to on zdecyduje, kto będzie przewodniczącym. I właśnie powinien to zrobić, jednak strasznie mu się nie chciało.

Te niefortunne wybory opisaliśmy w artykule „Jak Leo uratował klasowe wybory", Δ^9_{21}.

Wertował akurat stary numer *Delty* i trafił na artykuł o tym, jak analizując sieć połączeń, można wskazać kluczowego terrorystę (Δ^{11}_{16}). „Szkoda, że moi uczniowie nie są terrorystami" – pomyślał. „Użyłbym jednej z tych metod i miałbym problem z głowy". Ale w sumie... gdyby tak stworzyć sieć społeczną klasy? Wtedy moglibyśmy użyć jakiejś metody opisanej w artykule do wskazania osoby, która jest najbardziej centralna. Ona powinna być niezłym gospodarzem!

Pan Marek narysował imiona 13 uczniów swojej klasy na kartce i podekscytowany popędził do komputera, gdzie uruchomił zapis monitoringu z ostatniego miesiąca (jak dobrze, że jego szkoła jest taka nowoczesna!). Każdą parę uczniów, którzy chociaż raz siedzieli w jednej ławce, połączył krawędzią. Powstał taki graf:



Graf to profesjonalne słowo oznaczające „kropki połączone kreskami". Kropki reprezentują jakieś obiekty i nazywane są zwykle wierzchołkami. Kreski, nazywane krawędziami, wskazują, które obiekty coś łączy.

Pan Marek przejrzał metody opisane w pracy, ale okazało się, że trzy standardowe miary centralności (miary stopnia, bliskości i pośrednictwa) wskazują różne osoby (odpowiednio Adę, Jasia i Nel)! Po wczytaniu się w ich opis zdecydował się użyć miary bliskości (*closeness centrality*), która każdemu

Rozwiązanie zadania F 1069.
Każdy z zakrętów zostanie pokonany ze stałą prędkością kątową ω – dla każdego zakrętu inną. Wykonanie zakrętu o kąt α wymaga czasu $t = \alpha/\omega$. Czas będzie minimalny, gdy ω będzie maksymalne. Maksymalną wartość ω otrzymamy, porównując siłę tarcia z wartością siły dośrodkowej potrzebnej do utrzymania ruchu po okręgu o promieniu r: $\omega^2 r \leqslant fg$. Otrzymujemy:

$$t = \frac{\alpha}{\omega} \geqslant \alpha\sqrt{\frac{r}{fg}}.$$

Z powyższego wzoru wynika, że stosunek czasów wynosi:

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}414,$$

a więc pokonanie zakrętu o większym promieniu, mimo że pokonujemy go z większą maksymalną prędkością, zajmie nam więcej czasu. Dla zaspokojenia ciekawości obliczmy, ile wynoszą czasy t_1 i t_2: $t_1 \approx 6{,}9$ s, $t_2 \approx 4{,}9$ s. 170 m to minimalny promień zakrętu, jaki można pokonać z maksymalną prędkością 140 km/h, dozwoloną na polskich autostradach (przy idealnych warunkach: sucha nawierzchnia nie pokryta piaskiem, liśćmi itp.).