Klub 44 M

Załącznik do podsumowania ligi zadaniowej Klubu 44 M w roku szkolnym 2021/22

Piotr Kumor

827. Niech T_m oznacza liczbę naturalną, której zapis dziesiętny składa się z m trójek (na przykład $T_4 = 3333$).
Wyjaśnić, czy istnieją takie liczby naturalne m , n ,
że suma cyfr liczby $n \cdot T_m$ jest mniejsza niż $3m$?

Rozwiązanie

Nie istnieją takie liczby naturalne m , n .

Udowodnimy nieco więcej.
Wprowadźmy następujące oznaczenia.

Dla liczb całkowitych $g \geq 2$, $L \geq 1$
niech $S_g(L)$ oznacza sumę cyfr liczby L
zapisanej w systemie pozycyjnym o podstawie g .

Oczywiście cyframi w tym zapisie
są liczby należące do zbioru $\{0, 1, ..., g-1\}$.

Dla liczb całkowitych g , B , m
gdzie $g \geq 2$ oraz $1 \leq B \leq g-1$ oraz $m \geq 1$
niech $T_m(g, B)$ oznacza liczbę naturalną,
której zapis pozycyjny przy podstawie g składa się z m cyfr B .
(Na przykład $T_4(g, B) = B \cdot (g^3 + g^2 + g + 1)$).

Prawdziwe jest następujące Twierdzenie :

Twierdzenie

Jeżeli liczba $g-1$ jest podzielna przez liczbę całkowitą dodatnią B,
to dla każdej pary liczb naturalnych m, n zachodzi nierówność :
$S_g\left(n\cdot T_m(g,B)\right)\geq B\cdot m$.

W zadaniu 827 mamy $g=10$, $B=3$.
Założenia Twierdzenia są spełnione,
bo liczba $g-1=9$ jest podzielna przez 3 ($=B$).
Na podstawie Twierdzenia
otrzymujemy więc negatywną odpowiedź na pytanie zadania 827.

Natomiast samo Twierdzenie
to natychmiastowa konsekwencja Faktu i Lematu.

Fakt
Dla liczb całkowitych $g\geq 2$; $1\leq k$ oraz $L\geq 1$
zachodzi nierówność $k\cdot S_g(L)\geq S_g(k\cdot L)$.

Lemat
Dla liczb całkowitych $g\geq 2$; $m\geq 1$ oraz $n\geq 1$
zachodzi nierówność $S_g\left(n\cdot T_m(g,g-1)\right)\geq (g-1)\cdot m$

Lemat to szczególny przypadek **Twierdzenia** dla $B=g-1$.

Z Lematu i Faktu natychmiast otrzymujemy Twierdzenie przyjmując :

$k=\dfrac{g-1}{B}$ (z założeń Twierdzenia jest to liczba całkowita)

oraz $L=n\cdot T_m(g,B)$.

Na podstawie Faktu mamy bowiem : $\frac{g-1}{B} \cdot S_g(L) \geq S_g\left(\frac{g-1}{B} \cdot L\right)$

czyli $\frac{g-1}{B} \cdot S_g(n \cdot T_m(g,B)) \geq S_g\left(\frac{g-1}{B} \cdot n \cdot T_m(g,B)\right)$

Jednak oczywiście $\frac{g-1}{B} \cdot n \cdot T_m(g,B) = n \cdot T_m(g,g-1)$

więc $S_g\left(\frac{g-1}{B} \cdot n \cdot T_m(g,B)\right) = S_g(n \cdot T_m(g,g-1)) \geq (g-1) \cdot m$

(Ostatnia nierówność to teza Lematu).

Zatem

$$\frac{g-1}{B} \cdot S_g(n \cdot T_m(g,B)) \geq S_g\left(\frac{g-1}{B} \cdot n \cdot T_m(g,B)\right) \geq (g-1) \cdot m$$

więc otrzymujemy nierówność $S_g(n \cdot T_m(g,B)) \geq B \cdot m$
czyli tezę Twierdzenia.

Pozostaje jeszcze kwestia dowodów Faktu oraz Lematu.

Fakt nietrudno udowodnić, a jego dowody ,, są dobrze znane ‘’.
Dobrze znany jest także

Fakt Ogólniejszy

Dla liczb całkowitych $g \geq 2$ oraz $L \geq 1$; $M \geq 1$
zachodzi nierówność $S_g(L) + S_g(M) \geq S_g(L+M)$.

Fakt wynika natychmiast z Faktu Ogólniejszego
przez łatwą indukcję względem k dla $M = L$.

Nietrudny dowód Faktu Ogólniejszego pomijamy,
bo (jak wspomnieliśmy wyżej) można go znaleźć
w licznych łatwo dostępnych źródłach.
Czasem formułuje się go tak : Suma cyfr jest funkcją podaddytywną.

Mniej oczywisty jest natomiast dowód Lematu.

Znajduje się on na przykład w pracy :

On the sum of the digits of multiples

Antal Balog, Cécile Dartyge

▶ **To cite this version:**

Antal Balog, Cécile Dartyge. On the sum of the digits of multiples. moscow journal of combinatorics and number theory, 2012, 2 (1), pp.3-15. hal-01280668

Jako Lemat 4, dowód na stronach 5 – 6 w owej pracy.
Praca ta jest dostępna w sieci :

https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01280668/document

Wspomniany dowód widać też na zdjęciach
(tej właśnie pracy oczywiście) poniżej.

Są tu użyte nieco inne (choć podobne) oznaczenia,
niż nasze (powyżej) ale jest to wszystko raczej czytelne.

$$N_r := (g-1)(1+g+\cdots+g^r) = g^{r+1}-1,$$

with $r \geq 1$.

Lemma 4. *For all $h \geq 1$ we have*

$$s_g(hN_r) \geq s_g(N_r). \tag{6}$$

This lemma follows from the next by induction.

Lemma 5. *Writing $h = u + vg^{r+1}$, where $0 < u < g^{r+1}$ and $0 \leq v$ we have*

$$s_g(hN_r) \geq s_g((v+1)N_r). \tag{7}$$

For $1 \leq h \leq g^{r+1}$ we have

$$s_g(hN_r) = s_g(N_r). \tag{8}$$

Proof. Let $h > 1$. The obvious identity $(h-1)(N_r+1) = (h-1)g^{r+1}$ implies

$$hN_r = N_r - (h-1) + (h-1)g^{r+1} = N_r - (u-1) + (h-1-v)g^{r+1}.$$

Note that $0 < N_r - (u-1) < g^{r+1}$ and that the least significant $r+1$ digits of $(h-1-v)g^{r+1}$ are zero. Thus we have:

$$s_g(hN_r) = s_g(N_r - (u-1)) + s_g(h-1-v). \tag{9}$$

If $v = 0$ then $h-1 = u-1$ and we have by (5) (since $N_r \trianglerighteq u-1$) :

$$s_g(hN_r) = s_g(N_r) - s_g(u-1) + s_g(u-1) = s_g(N_r).$$

This proves the second statement (the case $h = g^{r+1}$ being trivial). If $v \geq 1$ then

$$h - 1 - v = u + vg^{r+1} - 1 - v = (v+1)N_r - (N_r - (u-1)) \tag{10}$$

and by (5) we find

$$s_g(h - 1 - v) \geq s_g((v+1)N_r) - s_g(N_r - (u-1)).$$

Inserting this into (9) gives

$$s_g(hN_r) \geq s_g((v+1)N_r).$$

This proves Lemma 5.

$\square$

Proof of Lemma 4. The second statement of Lemma 5 proves (6) for $h \leq g^{r+1}$. Since $h = u + vg^{r+1} > v + 1$ we can use induction based on the first statement of Lemma 5 when $u \neq 0$, or based on $s_g(hN_r) = s_g(vN_r)$ when $u = 0$.

$\square$

Piotr Kumor

(fragment rozwiązania)

832. Numerujemy wierzchołki n kąta wypukłego liczbami $1, \dots, n$
(każda liczba występuje jeden raz ; kolejność dowolna).
Każda krawędź (bok wielokąta) otrzymuje etykietę
ze zbioru $\{ 1, \dots, n-1 \}$ określoną jako wartość bezwzględna
różnicy liczb będących numerami jej końców.
Dla każdego $n \geq 3$ wyznaczyć największą liczbę $k = K(n)$,
dla której istnieje takie ponumerowanie wierzchołków,
że każda liczba ze zbioru $\{ 1, \dots, n-1 \}$
pojawia się jako etykieta pewnej krawędzi,
przy czym etykieta k (i tylko ona) pojawia się dwa razy.

Ustalmy **dowolnie** rosnący ciąg n
liczb **rzeczywistych** $w_1 < w_2 < \dots < w_n$.

Jeżeli $n = 2m$ jest liczbą parzystą, to niech :

$$P = \sum_{i=1}^{m} w_i \quad ; \quad Q = \sum_{i=m+1}^{2m} w_i \quad ; \quad R = Q - P$$

Jeżeli $n = 2m+1$ jest liczbą nieparzystą, to niech :

$$P = \sum_{i=1}^{m} w_i \quad ; \quad Q = \sum_{i=m+2}^{2m+1} w_i \quad ; \quad R = Q - P$$

Dla permutacji $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ciągu $(w_1, w_2, \dots w_n)$

niech $S(A) = \sum_{j=1}^{n} \left| a_{j+1} - a_j \right|$ (przyjmujemy $a_{n+1} = a_1$).

Prawdziwe jest następujące :

Twierdzenie W

Dla każdej permutacji $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ciągu $(w_1, w_2, \dots w_n)$
zachodzi nierówność $S(A) \leq 2 \cdot R$.

Zauważmy, że **Twierdzenie T**
to natychmiastowy wniosek z **Twierdzenia W.**

Dla ciągu $w_j = j$ ($j = 1, 2, \ldots n$)

zachodzi bowiem (jak łatwo obliczyć) równość : $2 \cdot R = \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$

Dowód Twierdzenia W

Dla dowolnej, ustalonej permutacji $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
ciągu $(w_1, w_2, \ldots w_n)$ zachodzi równość :

$$S(A) = \sum_{j=1}^{n} \left| a_{j+1} - a_j \right| = \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

gdzie wszystkie liczby x_j , y_i należą do zbioru $\{ w_1, w_2, \ldots w_n \}$
zaś dla każdej liczby $w \in \{ w_1, w_2, \ldots w_n \}$ zachodzi dokładnie jedna
z trzech możliwości :

I) w występuje dokładnie dwa razy w ciągu $x_1, x_2, \ldots x_n$
i nie występuje w ciągu $y_1, y_2, \ldots y_n$;

II) w nie występuje w ciągu $x_1, x_2, \ldots x_n$;
i występuje dokładnie dwa razy w ciągu $y_1, y_2, \ldots y_n$

II) w występuje dokładnie jeden raz w ciągu $x_1, x_2, \ldots x_n$
i dokładnie jeden raz w ciągu $y_1, y_2, \ldots y_n$

Zatem, jeżeli n jest liczbą parzystą, to :

$$2 \cdot Q \geq \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad \text{oraz} \qquad -2 \cdot P \geq -\sum_{j=1}^{n} y_j$$

Zaś, jeżeli n jest liczbą parzystą, to :

$$2 \cdot Q + w_{m+1} \geq \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad \text{oraz} \qquad -(2 \cdot P + w_{m+1}) \geq -\sum_{j=1}^{n} y_j$$

Zatem dla każdego n (parzystego, lub nieparzystego) mamy :

$$S(A) = \sum_{j=1}^{n} \left| a_{j+1} - a_j \right| = \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{i=1}^{n} y_i \leq 2 \cdot (Q - P) = 2 \cdot R$$

Otrzymaliśmy tezę **Twierdzenia W.**
Zostało więc ono udowodnione.
Tym samym, także rozwiązanie zadania 832 dobiegło końca.
Uczynimy jednak jeszcze kilka małych uwag :

Uwaga 1

Łatwo zauważyć, że $S(A) = 2 \cdot R$ dla każdej permutacji
$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ w której składniki sumy P
(liczby z dolnej połowy) występują na przemian z tymi,
które tworzą sumę Q (liczby górnej połowy).
Kolejność tych większych (a także tych mniejszych)
nie ma już znaczenia.
Gdy $n = 2m + 1$ jest liczbą nieparzystą,
to wyraz w_{m+1} ma jednego sąsiada mniejszego,
a drugiego większego (niż on sam), a dalej idą na przemian.
Zatem dla dowolnego ciągu $w_1, w_2, \ldots w_n$
permutacji $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takich, że $S(A) = 2 \cdot R$ jest dużo.

Uwaga 2

Twierdzenie W należy do matematycznego folkloru.
Jego dowody można znaleźć (między innymi)
w zbiorach zadań z dawnych rosyjskich olimpiad matematycznych,
oraz w popularnych książkach Hugona Steinhausa.

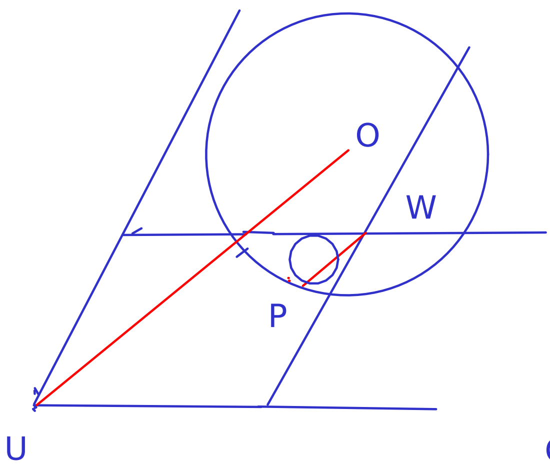
Uwaga 3

Pytanie zadania 832 dotyczyło **największej możliwej wartości** $k(n)$
(czyli $K(n)$). Można też postawić ogólniejsze pytanie :
Jakie wartości może przyjmować $k(n)$?

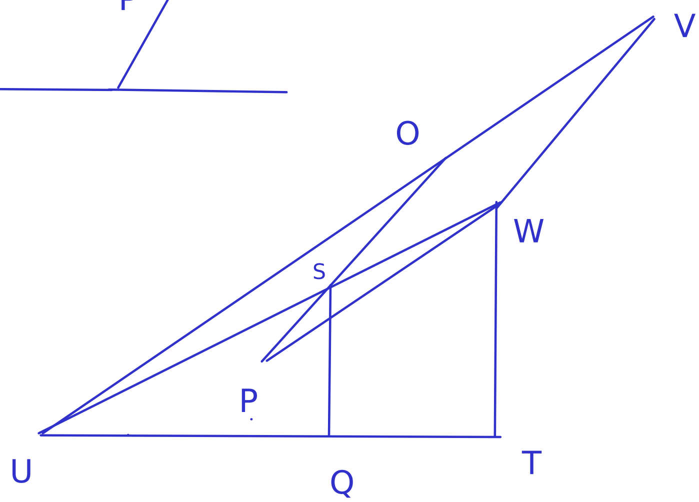
Pytanie to (jak też samo zadanie 832) ma bliski związek
z zagadnieniem tak zwanych permutacji wdzięcznych
(Google : graceful permutations).

Jerzy Cisło

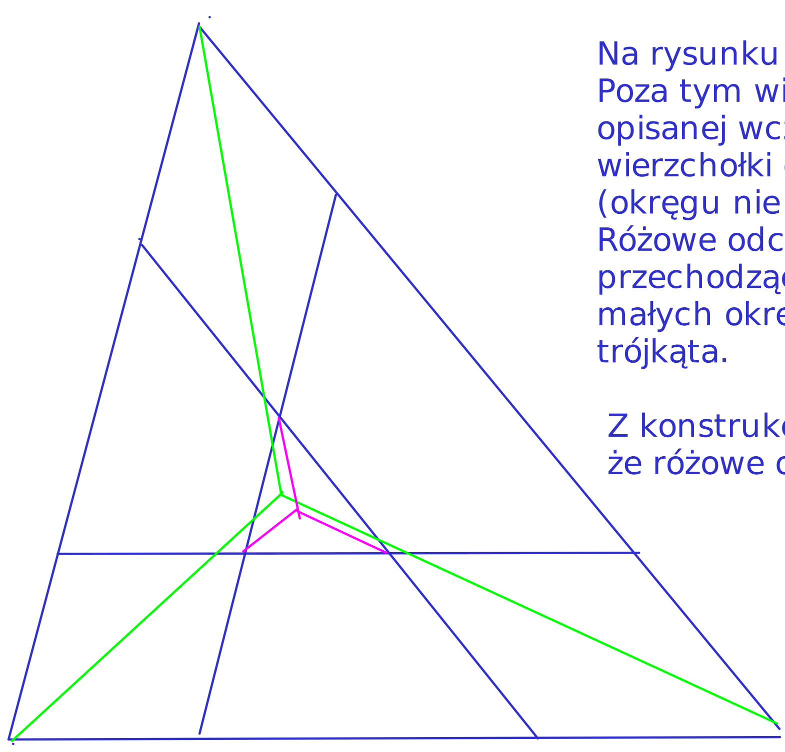
Zadanie 833.



Aby znaleźć punkt styczności okręgów dorysowujemy romb, którego wysokość jest równa promieniow dużego okręgu. Prosta WP jest równoległa do prostej OU.



Uzasanieniem konstrukcji jest drugi rysunek z dorysowanym rombem PWVO o boku równym promieniowi dużego okręgu.
OP = WT,   SO = SQ



Na rysunku widać mały trójkąt w środku dużego. Poza tym widać trzy romby, z konstrukcji opisanej wcześniej. Zielone odcinki łączą wierzchołki dużego trójkąta ze środkiem okręgu (okręgu nie narysowałem).
Różowe odcinki są zawarte w prostych przechodzących przez punkty styczności małych okręgów z dużym i wierzchołki małego trójkąta.

Z konstrukcji opisanej wcześniej wynika, że różowe odcinki są równoległe do zielonych.

Mały trójkąt jest obrazem dużego w pewnej jdnokładności.
Zielone przechodzą na różowe, a ponieważ zielone przecinają się w jednym punkcie, tak samo jest z różowymi.

Komentarz Redaktora Ligi do zadania 838

Niektóre trójki pitagorejskie generują nieskończone serie rozwiązań równania

$$x^4 + y^4 = z^2 + 1. \tag{1}$$

Dokładniej: załóżmy, że liczby całkowite $a, b, c, d \neq 0$ spełniają warunki

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{2}$$

$$ab + 1 = d^2. \tag{3}$$

Załóżmy ponadto, że istnieją liczby całkowite x, y takie, że

$$ax^2 - by^2 = c. \tag{4}$$

Wówczas (uzasadnienie dalej) wzory

$$z = \frac{cx^2 - a}{b}, \qquad z = \frac{cy^2 + b}{a} \tag{5}$$

określają tę samą liczbę całkowitą z, która wraz z liczbami x, y spełnia równanie (1). Co więcej, warunek (4) jest niezmiennikiem transformacji liniowej

$$\begin{cases} x' = dx + by \\ y' = ax + dy \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & b \\ a & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \tag{6}$$

jeśli więc para (x, y) spełnia równanie (4), to para (x', y') też je spełnia; zatem określając liczbę z' którymkolwiek ze wzorów (5) z zamianą (x, y) na (x', y'), dostajemy znów rozwiązanie (x', y', z') równania (1). Startując od dowolnej pary (x_0, y_0) spełniającej warunek (4) i iterując przekształcenie (6), dostajemy w ten sposób nieskończony ciąg (x_n, y_n, z_n) rozwiązań równania (1).

Uzasadnienia: sprawdzenie, że prawe strony wzorów (5) są równe, sprowadza się do pokazania, że $c(ax^2 - by^2) = a^2 + b^2$, to zaś wynika z (4) i (2). Uzyskana równość, przepisana w postaci

$$a(cx^2 - a) = b(cy^2 + b),$$

pokazuje, że jeśli liczby a, b są względnie pierwsze, to $b|(cx^2 - a)$, $a|(cy^2 + b)$, więc liczba z (dana wzorami (5)) jest całkowita. Gdy liczby a, b nie są względnie pierwsze, możemy skrócić ułamki (5) przez największy wspólny dzielnik liczb a, b (który też jest dzielnikiem liczby c) z konkluzją, że z jest liczbą całkowitą.

A oto sprawdzenie, że liczby x, y, z spełniają równanie (1) (w przekształceniach użyjemy kolejno wzorów (5), (4), (2)):

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{b^2}{a^2+b^2}\, z^2 + \frac{a^2}{a^2+b^2}\, z^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2} \left(\frac{cx^2 - a}{b}\right)^2 + \frac{a^2}{a^2+b^2} \left(\frac{cy^2 + b}{a}\right)^2 = \\ &= \frac{c^2(x^4 + y^4) - 2c(ax^2 - by^2) + (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = x^4 + y^4 - 1. \end{aligned}$$

Wreszcie sprawdzenie równości (4) dla liczb x', y' (używając zależności (3) i (4)):

$$a\big(x'\big)^2 - b\big(y'\big)^2 = a\big(dx + by\big)^2 - b\big(ax + dy\big)^2 = \big(d^2 - ab\big)\big(ax^2 - by^2\big) = c.$$

Uwagi. Kilka przykładów czwórek liczb całkowitych a, b, c, d, spełniających warunki (1), (2), (3), dla których istnieją liczby całkowite $x = x_0$, $y = y_0$ spełniające warunek (4):

a	b	c	d	x_0	y_0	z_0
8	15	17	11	2	1	4
9	40	41	19	3	1	9
240	238	338	239	13	13	239
560	273	623	391	5	7	55

(liczby z_0 są indukowane wzorami (5)). W tych przykładach występują jedynie liczby dodatnie, więc wzory (6) generują niskończone ciągi liczb dodatnich. Wszelako konstrukcja działa dla liczb całkowitych dowolnych znaków. Pomnożenie liczb a, b, c przez dowolny czynnik całkowity (więc np. przez -1, bez zmiany wartości $|d|$, $|x_0|$, $|y_0|$) nie wpływa na słuszność wzorów (2) i (4).

Oczywiście nie każda trójka pitagorejska $a, b, c > 0$ ma pożądane własności. Wartość $ab + 1$ nie musi być kwadratem (własność (3)), ale to niewielkie zmartwienie – ten warunek zawsze da się spełnić przez odpowiednie przeskalowanie (dlaczego? to się sprowadza łatwo do równania Pella – trzeba tylko wiedzieć, że ab nie jest kwadratem; uzasadnienie tego faktu zostawiamy jako dość ciekawe ćwiczenie).

Bardzo ograniczające jest natomiast wymaganie, by równanie (4) miało rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y. Wobec możliwości przeskalowania (trójki a, b, c) wystarczy zawęzić poszukiwania do trójek pitagorejskich pierwotnych (tj. złożonych z liczb parami względnie pierwszych). Na przykład dla trójki pierwotnej $(a, b, c) = (80, 39, 89)$ równanie (4) jest spełnione przez $x = 5$, $y = 7$; własność (3) uzyskuje się przechodząc do trójki $(7a, 7b, 7c)$.

Nie znam żadnego algorytmu pozwalającego rozpoznać, czy dla zadanej pierwotnej trójki pitagorejskiej (a, b, c) równanie (4) ma rozwiązanie.

Marcin Kuczma

Marek Spychała

Zadanie 838

Rozwiązanie zadania można znaleźć na stronie:

http://www.maroon.dti.ne.jp/fermat/dioph320e.html

Strona ta zaczyna rozwiązywanie od rozwiązania bazującego na tożsamości E. Fauquembergue którą podano na stronie Tito Piezas:

https://sites.google.com/site/tpiezas/009

W rozwiązaniu tym wystarczy znaleźć rozwiązania równania

$$q^2-17p^2 = \pm 1$$

Sposoby rozwiazywania tego równania można znaleźć w książce W. Narkiewicza, Teoria Liczb lub w książce A. Nowickiego, Podróże po Imperium Liczb - Część 14. Równanie Pella.

Autor strony daje też przykłady innych tożsamości, które będą generowały nieskończoną liczbę rozwiązań.

Na stronie możemy też znaleźć link do strony:

http://members.bex.net/jtcullen515/Math10.htm

gdzie możemy znaleźć wszystkie rozwiązania *x* i *y* nie większe od 10000.

Poniżej zrzut ekranu stron z rozwiązaniem i przykładami liczb *x* i *y*.

1.Introduction

Jim Cullen[1] found small solutions of x^4 + y^4 - 1 = z^2 with (x,y)<10000.
According to Tito Piezas[2], E. Fauquembergue gave an identity below.
(17p^2-12pq-13q^2)^4 + (17p^2+12pq-13q^2)^4 = (289p^4+14p^2q^2-239q^4)^2 + (17p^2-q^2)^4.
As Tito points out, integer solution of x^4 + y^4 - 1 = z^2 is derived from the solution of 17p^2-q^2=1.
We searched the identities such as X^4 + Y^4 - Z^2 = W^2 where equation Z = 1 has infinitely many integer solutions.

2. Results

Some identities were found below.
X^4 + Y^4 -Z^2 = W^2 where equation Z = 1 has infinitely many integer solutions.

```
(4p+3q)^4 +  (2p-7q)^4 -    (4p^2+36pq-39q^2)^2 = (31q^2+8pq+16p^2)^2
(4p+4q)^4 + (2p-15q)^4 -   (4p^2+68pq-191q^2)^2 = (16p^2+120q^2)^2
(4p+5q)^4 + (2p-23q)^4 -  (4p^2+100pq-455q^2)^2 = (16p^2-8pq+271q^2)^2
(4p+18q)^4 + (2p-25q)^4 - (4p^2+156pq-399q^2)^2 = (16p^2+80pq+580q^2)^2

(9p+2q)^4 + (3p-13q)^4 -   (9p^2+84pq-164q^2)^2 = (41q^2+18pq+81p^2)^2
(9p+8q)^4 + (3p-11q)^4 -   (9p^2+96pq-104q^2)^2 = (89q^2+126pq+81p^2)^2
(9p+13q)^4 + (3p-23q)^4 - (9p^2+186pq-479q^2)^2 = (281q^2+198pq+81p^2)^2
(9p+16q)^4 + (3p-22q)^4 - (9p^2+192pq-416q^2)^2 = (356q^2+252pq+81p^2)^2
(9p+39q)^4 + (3p-28q)^4 - (9p^2+318pq-431q^2)^2 = (81p^2+648pq+1656q^2)^2
(9p+45q)^4 + (3p-26q)^4 - (9p^2+330pq-215q^2)^2 = (81p^2+756pq+2124q^2)^2
(9p+59q)^4 + (3p-35q)^4 - (9p^2+438pq-431q^2)^2 = (3665q^2+990pq+81p^2)^2
(9p+73q)^4 + (3p-44q)^4 - (9p^2+546pq-719q^2)^2 = (5624q^2+1224pq+81p^2)^2
(9p+96q)^4 + (3p-50q)^4 - (9p^2+672pq-416q^2)^2 = (81p^2+1620pq+9540q^2)^2
```

3.Example

(4p+3q)^4+(2p-7q)^4-(4p^2+36pq-39q^2)^2=(31q^2+8pq+16p^2)^2

Intger solutions of 4p^2+36pq-39q^2 = 1 are given by recursion formulae below.

(p(n),q(n))=(1,1).

```
p(n+1) = 43p(n) + 429q(n).
q(n+1) = 44p(n) + 439q(n).


           3337^4 +           2437^4 - 1 =                      12620311^2
         1608427^4 +        1174629^4 - 1 =                 2931975736239^2
       775258477^4 +      566168741^4 - 1 =            681162466981740799^2
    373672977487^4 +   272892158533^4 - 1 =       158249026651200010013191^2
180109599890257^4 + 131533454244165^4 - 1 = 36764730368978926259302662855^2

(p(n),q(n))=(-1,-1).
p(n+1) = 439p(n) - 429q(n).
q(n+1) = -44p(n) + 43q(n).


            37^4 +             27^4 - 1 =                        1551^2
         17827^4 +          13019^4 - 1 =                   360175519^2
       8592577^4 +        6275131^4 - 1 =              83676696767719^2
    4141604287^4 +     3024600123^4 - 1 =         19439937546109682151^2
 1996244673757^4 +  1457850984155^4 - 1 = 4516325170503616879761055^2
```

4.References

[1]:Jim Cullen, x^4 + y^4 - 1 = z^2
[2]:Tito Piezas,x^4 + y^4 - 1 = z^2

HOME

Case Two k ODD: $z^2 = 5000\ (\ 2k - 1\ )\ (\ 625k - 313\ ) + 1$

We can now reformulate Case Two by substituting in our formulas for z^2 as follows:

Case Two k EVEN: $10^4\ (\ u^4 + v^4\ ) + 1 = 5000\ (\ 2k - 1\ )\ (\ 625k - 312\ ) + 1$

Case Two k ODD: $10^4\ (\ u^4 + v^4\ ) + 1 = 5000\ (\ 2k - 1\ )\ (\ 625k - 313\ ) + 1$

which then reduce to:

Case Two k EVEN: $u^4 + v^4 = 1/2\ (\ 2k - 1\ )\ (\ 625k - 312\ ) = 1/2\ (\ 1250k^2 - 1249k + 312\ )$

Case Two k ODD: $u^4 + v^4 = 1/2\ (\ 2k - 1\ )\ (\ 625k - 313\ ) = 1/2\ (\ 1250k^2 - 1251k + 313\ )$

$$x^4 + y^4 - 1 = z^2$$

I've done one search for values of ***{x,y}*** less than or equal to ***10,000***.

x	y	z
5	7	55
8	17	296

x	y	z
958	1567	2621396
993	1090	1543980

13	13	239
17	32	1064
22	31	1076
27	37	1551
28	47	2344
31	46	2324
44	63	4416
46	97	9644
47	76	6184
64	111	12984
91	99	12831
98	191	37724
104	239	58136
111	152	26184
113	319	102559
118	705	497220
143	239	60671
152	1023	1046784
157	253	68591
193	668	447776
208	239	71656
257	560	320480
295	485	250807
305	643	423785
319	794	638596
401	664	469304

1007	1829	3495559
1212	5039	25433976
1217	1844	3708896
1297	2547	6701769
1327	7132	50895896
1341	2393	6002169
1371	2089	4751511
1407	2042	4615836
1471	1568	3275216
1553	2552	6944936
1559	2843	8440169
1567	2566	7027316
1637	1769	4119959
1747	3683	13903601
1772	3009	9583104
1799	3369	11802561
1826	5217	27420564
1857	3115	10297785
1873	3532	12958904
1874	3073	10075204
2437	3337	12620311
2657	6178	38815084
2851	4325	20395295
2996	6959	49252504
3073	5042	27119044
3073	7688	59854976

421	3173	10069489
489	1603	2580711
505	515	367943
560	785	691432
577	624	512304
577	1768	3143504
593	812	747256
599	2155	4657865
608	2287	5243416
643	905	917465
655	1849	3445615
659	4217	17788391
665	1143	1379265
839	1633	2758031
944	1553	2571176

3112	3823	17532776
3223	5809	35307151
3343	4259	21305431
3455	3518	17194940
3472	5567	33253424
3739	4423	24044791
3823	5243	31132871
3866	5537	34107436
3947	8987	82254929
4009	8819	79418041
4091	4451	25934431
5257	5549	41374649
5333	9901	102072161
6087	7253	64344471
6201	6227	54608871
6371	8183	78303001

$$x^4 + y^4 - 7 = z^2$$

I've done one search for values of ***x*** less than or equal to ***34,000*** and ***y*** less than or equal to ***100,000***.

x	*y*	*z*

x	*y*	*z*