Czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po zakończeniu
roku szkolnego 2021/22

Sławomir Buć (Mystków)	43,90
Jacek Konieczny (Poznań)	33,42
Jan Zambrzycki (Białystok)	3 – 32,98
Ryszard Woźniak (Kraków)	32,96
Marian Łupieżowiec (Gliwice)	2 – 32,56
Paweł Perkowski (Ożarów Maz.)	4 – 32,13
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	3 – 18,61
Paweł Kubit (Kraków)	15,73
Tomasz Wietecha (Tarnów)	16 – 12,94

Lista obejmuje uczestników ligi, których stan konta wynosi co najmniej 12 punktów i którzy przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2020, 2021 lub 2022.

Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 F w roku szkolnym 2021/2022

Współczynniki trudności tegorocznych zadań rozłożyły się dosyć symetrycznie – średnia wyniosła 2,22, pięć przekroczyło trójkę, cztery były mniejsze od dwóch.

Najwięcej problemów sprawiło zadanie **723** (WT = 3,77), gdzie relatywistyczna cząstka o znanej masie i energii kinetycznej zderza się niesprężyście z taką samą cząstką spoczywającą. Należało znaleźć maksymalną energię, jaka mogła być wykorzystana do wytworzenia nowych cząstek. Energia ta jest różnicą między energiami spoczynkowymi produktów i substratów reakcji, tymczasem większość uczestników przyjęła założenie, że całkowita masa układu nie zmienia się.

Trudności sprawiły też zadania z elektromagnetyzmu. Zadanie **727** (WT = 3,27), gdzie również nikt nie zdobył maksymalnej oceny, polegało na znalezieniu wytrzymałości drutu, z którego wykonano zwojnicę, aby nie uległ on rozerwaniu podczas przepływu prądu. Nadesłane rozwiązania zawierały założenie, że indukcja pola magnetycznego, w którym znajduje się pojedynczy zwój, jest w przybliżeniu taka sama, jak od całej zwojnicy. W rzeczywistości stanowi ona połowę tej wielkości.

Zadanie **728** (WT = 3,23) dotyczyło ruchu cząstki naładowanej w skrzyżowanych polach elektrycznym i magnetycznym z zadaną prędkością początkową. Maksymalne oceny uzyskali za nie **Piotr Adamczyk**, **Konrad Kapcia** i **Tomasz Wietecha**. Pozostałe rozwiązania zawierały błędy, a niektórzy uczestnicy nadesłali tylko drugie zadanie z tej serii, stąd stosunkowo wysoki współczynnik trudności.

W zadaniu **733** (WT = 3,06) zmienne pole magnetyczne w obszarze wewnątrz przewodzącego pierścienia w kształcie okręgu wytwarzało w nim stałą siłę elektromotoryczną. Należało znaleźć napięcie między dwoma punktami tego okręgu, do których na zewnątrz drutami oporowymi dołączony był amperomierz. Bezbłędnie rozwiązał to zadanie **Piotr Adamczyk**. Pozostali uczestnicy często nie brali pod uwagę, że siła elektromotoryczna indukcji powstawała w każdym elemencie okręgu.

Zadanie **738** (WT = 2,71) było zadaniem z kinematyki. Stożek toczył się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej, a jego oś obracała się z zadaną prędkością kątową wokół osi pionowej przechodzącej przez wierzchołek stożka. Polecenie brzmiało: „Wyznaczyć prędkość liniową dowolnego punktu średnicy podstawy stożka leżącej w płaszczyźnie pionowej". Miałam na myśli płaszczyznę pionową zawierającą oś stożka oraz jego tworzącą styczną do podłoża – i tak zrozumiała to większość uczestników, ale nie zostało to doprecyzowane w treści zadania. Dlatego nie obniżałam punktów za przyjęcie innej interpretacji. Kluczowe w tym zadaniu było znalezienie związku między prędkościami kątowymi obrotu stożka wokół własnej osi i obrotu tej osi wokół osi pionowej. Poprawnie zrobili to **Piotr Adamczyk** i **Piotr Łaba**, którzy uzyskali oceny maksymalne.

Nie było oceny maksymalnej w zadaniu **734** (WT = 2,63), gdzie nitka odwijana ze szpulki toczącej się po stole wyciągana była stałą siłą przez otworek powyżej szpulki. Prawie wszyscy poradzili sobie z dynamiką zadania, gorzej było z kinematyką, czyli z odpowiedzią na pytanie, jaka długość nici została wyciągnięta przez otwór. Najbliższy prawidłowej odpowiedzi był **Paweł Perkowski**.

Czterech uczestników przekroczyło w tym roku granicę 44 punktów – **Tomasz Wietecha** po raz szesnasty (!), **Piotr Adamczyk** i **Konrad Kapcia** po raz drugi, **Ryszard Baniewicz** po raz pierwszy. Podobnie jak w roku ubiegłym, najbardziej skuteczny okazał się **Piotr Adamczyk**, który przysłał rozwiązania wszystkich zadań, a za 15 z nich otrzymał oceny maksymalne.

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2023

Zadania z matematyki nr 855, 856

Redaguje Marcin E. KUCZMA

855. Rozważamy funkcje $f\colon\ [0,1] \to [0,\infty)$ spełniające warunki: $f(1) = 1$ oraz
$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y), \qquad \text{gdy} \quad x, y, x{+}y \in [0,1].$$
Wyznaczyć najmniejszą liczbę $C > 0$ o tej własności, że dla każdej rozważanej funkcji f ma miejsce oszacowanie: $f(x) \leqslant Cx$ (dla $x \in [0,1]$).

856. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg nieskończony $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ o wyrazach całkowitych dodatnich taki, że każda dodatnia liczba całkowita występuje dokładnie raz w każdym z ciągów $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ oraz $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$, gdzie $d_i = |a_i - a_{i+1}|$.

Zadanie 856 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2021/22

Stanisław Bednarek	2 – 42,60
Krzysztof Maziarz	40,67
Tomasz Wietecha	13 – 39,23
Paweł Najman	8 – 38,88
Mikołaj Pater	2 – 38,30
Krzysztof Zygan	38,26
Marcin Kasperski	4 – 37,65
Adam Woryna	3 – 36,14
Radosław Kujawa	35,83
Janusz Olszewski	22 – 34,88
Norbert Porwol	34,16
Tomasz Czajka	33,74
Paweł Kubit	7 – 28,03
Marian Łupieżowiec	1 – 27,63
Piotr Sołtan	27,12
Janusz Wojtal	25,48
Jędrzej Biedrzycki	24,36
Janusz Fiett	3 – 23,73
Szymon Tur	22,47
Marcin Małogrosz	4 – 20,62
Michał Kieza	4 – 20,46
Piotr Kumor	15 – 20,31
Karol Matuszewski	1 – 19,74
Grzegorz Wiączkowski	19,44
Roksana Słowik	2 – 17,94
Semen Słobodianiuk	17,86
Łukasz Merta	2 – 17,69
Krzysztof Kamiński	3 – 17,36
Marek Prauza	4 – 16,62
Piotr Łaba	14,50

Legenda (przykładowo): stan konta 7 – 28,03 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 28,03 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 13 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2020, 2021 lub 2022.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M
(w kolejności uzyskiwania statusu weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (15), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (22), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (13), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek (7), P. Kubit (7), J. Cisło (16), W. Bednarek (9), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedzej, M. Miodek, M. Małogrosz (4), K. Kamiński, J. Fiett, M. Spychała (4), A. Kurach
(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Rozwiązania zadań z numeru 10/2022

Przypominamy treść zadań:

847. Dana jest funkcja ciągła $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o następującej własności: dla każdej pary liczb a,b, gdzie $a<b$, istnieją liczby u,v takie, że $a\leqslant u<v\leqslant b$ oraz $f(u)\leqslant f(x)\leqslant f(v)$ dla $x\in[a,b]$. Udowodnić, że funkcja f jest niemalejąca.

848. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną, $n\geqslant 3$. Niech X będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych $(x_1,x_2,\ldots)$ o wyrazach $x_i\in\{1,\ldots,n\}$ i niech B będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych $(b_1,b_2,\ldots)$ o wyrazach $b_i\in\{0,1\}$. Wyjaśnić, czy istnieje różnowartościowe odwzorowanie zbioru X na cały zbiór B takie, że (dla każdej liczby naturalnej k): jeżeli dwa ciągi (x_i), (y_i) ze zbioru X pokrywają się na odcinku początkowym długości k (tzn. $x_i=y_i$ dla $i\leqslant k$), to ich obrazy także pokrywają się na odcinku początkowym długości k.

847. Weźmy dowolne liczby $a<b$; należy dowieść, że $f(a)\leqslant f(b)$. Oznaczmy przez m i M najmniejszą i największą wartość funkcji f na przedziale $[a,b]$. Z założenia istnieją liczby $u,v\in[a,b]$, $u<v$, dla których $f(u)=m$, $f(v)=M$. Przyjmijmy, że u jest najmniejszą, zaś v – największą liczbą (w przedziale $[a,b]$) o powyższej własności (ich istnienie wynika z ciągłości funkcji f).

Przypuśćmy, że $a<u$; więc $f(x)>m$ dla $x\in[a,u)$. W myśl założenia, istnieją w przedziale $[a,u]$ liczby $u'<v'$, w których f przyjmuje (odpowiednio) swoją najmniejszą i największą wartość na $[a,u]$. To jednak niemożliwe, bo najmniejszą wartością jest $m=f(u)$, i nie jest ona osiągana w żadnym punkcie przedziału $[a,u)$. Sprzeczność pokazuje, że $u=a$. Analogiczne rozumowanie pokazuje, że $v=b$. Zatem $f(a)=m\leqslant M=f(b)$.

848. Istnieje. Jako przykład niech posłuży kodowanie z użyciem bloków (słów binarnych):
$$\beta_1=1,\ \beta_2=01,\ \beta_3=001,\ \beta_4=0001,\ \ldots,$$
$$\beta_{n-1}=\underbrace{00\ldots0}_{n-2}1,\quad \beta_n=\underbrace{00\ldots00}_{n-1}.$$
Weźmy dowolny ciąg $\mathbf{x}\in X$ (słowo nieskończone): $\mathbf{x}=xyz\ldots$ (zapis bez nawiasów i przecinków; $x,y,z,\ldots\in\{1,\ldots,n\}$). Przyporządkujmy mu ciąg (słowo) $\mathbf{b}=F(\mathbf{x})\in B$: $\mathbf{b}=\beta_x\beta_y\beta_z\ldots$ (bloki napisane jeden za drugim – konkatenacja słów β_i). Jasne, że jeśli dwa słowa z X pokrywają się na odcinku początkowym, to ich F-obrazy pokrywają się na odcinku początkowym co najmniej tej samej długości.

Weźmy teraz dowolny ciąg zerojedynkowy $\mathbf{b}\in B$ i zauważmy, że *dokładnie jedno* ze słów β_i jest jego odcinkiem początkowym. Odrzucamy ten odcinek; to, co zostaje, jest znów długim słowem binarnym, rozpoczynającym się dokładnie jednym ze słów β_i; itd. Indukcyjnie uzyskujemy jednoznaczne przedstawienie rozważanego (nieskończonego) słowa binarnego w postaci konkatenacji $\mathbf{b}=\beta_x\beta_y\beta_z\ldots$. Ciąg $\mathbf{x}=xyz\ldots$ jest elementem zbioru X, zaś $\mathbf{b}=F(\mathbf{x})$. Opisane odwzorowanie $B\to X$ jest odwróceniem przyporządkowania F i uzasadnia jego bijektywność.

Przykład ilustrujący metodę „rozkodowania", gdy $n=4$ (więc $\beta_1=1$, $\beta_2=01$, $\beta_3=001$, $\beta_4=000$):
$$\mathbf{b}=01010000111001\ldots=01|01|000|01|1|1|001|\ldots\longmapsto 2242113\ldots=F^{-1}(\mathbf{b}).$$

Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 M w roku szkolnym 2021/2022

Jak co roku o tej porze, przyjrzyjmy się wybranym zadaniom z minionego sezonu – więc głównie tym, które okazały się trudniejsze (wysoki współczynnik trudności WT i/lub niewielka liczba poprawnych rozwiązań LPR). Przedstawiamy ciekawe pomysły rozwiązań oraz komentarze uczestników. Niektóre ich fragmenty umieszczamy w e-wydaniu (w zakładce „Załącznik do elektronicznego omówienia ligi matematycznej").

* * *

Zadanie **825.** [Graf ważony, $n\geqslant 4$ wierzchołków, krawędzie o wagach $\neq 0$, suma wag $=\pm1$; tak samo w każdym grafie uzyskanym przez zmianę znaku wag krawędzi z wybranego wierzchołka; także przy powtórzeniu tej operacji; możliwe wartości iloczynu wag?] ($WT=2{,}50$; $LPR=6$).

Pozostali członkowie Klubu 44 M
(alfabetycznie):

„dwukrotni": Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, *A. Idzik*, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, Ł. Merta, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, M. Pater, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski, B. Żmija;

„jednokrotni": R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, P. Burdzy, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Jóźwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, K. Matuszewski, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, K. Morawski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, *K. Trautman*, P. Wach, J. Węgrecki, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Odpowiedź: $-1, -\frac{1}{16}, +1$. Bezbłędne rozwiązania, w stylu zbliżonym do firmowego: **M. Adamaszek** (najbardziej zwięzły opis), **J. Olszewski**, **A. Kurach**; a z niewielkimi usterkami (łatwo poprawialnymi, choć zmieniającymi odpowiedź): **J. Fiett**, **P. Łaba**, **M. Spychała**. Ponadto dwie prace z wieloma istotnymi spostrzeżeniami, ale z tak znaczącymi lukami, że trudno je uznać za pełne rozwiązania.

Zadanie **827.** [$T_m = \underbrace{33\ldots3}_{m}$; czy istnieją n, m takie, że nT_m ma sumę cyfr $< 3m$?] ($WT = 2{,}35$; $LPR = 7$). Nie istnieją. **Piotr Kumor** udowodnił, że (ogólniej) jeśli $m, n, B, g \in \mathbb{N}$, $B \mid g-1$, to w zapisie przy podstawie B liczba $n \cdot \underbrace{BB\ldots B}_{m}$ ma sumę cyfr $\geqslant mB$; dowód używa niebanalnych faktów pomocniczych ($\rightarrow$ e-wydanie). Inne dobre prace: **M. Adamaszek**, **A. Kurach**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**, **B. Żmija** oraz (z niejasnościami w opisie) **N. Porwol**.

Zadanie **829.** [$\triangle ABC\colon \sphericalangle A < \sphericalangle B < 90^\circ < \sphericalangle C$; CD – wysokość; O – środek okręgu opisanego; M – środek AC; $E = \mathrm{sym}_D(B)$; (okrąg ODM) $\cap$ (prosta AC) $= \{M, P\} \Rightarrow$ okręgi DCP, DEP przystające] ($WT = 3{,}29$; $LPR = 5$). Najzwięźlej: **Michał Adamaszek** – rozwiązanie firmowe, skrócone dzięki odwołaniu do twierdzenia „o motylku" (opcja sygnalizowana w „firmówce", Δ^3_{22}). Popatrzmy teraz na efektowne rozwiązanie, jakie przedstawił **Miłosz Kwiatkowski**: niech okrąg ODM (o średnicy OP) przecina proste OC, CD odpowiednio w punktach $R\,(\neq O)$, $Q\,(\neq D)$; mamy ciąg podobieństw trójkątów prostokątnych:

(1) $\triangle CPR \sim \triangle COM \sim \triangle CBD \sim \triangle CED,$

w którym środkowa relacja wynika z izogonalności $\sphericalangle MCO = \sphericalangle DCB$, a pozostałe są oczywiste; wniosek: $\frac{CP}{CE} = \frac{CR}{CD}$, $\sphericalangle PCR = \sphericalangle ECD$, więc też $\sphericalangle PCE = \sphericalangle RCD$, zatem $\triangle PCE \sim \triangle RCD$; stąd

(2) $\sphericalangle CEP = \sphericalangle CDR = \sphericalangle QDR = \sphericalangle QOR$

oraz (wobec (1)):

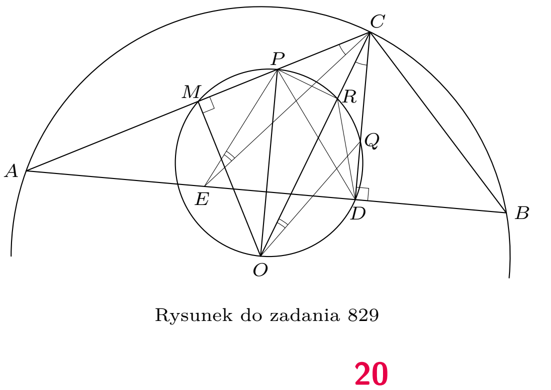
(3) $\sphericalangle CED = \sphericalangle COM = \sphericalangle ROM$

i przez dodanie (2) i (3) (z wykorzystaniem równości $MC = MD$):

$$\sphericalangle PED = \sphericalangle QOM = \sphericalangle QDM = \sphericalangle CDM = \sphericalangle PCD$$

– a to już w zasadzie teza zadania. Tylko uwaga: tu wszystko gra przy konfiguracji jak na rysunku; jednak nazwane punkty mogą leżeć w różnych uporządkowaniach (na prostych CA, CD i na okręgu ODM); przy każdym uporządkowaniu rachunek przechodzi po kosmetycznych zmianach (np. *dodanie* (2), (3) może się okazać *odjęciem* itp.).

W podobnym stylu, angażując nieco więcej trygonometrii, zrobił zadanie **Janusz Olszewski**; zaś w pełni rachunkowo: **Mikołaj Pater** i **Marian Łupieżowiec**.



Rysunek do zadania 829

Zadanie **831.** [$A = a^{2022} + b^{2021} + c^{2021} + d^{2022}$, $B = a^{2021} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2021}$, gdzie $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 1$, $bc < ad$; (**a**) $A < B$? $A > B$? (**b**) $\forall a > d \geqslant 1\, \forall q > 1\, \exists b, c \in (d, a)\colon\ bc < qad$; relacja między A, B przeciwna niż w (**a**)] ($WT = 2{,}52$; $LPR = 6$). Dobrą odpowiedź na pytanie (**a**) ($A > B$) uzyskało więcej osób; ale (nieoczekiwanie) część (**b**) okazała się bardziej wymagająca: tylko **M. Adamaszek**, **P. Kumor**, **A. Kurach**, **M. Spychała**, **B. Żmija** oraz (z usterką łatwo poprawialną) **M. Pater**.

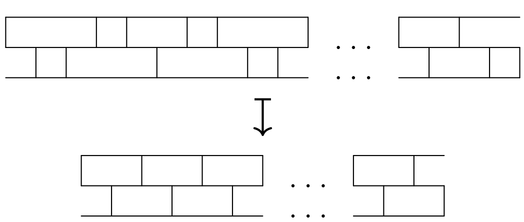
Zadanie **832.** [n-kąt wypukły, $n \geqslant 3$; znaleźć $(\max k)$, dla którego można tak ponumerować wierzchołki $1, \ldots, n$, że $\forall \ell \in \{1, \ldots, n-1\}\, \exists i, j$ – numery sąsiednich wierzchołków: $|i - j| = \ell$, przy czym dla $\ell = k$ są dwie takie pary i, j] ($WT = 2{,}24$; $LPR = 8$). Odpowiedź: $\max k = \lfloor n^2/2 \rfloor$. **Michał Adamaszek**, autor zadania, opatrzył je ciekawymi uwagami, które zamieściliśmy wraz z rozwiązaniem firmowym (Δ^4_{22}); na przykład spostrzeżeniem, że dla *każdej* permutacji $(a_1, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$: $\sum_{\mathrm{cykl}} |a_i - a_{i+1}| \leqslant \lfloor n^2/2 \rfloor$. To samo *spostrzeżenie* zostało wyodrębnione w pracach, które przysłali **K. Morawski** i **P. Kumor**; ale faktycznie jest ono obecne (bez wyeksponowania, jako fragment dowodu) także w pozostałych dobrych pracach (**J. Cisło**, **Ł. Merta**, **J. Olszewski**, **B. Żmija**, **K. Maziarz**).

Piotr Kumor, swoim zwyczajem, dołączył obszerny komentarz, a w nim uwagi, jak u autora zadania; przy tym wzmiankowane *spostrzeżenie* jest rozszerzone do wskazania maksimum sumy $\sum_{\mathrm{cykl}} |a_i - a_{i+1}|$, gdy $(a_1, \ldots, a_n)$ jest permutacją dowolnie ustalonego ciągu rosnącego długości n (niekoniecznie $(1, \ldots, n)$); szczegóły w e-wydaniu.

Zadanie **833.** [$\triangle CEG$ wewnątrz okręgu Ω, przecinającego proste CE; CG; EG odpowiednio w punktach B, F; A, I; D, H; okrąg wpisany w figurę ABC styczny do Ω w punkcie K; analogiczna definicja punktów L, M (przy figurach DEF, GHI) $\Rightarrow$ proste CK, EL, GM mają punkt wspólny] ($WT = 3{,}29$; $LPR = 4$). Rozumowanie firmowe (składanie jednokładności) zastosował **Michał Adamaszek** oraz **Janusz Olszewski**. Również **Marek Spychała** użył tej samej (faktycznie) metody, choć bez użycia słowa *jednokładność*: wprowadzając punkty styczności różnych okręgów i prostych oraz stosując twierdzenie sinusów do kilku trójkątów, które się pojawiły, scharakteryzował szukany punkt przez jego położenie na odcinku łączącym środek okręgu Ω ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CEG, dzielące ów odcinek w określonej proporcji.

Na odrębną uwagę zasługuje rozwiązanie, jakie przedstawił **Jerzy Cisło**. Zamieszczamy w e-wydaniu kopię tej pracy, bez żadnego retuszu, i zachęcamy do jej przestudiowania. Nie jest to łatwe – objaśnienia są bardzo lakoniczne w środkowym fragmencie (w którym ponadto trzeba „romb” zamienić na „równoległobok”). Kto zdoła przejść przez tę nieco wyboistą ścieżkę, w nagrodę zobaczy naprawdę ładny i niebanalny dowód.

Zadanie **835.** [$x_1, \ldots, x_n \in \{1, 2, 3\}$; $n \equiv 0 \pmod 3$; $|\{i\colon\ x_i = k\}| = n/3$ dla $k = 1, 2, 3 \Rightarrow$ $\exists k, l\colon\ x_k + \ldots + x_l = n$] ($WT = 2{,}59$; $LPR = 9$). Trudność zasadzała się w tym, jak zapisać rozumowanie zgrabnie i czytelnie. **Jerzy Cisło** pokazał, że to jak najbardziej wykonalne: układamy w linii klocki długości $1, 2, 3$, tyle samo ($n/3$) każdego rodzaju; linia ma długość $2n$; należy wykazać, że pewien fragment ma długość n. Przypuśćmy, że tak nie jest; przetnijmy pasek klocków w połowie (przecinając przy tym pewien klocek) i umieśćmy jedną połowę nad drugą. Przerwy pomiędzy górnymi klockami muszą wypaść wewnątrz dolnych i odwrotnie; każdy klocek długości 1 znajdzie się nad lub pod środkiem klocka długości 3. Usuńmy klocki długości 1 oraz środkowe fragmenty klocków długości 3.



Widzimy teraz tylko klocki długości 2, w ilości nieparzystej (bo jeden przecięty). Jest ich jednak tyle, ile (początkowo) było łącznie klocków długości 2 i 3; to oczekiwana sprzeczność, bo jednych i drugich było wszak tyle samo. To jest to!

Czytelny zapis – również dzięki wizualizacji „geometrycznej” – uzyskali **Radosław Kujawa** i **Janusz Olszewski** (który ponadto zwrócił uwagę, że prawie to samo zadanie znajduje się w książce Musztariego *Przygotowanie do olimpiad matematycznych*; zad. 353). Pozostałe rozwiązania (w tym firmowe: Δ^6_{22}) – to bardziej lub mniej zgrabna formalizacja algebraiczna.

Zadanie **838.** [Równanie $x^4 + y^4 = z^2 + 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$] ($WT = 2{,}24$; $LPR = 10$). **Witold Bednarek** zaproponował to zadanie, wraz ze zgrabnym rozwiązaniem, które zostało opublikowane (Δ^7_{22}) jako firmowe (prosta rekurencja liniowa z pitagorejskimi parametrami 8, 15). Taką właśnie metodą zrobili to zadanie **Jerzy Cisło** i **Janusz Olszewski**. Jednak większość prac polegała na odwołaniu do tożsamości $X^4 + Y^4 = Z^2 + P^4$, gdzie $X, Y = 17p^2 \pm 12pq - 13q^2$, $Z = 289p^4 + 14p^2q^2 - 239q^4$, $P = q^2 - 17p^2$.

Wystarczy tutaj wstawić jako p, q dowolne liczby całkowite, dla których $P = \pm 1$ (a to równanie Pella, spełnione przez nieskończenie wiele par p, q) i przyjąć $x = |X|$, $y = |Y|$, $z = |Z|$. Podaną tożsamość można znaleźć w sieci; uczestnicy najczęściej powoływali się na `http://sites.google.com/site/tpiezas/009` (niektórzy wypisali tożsamość bez żadnego odsyłacza, więc zapewne należy domniemywać(!), że samodzielnie ją odkryli).

Metoda „firmowa” też jest podatna na uogólnienia (notka redaktora ligi w e-wydaniu).

Równanie z zadania w ogóle okazało się znane. Listę wszystkich 87 rozwiązań z $x, y < 10^4$ znalazł w sieci **Marek Spychała** ($\rightarrow$ e-wydanie) oraz **Tomasz Wietecha**, który zwrócił uwagę, że tylko jedno z nich uzyskuje się ze wspomnianej tożsamości (dla $p = 1, q = 4$).

Zadanie **842.** [Trzy koła:
$$K(A, r_A) \cap K(B, r_B) \cap K(C, r_C) \neq \emptyset;$$
$\triangle A'B'C'$: $A'B' \leqslant AB$; $A'C' \leqslant AC$; $B'C' \leqslant BC \Rightarrow$ $K(A', r_A) \cap K(B', r_B) \cap K(C', r_C) \neq \emptyset$] ($WT = 2{,}98$; $LPR = 5$). Rozwiązania uznane za poprawne (w kolejności precyzji, pełności argumentacji oraz czytelności opracowania): **J. Olszewski**, **K. Zygan**, **W. Malinowski**, **J. Cisło**, **P. Łaba**; zastosowane metody ustępują jednak prostotą rozwiązaniu, jakie znalazł autor zadania, **M. Adamaszek**, i które zostało wydrukowane jako firmowe (Δ^9_{22}). Ponadto jedna praca z bardzo dobrym pomysłem, ale ze znaczącym niedopatrzeniem w dowodzie.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.