Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2023

Zadania z matematyki nr 857, 858

Redaguje Marcin E. KUCZMA

857. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y, dla których liczby $x^2 - 4y$ oraz $y^2 - 4x$ są kwadratami liczb całkowitych.

858. W przestrzeni znajduje się trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 oraz odcinek DE długości 1, mający punkt wspólny z trójkątem ABC. Udowodnić, że pewien z punktów A, B, C, D, E jest w odległości nie większej niż 1 od czterech pozostałych.

Zadanie 858 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2022

Przypominamy treść zadań:

849. Rozwiązać równanie $4^x + 4^y + 1 = z^4$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

850. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt M jest środkiem boku BC. Punkt P leży na odcinku AM. Proste BP i CP przecinają boki AC i AB odpowiednio w punktach D i E. Te same proste przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach X i Y, różnych od B i C. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach AXD i AYE przecinają się w punkcie różnym od A, leżącym na odcinku AM.

849. Niech trójka (x, y, z) będzie jednym z rozwiązań. Liczba z jest nieparzysta. Przyjmijmy, że $x \leqslant y$. Z równania widać, że $z^4 > 4^y$; zatem $z^2 \geqslant 2^y + 1$, skąd przez podniesienie do kwadratu i ponowne skorzystanie z równania dostajemy $4^x \geqslant 2 \cdot 2^y$, czyli $y \leqslant 2x - 1$.

Przepiszmy teraz równanie tak:

$$4^x + 4^y = (z^2 - 1)(z^2 + 1). \tag{1}$$

Ponieważ $x \leqslant y$, lewa strona dzieli się przez 2^{2x}. Po prawej stronie czynnik $z^2 + 1$ jest niepodzielny przez 4, wobec czego czynnik $z^2 - 1$ musi dzielić się przez 2^{2x-1}. Stąd $z^2 - 1 \geqslant 2^{2x-1}$ i dalej:

$$(z^2 - 1)(z^2 + 1) \geqslant 2^{2x-1}(2^{2x-1} + 2) = 4^{2x-1} + 4^x,$$

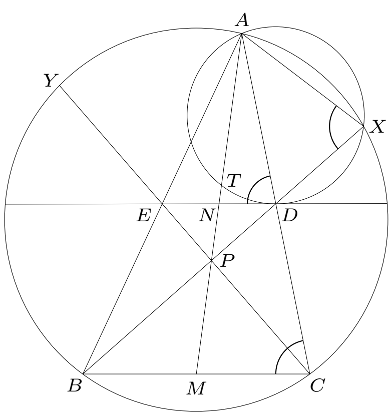
co w połączeniu z (1) pokazuje, że $y \geqslant 2x - 1$.

Wcześniej wykazaliśmy, że $y \leqslant 2x - 1$. Tak więc $y = 2x - 1$, czyli $x = (y+1)/2$. Wstawiamy to do równania (w wyjściowej postaci):

$$2^{y+1} + 4^y + 1 = z^4. \tag{2}$$

Lewa strona (2) to kwadrat liczby $2^y + 1$, która wobec tego jest równa z^2. Otrzymujemy $2^y = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$. Każdy z czynników musi być potęgą dwójki; różnią się o 2, czyli wynoszą 2 i 4. Stąd $z = 3$, $y = 3$, $x = (y+1)/2 = 2$.

Odrzucając założenie, że $x \leqslant y$, stwierdzamy, że równanie ma dwa rozwiązania: $(x, y, z) = (2, 3, 3)$ oraz $(3, 2, 3)$.



Rysunek do zadania 850

850. Ponieważ $AE \cdot BM \cdot CD = EB \cdot MC \cdot DA$ (Ceva), zaś $BM = MC$, więc ma miejsce proporcja $AE : BE = AD : CD$, z której wynika, że $ED \| BC$. Zatem punkt N, w którym przecinają się proste AM i ED, jest środkiem odcinka ED. Dzięki tej równoległości (oraz położeniu punktów A, B, C, X na jednym okręgu) mamy równość

$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle ACB = \sphericalangle AXD,$$

która mówi, że kąt między prostą ED i cięciwą AD okręgu AXD jest równy kątowi wpisanemu w ów okrąg. Stąd wniosek, że prosta ED jest styczna do okręgu AXD. Analogicznie, jest ona też styczna do okręgu AYE.

Przyjmijmy, że prosta AM przecina okrąg AXD w punktach A i T, zaś okrąg AYE w punktach A i U (gdy jest styczna do któregoś z nich, przyjmujemy $T = A$ bądź $U = A$). Oba te okręgi leżą po tej samej stronie prostej ED co punkt A, zatem punkty T i U leżą na półprostej $NA^{\to}$. Odcinek ND jest styczny do okręgu AXD, więc

(3) $NA \cdot NT = ND^2$; podobnie $NA \cdot NU = NE^2$.

A skoro $ND = NE$, wynika stąd, że T i U to ten sam punkt – ten, o który chodzi w zadaniu. Pozostaje uzasadnić, że leży on na odcinku AM; w tym celu wystarczy pokazać, że $NT < NA$.

Gdyby było inaczej ($NT \geqslant NA$), to wobec związków (3) mielibyśmy też $ND \geqslant NA$, $NE \geqslant NA$. Dałoby to nierówności $\sphericalangle NAD \geqslant \sphericalangle NDA$, $\sphericalangle NAE \geqslant \sphericalangle NEA$; po dodaniu stronami (i uwzględnieniu podobieństwa trójkątów AED i ABC) otrzymalibyśmy: $\sphericalangle CAB \geqslant \sphericalangle BCA + \sphericalangle ABC$, wbrew założeniu, że trójkąt ABC jest ostrokątny. To kończy rozwiązanie.